УДК 517.977:531.36

А.С. Андреев[1], Е.И. Беликова

МЕТОД ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ О СТАБИЛИЗАЦИИ И СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Андреев Александр Сергеевич, *доктор физико-математических наук, профессор, окончил факультет прикладной математики и механики Ташкентского государственного университета. Заведующий кафедрой компьютерной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета. Имеет статьи, учебные пособия, монографию в области теории устойчивости. E-mail: andreevas@ulsu.ru*

Беликова Елена Игоревна, *окончила механико-математический факультет Ульяновского государственного университета. Инженер-программист 1 категории ФНПЦ ОАО «НПО «Марс». Имеет статьи в области теории устойчивости. E-mail: e.belikova@gmail.com*

Аннотация

Проведено развитие метода функций Ляпунова в решении задачи синтеза управления нелинейной управляемой системой.

Abstact

The article cites the method of Lyapunov functions to solve the problem of synthesis of control for nonlinear controlled system.

Одной из важных задач математической теории управления является задача о синтезе управления для системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями. В линейном случае эта задача глубоко исследована. Для нелинейной системы эффективное решение достигается на основе метода функций Ляпунова. Развитию этого подхода в теории управления посвящается данная работа.

1 Постановка задачи о синтезе управления

Пусть движение некоторой управляемой системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y, v), \qquad (1.1)$$

где $y \in R^n$ есть вектор-функция переменных, являющихся некоторыми контролируемыми параметрами, связанными с движением управляемого объекта, а $v \in R^m$ есть вектор-функция управления, приложенного к объекту.

Пусть $y = y^0(t)$ есть некоторое частное движение системы, порождаемое управлением $v = v^0(t)$. Таким образом, имеем

$$\frac{dy^0}{dt} = Y^0\left(t, y^0(t), v^0(t)\right). \qquad (1.2)$$

Примем y^0 за невозмущенное движение и введем переменные

$$x = y - y^0(t), \quad u = v - v^0(t),$$

где x — возмущения параметров движения;

u — отклонения управляющих воздействий v от порождающего управления $v = v^0(t)$.

Из соотношений (1.1) и (1.2) получаем, что возмущенное движение при отклонении u, принимаемом за дополнительное управление, описывается системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, u), \qquad (1.3)$$

где

$$X(t,x,u) = Y(t, y^0(t) + x, v^0(t) + u) - Y(t, y^0(t), v^0(t)), \quad X(t, 0, 0) \equiv 0.$$

Предположим, что правая часть системы (1.3), вектор-функция $X(t,x,u)$, определена и непрерывна для всех $(t,x,u) \in R^+ \times \Gamma \times R^m$, за исключением, быть может, точки $x = 0$ и некоторого заданного множества, где $\Gamma = \{x \in R^n : \|x\| < H,\ 0 < H \le +\infty\}$, $\|x\|$ есть норма в n-мерном действительном простран-

1 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-0074) и проекта 2.1.1/6194 РНПВШ Минобрнауки РФ.

стве R^n, R^m есть m-мерное действительное пространство с соответствующей нормой $\|u\|$.

Также будем полагать, что дополнительное управление u, целью которого является приведение системы в движение по закону $y = y^0(t)$ (или по закону $x(t) \equiv 0$ для системы (1.3)), формируется в цепи обратной связи с измерением текущих значений параметров x, т.е. в виде зависимости $u = u(t, x)$, $u(t, 0) \equiv 0$.

Пусть U есть класс управлений $u = u(t, x)$, $u(t, 0) \equiv 0$, которые могут быть построены на основе обратной связи, определенных и непрерывных в области $R^+ \times \Gamma$, за исключением, быть может, точки $x = 0$ и некоторого заданного множества.

Допустим, что при каждом $u \in U$ соответствующие движения $x = x(t, t_0, x_0)$ для каждой точки $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Gamma$ при $t \geq t_0$ являются единственными.

