

УДК 623.618.

Ю.В. Данилов, В.И. Левчин, А.В. Уланов, А.С. Федоров

ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СВЕТЛОГО ВРЕМЕНИ СУТОК

Данилов Юрий Васильевич, окончил факультет автоматизированных систем управления ВВМУРЭ им. А.С. Попова. Старший научный сотрудник НИЦ ОСО ФГУ «24 ЦНИИ МО РФ». Имеет статьи и публикации в области математического моделирования вооруженной борьбы на море, а также в области анализа управления рисками. [Тел.: (812) 450-50-79, доб. 118.]

Левчин Вячеслав Игоревич, окончил факультет математического обеспечения автоматизированных систем управления ВВМУРЭ им. А.С. Попова. Заместитель начальника отдела НИЦ ОСО ФГУ «24 ЦНИИ МО РФ». Имеет статьи и публикации в области математического моделирования вооруженной борьбы на море, а также в области анализа управления рисками. [Тел.: (812) 450-50-79, доб. 118.]

Уланов Алексей Васильевич, окончил факультет автоматизированных систем управления ВВМУРЭ им. А.С. Попова. Начальник отдела НИЦ ОСО ФГУ «24 ЦНИИ МО РФ». Имеет статьи и публикации в области математического моделирования вооруженной борьбы на море, а также в области анализа управления рисками. [Тел.: (812) 450-50-79, доб. 118.]

Федоров Алексей Сергеевич, окончил факультет математического обеспечения автоматизированных систем управления ВВМУРЭ им. А.С. Попова. Адъюнкт ФГУ «24 ЦНИИ МО РФ». Имеет статьи и публикации в области математического моделирования вооруженной борьбы на море, а также в области анализа управления рисками. [Тел.: 450-50-79, доб. 118, E-mail: fedorov_a@list.ru].

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы определения высоты Солнца относительно горизонта наблюдателя в произвольной точке земной поверхности на заданный момент времени. Решение данной задачи позволяет определять выполнение условий светлого времени и сумерек и может быть использовано при моделировании функционирования оптико-электронных средств и сенсоров.

Ключевые слова: время суток, склонение солнца, уравнение времени.

Abstract

The article deals with issues of definition of the sun height relative to observer horizon in an arbitrary point of the Earth surface for a given time period. The task solution contributes to the definition of daylight and twilight condition execution and can be used during the modeling of operation of optoelectronic facilities and sensors.

Key words: day time, sun declination, equation of time.

1 Вычисление солнечного склонения

Этот метод основан на допущении о круговой форме земной орбиты. Наибольшая ошибка при определении моментов восхода и захода Солнца связана с допущением о концентричности земной орбиты и равномерной скорости движения Земли по ней. Она может достигать максимальной величины в четверть часа. Для устранения ошибки применяется так называемое «уравнение времени».

Расчет солнечного склонения с точностью, приемлемой для расчетов, связанных с движением «быстрых» объектов, например, самолетов или космических аппаратов, производится с использованием текущего номера юлианского дня.

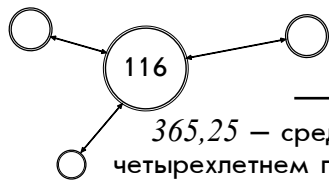
В тех случаях, когда требования к точности вычислений ниже (например, для стационарных или «медленных» объектов, таких, как корабли), можно использовать текущий номер дня в году.

Склонение Солнца для любой (текущей) даты может быть определено с помощью следующего выражения:

$$\varphi_{\text{Солнца}} = \left(-23,45 * \frac{\pi}{180} \right) * \cos \left(\left(\frac{2\pi}{365,25} \right) * (JD + 9) \right), \quad (1)$$

где JD — юлианский день (Julian day);

23,45 — наклон эклиптики, равный 23°26'33", по состоянию на 1975 год;



365,25 – средняя продолжительность года в четырехлетнем периоде, учитывающая продолжительность одного високосного, имеющего 366 дней, и трех обычных лет по 365 дней, т.е. $(3 \cdot 365 + 366) / 4 = 1461 / 4 = 365,25$;

9 в сомножителе $(JD+9)$ – количество дней, учитывающее сдвиг между началом нового календарного года (с 31/12 на 1/1) и днем зимнего солнцестояния (с 22/12 на 23/12), являющегося началом нового витка Земли вокруг Солнца (началом нового «звездного» года).