Введем следующие обозначения: $x = x[t] = x(t, t_0, x_0)$ — управляемое движение, порождаемое управлением $u[t] = u(t, x[t])$, удовлетворяющее начальному условию $x[t_0] = x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

В работе [1], как развитие работы [2], дана следующая постановка задачи синтеза управления для системы (1.3) на конечном отрезке времени.

Определение 1.1. Задача синтеза управления на конечном отрезке времени состоит в нахождении управления $u = u(t, x)$, $u \in U$, такого, чтобы движение $x = x[t]$ системы (1.3), начинающееся в произвольной точке x_0 из некоторой окрестности $x = 0$ в любой начальный момент времени $t_0 \geq 0$, попадало бы в конечный момент времени $t_0 + T$, где $T = T(t_0, x_0) > 0$, в заданную точку $x = 0$.

При этом синтез будем называть устойчивым, если при $u = u(t, x)$, решающем поставленную задачу, для любого $t_0 \in R^+$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $\|x[t]\| < \varepsilon$, если $\|x_0\| < \delta$ и $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T = T(t_0, x_0)$.

Расширим это определение, поставив задачи равномерного синтеза и синтеза управления равномерного по x_0 на конечном отрезке.

Определение 1.2. Задача равномерного синтеза состоит в нахождении управления $u = u(t, x)$, $u \in U$, такого, что существуют число $H_0 > 0$, $H_0 < H$, и число $T > 0$, такие, что любое движение $x = x[t]$, начинающееся в произвольной точке $x_0 \in \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{x \in R^n : \|x\| \leq H_0\}$, в любой начальный момент времени $t_0 \in R^+$, попадает в заданную точку $x = 0$ при некотором $T^* \in [t_0, t_0 + T]$.

Определение 1.3. Задача синтеза управления равномерного по x_0 состоит в нахождении управления $u = u(t, x)$, $u \in U$, такого, что для любого $t_0 \in R^+$ найдутся число $H_0 = H_0(t_0) > 0$ и число $T = T(t_0) > 0$, такие, что любое движение $x = x[t]$, начинающееся в точке $x_0 \in \Gamma_0$ в начальный момент времени $t_0 \in R^+$, попадает в заданную точку $x = 0$ при некотором $T^* \in [t_0, t_0 + T]$.

По отношению к задаче синтеза управления можно поставить задачу о выборе управляющего воздействия $u = u^0(t, x)$ с точки зрения наилучшего качества переходного процесса, состоящего в достижении минимума функционала

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_0+T} \omega(t, x[t], u[t])dt, \tag{1.4}$$

где $\omega(t, x, u)$ — некоторая непрерывная неотрицательная скалярная функция переменных $(t, x, u) \in R^+ \times R^n \times R^m$, характеризующая качество переходного процесса, число $T \geq 0$ не задано.

Выбор $\omega(t, x, u)$ в конкретной прикладной задаче проводится с учетом особенностей ее постановки, ограничения ресурсов управления, требования к оценке переходного процесса и возможностей формы или способа решения задачи.

Пусть $x = x^0[t]$ есть движение, порождаемое управляющим воздействием $u = u^0[t]$, а

$x = x[t]$ — движение, порождаемое управляющим воздействием $u = u[t]$.

Используя введенные выше обозначения, проведем постановку задачи оптимального синтеза.

Определение 1.4. Задача оптимального синтеза состоит в нахождении управляющего воздействия $u = u^0(t, x)$, решающего задачу синтеза управления на конечном отрезке и такого, что по сравнению с любыми другими управляющими воздействиями $u = u(t, x)$, решающими эту задачу, для всех $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Gamma_0$ выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \omega(t, x^0[t], u^0[t])dt \le \int_{t_0}^{t_0+T} \omega(t, x[t], u[t])dt$$

при условии $x^0[t_0] = x[t_0] = x_0$.

Замечание 1.1. Область Γ_0 в определении 1.4 принята независимой от $t_0 \in R^+$. Возможны и другие варианты постановки задачи об оптимальном синтезе. Например, с зависимостью Γ_0 от $t_0 \in R^+$, т.е. когда $H_0 = H_0(t_0) > 0$.

Определение 1.5. Задача равномерного оптимального синтеза состоит в нахождении управляющего воздействия $u = u^0(t, x)$, решающего задачу равномерного синтеза управления на конечном отрезке и оптимального по сравнению с любыми другими управляющими воздействиями $u = u(t, x)$, решающими эту задачу.

Соответственно определению 1.3 можно ввести задачу оптимального синтеза равномерного по x_0.

2 Задача синтеза управления для автономной управляемой системы

Пусть возмущенное движение управляемой системы описывается уравнениями, независящими явно от времени,

$$\dot{x} = X(x, u), \quad X(0, 0) = 0, \tag{2.1}$$

где $x \in R^n$;

$X : R^n \times R^m \to R^n$ — вектор-функция;

$u \in U$ — m-мерный вектор управления, U есть класс управляющих воздействий $u = u(x)$, $u(0) = 0$.

Так как задача синтеза рассматривается для автономной системы, то за начальный момент времени можно принять $t_0 = 0$, а ее решения определить в виде $x = x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$.

Допустим, что $u = u^0(x)$, $u^0 \in U$, есть некоторое выбранное управление, под действием которого уравнения управляемого движения (2.1) принимают вид

$$\dot{x} = X^0(x), \quad X^0(x) = X(x, u^0(x)). \tag{2.2}$$

Будем полагать, что движение $x = x(t, x_0)$ определено и единственно при $t \ge 0$ для каждой точки $x_0 \in \Gamma$.

Пусть $V : \Gamma \to R^+$, $V(0) \equiv 0$, есть скалярная функция, непрерывно дифференцируемая в области Γ, за исключением, может быть, точки $x = 0$ и множества $\{V(x) = 0\}$.

В точках $x \notin \{V(x) = 0\}$ можно определить производную в силу системы (2.2)

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T X^0(x).$$

Введем класс функций типа Хана: $h \in K$, если $h : R^+ \to R^+$ есть непрерывная, строго монотонно возрастающая функция со значением $h(0) = 0$. Определим подкласс $K_1 \subset K$, такой, что если $h \in K_1$, то при $a > 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^a h^{-1}(\tau)d\tau < +\infty,$$

т.е. интеграл сходится.

Следуя [1], несложно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть для системы (2.1) можно найти функцию Ляпунова $V = V^0(x)$ и управляющее воздействие $u = u^0(x)$, такие, что:

1) для всех $x \in \Gamma$ выполняется соотношение $V^0(x) > 0$, при этом $V^0(x) = 0$ только при $x = 0$;

2) функция $\dot{V}^0(x) \le -h(V^0(x))$, $h \in K_1$.

Тогда $u = u^0(x)$ решает задачу устойчивого синтеза управления на конечном отрезке времени.

Обобщим это решение задачи синтеза на основе применения знакопостоянных функций Ляпунова.

Теорема 2.2. Предположим, что можно найти функцию Ляпунова $V = V^0(x) \geq 0$ и управление $u = u^0(x)$, такие, что выполнены условия:

1) производная функции $V^0(x)$ при $x \notin \{V^0(x) = 0\}$ в силу системы (2.2) удовлетворяет неравенству $\dot{V}^0(x) \leq -h(V^0(x))$, $h \in K_1$;

2) точка $x = 0$ системы (2.2) асимптотически устойчива относительно множества $\{V^0(x) = 0\}$.

Тогда $x = 0$ системы (2.2) асимптотически устойчиво, а возмущенное движение попадает на множество $\{V^0(x) = 0\}$ за конечный промежуток времени.