Данная формула позволяет вычислить значение склонения (широты φ) Солнца в радианах. Для перевода широты Солнца в градусы достаточно заменить π на 180 градусов.

Номер юлианского дня, соответствующего конкретной календарной дате, может быть выбран из астрономического ежегодника (Морского астрономического ежегодника – МАЕ) на текущий год. Он представляет собой порядковый номер текущего дня от начала юлианского периода.

Однако на практике часто справочника может не оказаться рядом, поэтому предлагается способ алгоритмического расчета, суть которого заключается в том, что текущий юлианский день JD можно вычислять исходя из чередующихся четырехлетних периодов, каждый из которых имеет продолжительность 1461 день. В астрономии (в астрономических ежегодниках) для удобства часто используются нулевые числа, что позволяет текущую дату использовать как слагаемое или индексы в вычислениях. Отправной точкой для расчетов в 21 веке взято 0.1.2000 (нулевое января 2000 високосного года = 31 декабря 1999 года), которое имеет номер юлианского дня **JD=2451544** на момент 12^h всемирного времени (полдень). Момент 12^h получен из-за того, что в качестве начала юлианского периода был принят именно гринвичский полдень [1, стр. 644]. Для получения момента начала суток (новой даты) на Гринвиче необходимо вычесть половину суток, т.е. величину 0,5, чтобы от полудня перейти к предшествующей ему полуночи (JD=2451543.5 на 0^h всемирного времени). Каждый новый четырехлетний период прибавляет к этим числам (JD полудня или JD начала суток) еще 1461.

Внутри четырехлетнего периода счет добавляемых дней ведется от високосного года с учетом следующей таблицы 1 [1, стр. 623].

Число дней **до начала** каждого месяца четырехлетнего интервала

| № п/п | Год | январь 0 | февраль 0 | март 0 | апрель 0 | май 0 | июнь 0 | июль 0 | август 0 | сентябрь 0 | октябрь 0 | ноябрь 0 | декабрь 0 |
|-------|-----|----------|-----------|--------|----------|-------|--------|--------|----------|------------|-----------|----------|-----------|
| 1 | 0 | 0 | 31 | 60 | 91 | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 |
| 2 | 1 | 366 | 397 | 425 | 456 | 486 | 517 | 547 | 578 | 609 | 639 | 670 | 700 |
| 3 | 2 | 731 | 762 | 790 | 821 | 851 | 882 | 912 | 943 | 974 | 1004 | 1035 | 1065 |
| 4 | 3 | 1096 | 1127 | 1155 | 1186 | 1216 | 1247 | 1277 | 1308 | 1339 | 1369 | 1400 | 1430 |

Проверка того, что год високосный, сводится к делению текущего года на 4 без остатка. Для високосных лет выбирается первая строка таблицы. Номер (индекс) элемента в строке определяется текущим месяцем (ММ=1:12). ДД=1:31 определяет текущее число месяца.

$$JD = JD_{0.1.2000} + 1461 * N + TAB1(I, ММ) + ДД \quad \text{для } OST=0.$$

Для примера приведем вычисление юлианского дня для 8 марта 2008 года:

$$\begin{aligned} 8/3/2008 &\rightarrow 2451544 + 1 * 1461 + \\ &+ TAB1(1, 3) + 8 = 2453005 + 60 + 8 = \\ &= 2453073, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$JD_{8.03.2008} = 2455764 \text{ для полудня (12}^h \text{ по Гринвичу).}$$

Остатки (OST) от деления, равные 1, 2, 3, определяют соответственно вторую, третью и четвертую строки таблицы 1. Данная таблица легко поддается алгоритмическому вычислению, так как числа в каждом столбце этих трех строк отличаются на 365 (в 3-й от 2-й, а также в 4-й от 3-й). Поэтому для расчетов можно брать только вторую строку таблицы.

$$JD = JD_{0.1.2000} + 1461 * N + TAB1(2, ММ) + 365 * (OST - 1) + ДД \quad \text{для } OST=1, 2, 3.$$

Более «грубый» способ вычисления солнечного склонения позволяет обойтись даже без знания номера юлианского дня. Отсутствие сведений о нем, естественно, внесет некоторую дополнительную неточность (в марте и сентябре, т.е. в периоды наибольшего прироста продолжительности дня, эта погрешность может достигать 3-5 минут).