Если же вместо условия 2) выполнено условие 2′), а движение, начинающееся на множестве $\{V^0(x) = 0\} \cap \Gamma$, попадает в точку $x = 0$ за конечное время, тогда $u = u^0(x)$ решает задачу устойчивого синтеза управления на конечном отрезке времени.

Доказательство. Из условий 1) и 2) теоремы следует, что решение $x = 0$ системы (2.2) асимптотически устойчиво [3].

Пусть $\Gamma_0 = \{\|x\| \leq H_0, 0 < H_0 < H\}$ – область притяжения;

$x = x^0(t, x_0)$, $\quad x_0 \in \Gamma_0 \setminus \{V(x) = 0\}$ – движение.

По условию 2) на этом движении для функции $V^0[t] = V^0(x^0(t, x_0))$, $\quad V^0[0] = V^0(x_0) = V_0$ имеем

$$\frac{dV^0[t]}{dt} \leq -h(V^0[t]). \tag{2.3}$$

Отсюда получаем, что $V^0(t) \to 0$ при $t \to T$ и имеет место оценка

$$t \leq T \leq T^* = \int_0^{V_0} h^{-1}(\tau)d\tau.$$

Значит, существует время T_1, $\ 0 < T_1 \leq T^*$, такое, что при $t = T_1$ любое выбранное движение попадает на множество $\{V^0(x) = 0, x \in \Gamma_1\}$.

Допустим, что вместо условия 2) выполняется условие 2′) теоремы.

Пусть $x_1 \in \{V(x) = 0\}$ есть точка, в которую попадает движение $x = x(t, x_0)$ в момент $t = T_1$, $x(T_1, x_0) = x_1$. Соответствующее движение $x = x^0(t, x_1)$ попадает в точку $x = 0$ при некотором $t = T_2 \geq 0$ согласно условию 2′) теоремы. Так как $x(T_1 + T_2, x_0) = x(T_2, x(T_1, x_0)) = x(T_2, x_1)$, за время $t \leq T^* + T_2$ движение $x = x(t, x_0)$ из точки $x_0 \notin \{V(x) = 0\}$ попадает в точку $x = 0$.

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу об оптимальном синтезе управления системы (2.1) с минимизируемым функционалом

$$I(u) = \int_0^T \omega(x, u)dt, \tag{2.4}$$

где $\omega(x, u): R^n \times U \to R^+$ – непрерывная неотрицательная функция.

Введем выражение [2]

$$B[V, x, u] = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T X(x, u) + \omega(x, u).$$

Имеет место следующая теорема об оптимальном синтезе.

Теорема 2.3. Предположим, что существуют функция $V = V^0(x)$ и управляющее воздействие $u = u^0(x)$, $\ u \in U$, такие, что выполнено условие 1) теоремы 2.1, а также:

2) выполнено неравенство

$$\omega(x, u^0(x)) \geq h(V^0(x)), \quad h \in K_1;$$

3) для всех $x \in \Gamma_0$ выполняется соотношение

$$B[V^0(x), x, u^0(x)] \equiv 0;$$

4) для любого $u = u(x)$, $\ u \in U$, в области Γ справедливо неравенство

$$B[V^0(x), x, u(x)] \geq 0.$$

Тогда $u = u^0(x)$ решает задачу оптимального синтеза.

Доказательство. Для производной функции $V^0(x)$ в силу системы (2.2) из условий 2) и 3) теоремы находим

$$\dot{V}^0(x) = \left(\frac{\partial V^0}{\partial x}\right)^T X(x, u^0) = -\omega(x, u^0) \leq -h(V^0),$$
$$h \in K_1. \tag{2.5}$$

Значит, выполнены условия теоремы 2.1 и управляющее воздействие $u = u^0(x)$ решает задачу устойчивого синтеза управления на конечном отрезке времени.

Покажем, что управляющее воздействие $u = u^0(x)$ доставляет минимум функционалу (2.4) по сравнению с другими воздействиями, решающими эту задачу.

$T_0 = T(x_0)$ — момент времени, при котором движение $x = x^0(t, x_0)$ системы (2.2) попадает в точку $x = 0$. Следовательно,

$$V^0[T_0] = V^0(x^0(T_0, x_0)) = V^0(0) = 0.$$

Для этого движения из условия 3) получаем

$$I(u^0) = \int_0^{T_0} \omega(x^0[t], u^0[t])dt = -\int_0^{T_0} \left.\frac{dV^0[t]}{dt}\right|_{u=u^0[t]} dt =$$
$$= -(V^0[T_0] - V^0(x_0)) = V^0(x_0). \tag{2.6}$$

Пусть $u = u^1(x)$, $u^1 \in U$, есть любое другое управляющее воздействие, такое, что порождаемое им управляемое движение $x = x^1[t]$ с начальной точкой $x_0 \in \Gamma_0$ попадает в точку $x = 0$ при $t = T_1$. Значит, $x^1[T_1] = 0$. Так как $V^0(0) \equiv 0$, то $V^0[T_1] = V^0(0) = 0$.

Из условия 4) теоремы будем иметь

$$I(u^1) = \int_0^{T_1} \omega(x^1[t], u^1[t])dt \geq -\int_0^{T_1} \left.\frac{dV^0[t]}{dt}\right|_{u=u^1[t]} dt =$$
$$= -(V^0[T_1] - V^0(x_0)) = V^0(x_0). \tag{2.7}$$

Тем самым теорема доказана.

Теорема 2.4. Результат теоремы 2.3 сохраняется, если можно найти функцию Ляпунова $V = V^0(x) \geq 0$ и управляющее воздействие $u = u^0(x)$, такие, что в области $\Gamma \setminus \{V(x) = 0\}$ выполнены условия 2), 3) и 4) теоремы 2.3, а также:

1) движения системы (2.2) из некоторой области Γ_0 ограничены областью $\Gamma_1 = \{\|x\| \leq H_1, H_0 \leq H_1 < H\}$;

5) движения, начинающиеся на множестве $\{V^0(x) = 0, x \in \Gamma_1\}$, попадают в точку $x = 0$ за конечное время.

Доказательство. Пусть $x = x^0(t, x_0)$ — какое-либо движение системы (2.2) при управляющем воздействии $u = u^0(x)$.

Если $x_1 \in \{V^0(x) = 0, x \in \Gamma_1\}$, тогда соответствующее движение $x = x^0(t, x_1)$ попадает в точку $x = 0$ при некотором $t = T_1 \geq 0$ согласно условию 5) теоремы. При этом из определения функции V^0 теоремы следует, что на этом движении $V^0(x^0(t, x_1)) \equiv 0$, т.е. движение $x^0(t, x_1) \in \{V^0 = 0\}$ при $t \in [0, T_1]$. Значение функционала $I(u^0) \equiv 0$ на этом движении, так как $\omega(x^0[t], u^0[t]) \equiv 0$ в силу $V^0(x[t]) \equiv 0$.

Если $x_0 \in \{V^0(x) > 0, x \in \Gamma_0\}$, тогда по условию 1) теоремы соответствующее движение $x = x^0(t, x_0)$ ограничено при всех $t \geq 0$, и на этом решении для функции $V^0[t] = V^0(x^0(t, x_0))$, $V^0[0] = V^0(x_0) = V_0$, согласно условию 2) теоремы имеем

$$\frac{dV^0[t]}{dt} \leq -h(V^0[t]).$$

Отсюда, аналогично доказательству теоремы 2.3, получаем, что $V^0(t) \to 0$ при $t \to T$, и имеет место оценка вида (2.6)

$$I(u^0) = \int_0^{T} \omega(x^0[t], u^0[t])dt =$$
$$= V^0(x_0) - V^0(x(T)) = V^0(x_0).$$

Для любого другого $u = u(x)$, решающего задачу синтеза, как и в теореме 2.3, найдем, что $I(u) \geq V^0(x_0)$ (см. неравенство (2.7)).