Суть способа заключается в следующем. Запишем функцию COS из выражения (1) несколько иначе:

$$\begin{aligned} \text{COS} \left(\left(\frac{2\pi}{365,25} \right) * (JD + 9) \right) &= \\ = \text{COS} \left(\left(\frac{JD + 9}{365,25} \right) * 2\pi \right). \end{aligned}$$

Известно, что функция COS является периодической, откуда следует, что $\text{COS}(X + k * 2\pi) = \text{COS}(X)$ для $k=1, 2, 3, \dots$ - **целая часть от дроби** $(JD+9)/(365,25)$. Последнее число (integer part) представляет количество прошедших лет со дня зимнего солнцестояния,

Таблица 1

предшествовавшего началу юлианского периода. Таким образом, вычисляемое функцией COS значение будет целиком и полностью определяться дробной частью от деления $(JD+9)/(365,25)$, показывающей долю только одного (последнего) года:

$$X = \left(\left(\frac{JD+9}{365,25} \right) - \text{int eger part} \left(\frac{JD+9}{365,25} \right) \right).$$

После умножения остатка на продолжительность года, то есть $X \cdot (365,25)$, мы получим, по сути, **порядковый номер дня** в текущем году в юлианском исчислении (он может иметь и нецелочисленное значение).

$$D_{\text{пор}} = JD + 9 - \text{int eger part} \left(\frac{JD+9}{365,25} \right) * 365,25.$$

Зная дату (число и месяц) начала моделирования, можно определить порядковый номер D этого дня календаря, считая, что 1 января это $D = 1, \dots$, а 22 декабря — $D = 357$. Числа с 23 по 31 декабря имеют соответственно номера $D = (-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$, т.е. трактуются как (-8) января, (-7) января, ..., 0 января и попадают в предыдущий или следующий «звездный» год.

После увеличения D на 9, то есть после увязки начала календарного года с началом «звездного» года, можно произвести вычисления по упрощенной (в смысле знания JD) формуле:

$$\varphi_{\text{Солнца}} \approx \left(-23,45 * \frac{\pi}{180} \right) * \text{COS} \left(\left(\frac{2\pi}{365,25} \right) * (D+9) \right). \quad (2)$$

При таком вычислении солнечного склонения вместо номера юлианского дня JD используется порядковый номер дня D в году. Погрешность вычисления $D+9$ с использованием номера текущего дня в году не превышает одного дня $D+9-D_{\text{пор}} < 1$, т.к. отбрасывается только дробная часть произведения $X \cdot (365,25)$. В свою очередь это является причиной ошибки в определении момента восхода (заката). Максимумом данная ошибка достигает в период наибольшего изменения продолжительности дня (весной и

осенью) и на высоких широтах составляет 3-5 минут. Может возникнуть дополнительная ошибка в определении D , если используется местное время (и смена дат по нему), а не гринвичское.

2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫСОТЫ СОЛНЦА НАД ГОРИЗОНТОМ

Данная задача носит геометрический характер. Для ее решения вводятся два вспомогательных вектора единичной длины [2, стр. 139-141]. Для наблюдателя на широте φ плоскость, проходящая через точку Н, в которой он находится, является касательной к поверхности земного шара. Линия, соединяющая центр Земли (точка О) с рассматриваемой точкой наблюдателя, является радиусом, проведенным в точку касания, а следовательно, нормалью к плоскости горизонта наблюдателя. Направление этого радиуса-вектора (по линии ОН) определяет **первый единичный вектор**.

В качестве **второго единичного вектора** возьмем вектор, лежащий на линии, соединяющей центры Земли и Солнца (по линии OS) и отложенный от центра Земли в сторону Солнца.

Решение задачи определения высоты Солнца сводится к определению угла HOS между этими двумя единичными векторами, расположенными в плоскости рисунка (см. рис. 1).

Для простоты вычислений выбрана прямоугольная система координат. Ее начало совмещено с центром Земли. Оси OX и OY лежат в плоскости экватора. Ось OZ совпадает с осью вращения Земли и направлена в сторону Северного полюса. Таким образом, для решения задачи взята правая система координат [2, стр. 142], так как в ней поворот от оси OX в сторону оси OY производится против часовой стрелки, если смотреть из конца оси OZ. Кроме того, **ось OX постоянно ориентирована на Солнце**, то есть проекция линии, соединяющей Землю и Солнце, на плоскость экватора совпадает с осью OX. На рисунке 1 схематично показана геометрическая сущность решаемой задачи. Земля вращается