Тем самым теорема доказана.

3. О синтезе управления для неавтономной управляемой системы.

Рассмотрим управляемую систему, движение которой описывается системой уравнений (1.3).

Пусть $u = u^0(t, x)$, $u^0 \in U$, есть некоторое выбранное управление, при котором уравнения управляемого движения (1.3) принимают вид:

$$\dot{x} = X^0(t, x), \quad X^0(t, x) = X(t, x, u^0(t, x)) \tag{3.1}$$

Будем полагать, что правая часть системы (3.1) определена и непрерывна в области $R^+ \times \Gamma \times R^m$, $\Gamma = \{x \in R^n : \|x\| < H, 0 < H \leq +\infty\}$, за исключением, быть может, точки $x = 0$ и некоторого заданного множества. Пусть также для каждой $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Gamma$ решение (3.1)

$x = x^0(t, t_0, x_0)$, $x^0(t_0, t_0, x_0) = x_0$, единственно при $t \geq t_0$.

Имеют место следующие решения задачи о синтезе управления.

Теорема 3.1. Пусть для системы (1.3) можно найти функцию Ляпунова $V = V^0(t, x)$ и управление $u = u^0(t, x)$, такие, что:

1) для всех $(t, x) \in R^+ \times \Gamma$ выполняется соотношение $V^0(t, x) \geq h_1(\|x\|)$, $h_1 \in K$;

2) производная $V^0(t, x)$ в силу системы (3.1) удовлетворяет для $x \neq 0$ неравенству

$$\dot{V}^0(t, x) \leq -h_2(V^0(t, x)), \quad h_2 \in K_1.$$

Тогда $u = u^0(t, x)$ решает задачу устойчивого синтеза управления на конечном отрезке времени.

Теорема 3.2. Предположим, что существуют функция $V = V^0(t, x)$ и управление $u = u^0(t, x)$, $u^0 \in U$, такие, что выполнены условия теоремы 3.1, а также:

3) функция $V^0(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел, $V^0(t, x) \leq h_3(\|x\|)$, $h_3 \in K$.

Тогда управление $u = u^0(t, x)$ решает задачу равномерного синтеза.

Исследуем задачу синтеза управления на конечном интервале времени на основе применения знакопостоянных функций Ляпунова. Ниже при этом будем полагать, что при $u = u^0(t, x)$ движения системы (3.1) непрерывно зависят от x_0 и решение $x = 0$ системы (3.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\{V^0(t, x) = 0\}$ в соответствии с определениями из работы [3].

Теорема 3.3. Предположим, что можно найти функцию Ляпунова $V = V^0(t, x) \geq 0$, $V^0(t, x) \leq h_1(\|x\|)$, $h_1 \in K$, и управление $u = u^0(t, x)$, такие, что выполнены условия:

1) производная функции $V^0(t, x)$ в силу системы (3.1) удовлетворяет неравенству $\dot{V}^0(t, x) \leq -h_2(V^0(t, x))$, $h_2 \in K_1$;

2) точка $x = 0$ системы (3.1) равномерно асимптотически устойчива относительно множества $\{V^0(t, x) = 0\}$.

Тогда $x = 0$ системы (3.1) равномерно асимптотически устойчиво, а ее движения попадают на множество $\{V^0(t, x) = 0\}$ за конечное время.

Если же вместо условия 2) выполнено условие 2′), а каждое движение, начинающееся на множестве $\{V^0(t, x) = 0\} \cap \Gamma_1$, $\Gamma_1 = \{\|x\| \leq H_1, H_1 > 0\}$, попадает в точку $x = 0$ за конечное время равномерно по $t_0 \in R^+$, тогда $u = u^0(t, x)$ решает задачу равномерного устойчивого синтеза управления на конечном отрезке времени для системы (1.3).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что решение $x = 0$ системы (3.1) является равномерно асимптотически устойчивым [3].

Пусть $\Gamma_0 = \{\|x\| \leq H_0 > 0\}$ есть область равномерного притяжения $x = 0$, а движение $x = x^0(t, t_0, x_0)$, $x_0 \in \Gamma_0$, есть движение, ограниченное областью Γ_1 при всех $t \geq t_0$.

Из условия 1) теоремы вдоль движения $x = x^0(t, t_0, x_0)$ для функции

$$V^0[t] = V^0(t, x^0(t, t_0, x_0)),$$

$$V^0[t_0] = V^0(t_0, x^0(t_0, t_0, x_0)) = V^0(t_0, x_0) = V_0$$

имеем

$$\frac{dV^0[t]}{dt} \leq -h_2(V^0[t]).$$

Отсюда получаем, что $V^0(t) \to 0$ при $t \to T = const$ и имеет место оценка

$$t \leq T \leq T_0 = \int_0^{V_0} h_2^{-1}(\tau)d\tau \leq \int_0^{h_1(H_1)} h_2^{-1}(\tau)d\tau = T^*.$$

Таким образом, существует время T_1, $0 < T_1 \leq T^*$, такое, что при $t = T_1$ любое выбранное движение попадает на множество $\{V^0(t, x) = 0, x \in \Gamma_1\}$.

Допустим, что вместо условия 2) выполняется условие 2′) теоремы.

При $x_1 \in \{V^0(t, x) = 0, x \in \Gamma_1\}$ соответствующее движение $x = x^0(t, T_1, x_1)$ попадает в точку $x = 0$ при некотором $t = T_1 + T_2$, $T_2 \geq 0$ согласно условию 2′) теоремы.

Из равенства $x(T_1+T_2, T_1, x_1) = x(T_1+T_2, t_0, x_0)$ получаем, что движение $x = x(t, t_0, x_0)$ попадает в точку $x = 0$ при $t = T_1 + T_2$.

Теорема доказана.

Исследуем задачу об оптимальном синтезе управления для системы (1.3), т.е. задачу о выборе $u = u^0(t, x)$, доставляющего минимум функционалу (1.4).

Введем выражение [2]

$$B[t, V, x, u] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T X(t, x, u) + \omega(t, x, u).$$

Если существуют функция $V^0 \in C^1$ и вектор-функция $u = u^0(t, x)$, такие, что для всех $(t, x) \in R \times \Gamma$ выполнено равенство

$$B[t, V^0(t, x), x, u^0(t, x)] = 0,$$

то для производной функции $V = V^0(t, x)$ в силу уравнений (3.1) имеем

$$\dot{V}^0(t, x) = -\omega(t, x, u^0(t, x)) \le 0 \tag{3.2}$$

Имеет место следующая теорема об оптимальном синтезе.

Теорема 3.4. Предположим, что существуют функция $V = V^0(t, x)$ и управление $u = u^0(t, x)$, $u \in U$, такие, что выполнены условия:

1) для всех $(t, x) \in R^+ \times \Gamma$ выполняется соотношение $V^0(t, x) \ge h_1(\|x\|)$, $h_1 \in K$;

2) функция $\omega(t, x, u)$ удовлетворяет условию

$$\omega(t, x, u^0(t, x)) \ge h_2(V^0(t, x)), \quad h_2 \in K_1$$

3) для всех $(t, x) \in R^+ \times \Gamma$

$$B[t, V^0(t, x), x, u^0(t, x)] \equiv 0;$$

4) для любого $u = u(t, x)$, $u \in U$, в области $R^+ \times \Gamma$ справедливо неравенство

$$B[t, V^0(t, x), x, u(t, x)] \ge 0.$$

Тогда $u = u^0(t, x)$ решает задачу оптимального синтеза системы (1.3).

Доказательство. Из условий теоремы согласно (3.2) имеем

$$\dot{V}^0(t, x) = -\omega(t, x, u^0) \le -h_2(V^0) \tag{3.3}$$

Значит, по теореме 3.1 управляющее воздействие $u = u^0(t, x)$ решает задачу устойчивого синтеза управления на конечном отрезке времени, движение $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (3.1) в момент времени $t_0 + T_0$ попадает в точку $x = 0$. Поэтому

$$V^0[t_0 + T_0] = V^0(t_0 + T_0, x(t_0 + T_0, t_0, x_0)) = \\ = V^0(t_0 + T_0, 0) = 0.$$

Покажем, что управляющее воздействие $u = u^0(t, x)$ доставляет минимум функционалу (1.4) по сравнению с другими воздействиями, решающими эту задачу.

Из (3.3) находим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} I(u^0) &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} \omega(t, x^0[t], u^0[t])dt = \\ &= -\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left.\frac{dV^0[t]}{dt}\right|_{u=u^0[t]} dt = \\ &= -(V^0[t_0+T_0] - V^0(t_0, x_0)) = \\ &= V^0(t_0, x_0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Пусть $u = u^1(t, x)$, $u^1 \in U$, есть любое другое управляющее воздействие, такое, что, порождаемое им управляемое движение $x = x^1[t]$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Gamma_0$ попадает в точку $x = 0$ при $t = t_0 + T_1$. Значит, $x^1[t_0 + T_1] = 0$. Так как $V^0(t, 0) \equiv 0$, то $V^0[t_0 + T_1] = V^0(t_0 + T_1, 0) = 0$. Из условия 4) теоремы будем иметь

$$\begin{aligned} I(u^1) &= \int_{t_0}^{t_0+T_1} \omega(t, x^1[t], u^1[t])dt \ge \\ &\ge -\int_{t_0}^{t_0+T_1} \left.\frac{dV^0[t]}{dt}\right|_{u=u^1[t]} dt = \\ &= -(V^0[t_0+T_1] - V^0(t_0, x_0)) = \\ &= V^0(t_0, x_0) = I(u^0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

С учетом (3.4) получаем доказательство теоремы.

Для знакопостоянной функции Ляпунова имеем следующий результат.

Теорема 3.5. Предположим, что существуют функция $V = V^0(t, x) \ge 0$, $V^0(t, x) \le h_1(\|x\|)$, $h_1 \in K$, и управление $u = u^0(t, x)$, $u \in U$, такие, что выполнены условия 2), 3) и 4) теоремы 3.4, а также:

1) движения, начинающиеся на множестве

$\{V^0(t,x)=0\}\cap\Gamma_1$, $\Gamma_1=\{\|x\|\le H_1, H_1>0\}$, попадают в точку $x=0$ за конечное время равномерно по $t_0\in R^+$.

Тогда $u=u^0(t,x)$ решает задачу равномерного оптимального синтеза системы (1.3).

Доказательство. Применяя соотношение (3.2), как и в теореме 3.4, находим, что $u=u^0(t,x)$ решает задачу устойчивого синтеза.

Далее аналогично теореме 3.4 из соотношений (3.4) и (3.5) показываем, что управление $u=u^0(t,x)$ доставляет минимум функционалу (1.4) по сравнению с другими воздействиями $u=u^1(t,x)$, решающими задачу синтеза на конечном интервале времени.

Доказанные теоремы развивают результаты исследований В.И. Коробова и его учеников, представленных в монографии [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Г.А., Коробов В.И., Скляр Г.М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем // ПММ. - 1988. - Т.52. - Вып. 1. — С.9-15.

2. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969. — 118 с.

3. Андреев А.С., Бойкова Т.А. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. — 2002. — Вып. 32. — С.109-116.

4. Коробов В.И. Метод функции управляемости. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хлотическая динамика», 2007. — 576 с.