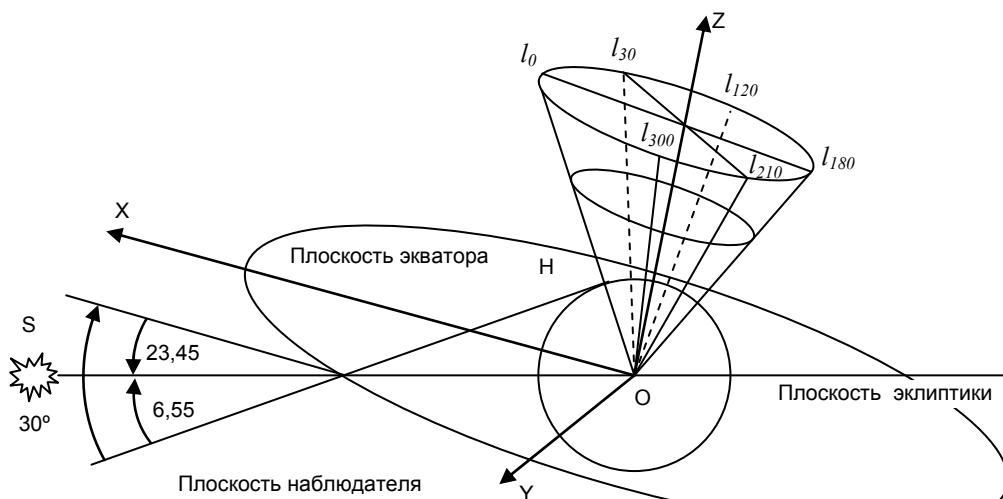


Рис. 1. Определение полуденной высоты Солнца

вокруг собственной оси против часовой стрелки, если смотреть на Северный полюс «сверху».

На данном рисунке показано взаимное положение Земли и Солнца (оно расположено слева на горизонтальной линии, находящейся в плоскости эклиптики), характерное для зимнего солнцестояния в северном полушарии. Полуплоскость эклиптики, в которой находится Солнце, находится ниже (знак минус) плоскости экватора. Угол между этими плоскостями, равен $23,45^\circ$. Плоскость наблюдателя, находящегося в точке H на широте 60° , пересекает плоскость экватора под углом, равным

$$90^\circ - \varphi_{\text{набл.}} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Максимальный угол подъема Солнца относительно плоскости наблюдателя в полдень составит $6,55^\circ = 30^\circ - 23,45^\circ$.

Вращение Земли приводит к последовательному приходу в плоскость рисунка (точка l_0 находится на гринвичском меридиане) точек l_{30} , l_{120} , l_{180} , l_{210} , l_{300} , $CIII$, показанных на рисунке 1. Указанным в качестве индексов значениям соответствует угол поворота Земли $\Delta\lambda$. Если основание конуса (перевернутого) опустить до соответствующей параллели на поверхности Земли, то этим точкам будут соответствовать координаты поверхности с одинаковой широтой, равной 60° , и долготами соответственно 0° , 30° з.д., 120° з.д., 180° , 150° в.д., 60° в.д.

Вычисление угла между рассматриваемыми направляющими единичными отрезками в прямоугольной системе координат согласно [2, стр. 139-141] производится по следующей формуле:

$$\cos(\beta) = X_C * X_H + Y_C * Y_H + Z_C * Z_H, \quad (3)$$

где X_C, Y_C, Z_C – проекции единичного вектора склонения Солнца на соответствующие оси;

X_H, Y_H, Z_H – проекции единичного вектора наблюдателя.

Проекции единичных векторов могут быть получены по формулам:

$$\begin{aligned} X_C &= \cos(\varphi_{\text{Солнца}}); & Y_C &= 0; \\ Z_C &= \sin(\varphi_{\text{Солнца}}); \\ D_{H_{XOY}} &= \cos(\varphi_H); & Z_H &= (\varphi_H); \\ X_H &= \cos(\varphi_H) * \cos(\lambda_H + \Delta\lambda); \\ Y_H &= \cos(\varphi_H) * \sin(\lambda_H + \Delta\lambda), \end{aligned} \quad (4)$$

где φ_H и λ_H – географические координаты наблюдателя;

$D_{H_{XOY}}$ – проекция вектора наблюдателя на плоскость экватора;

$\Delta\lambda$ – поворот Земли, вызванный ее вращением с угловой скоростью ω ;

$$\Delta\lambda = \omega * \Delta T;$$

$$\omega = 15^\circ / \text{час} = 0,25^\circ / \text{мин} = 15' / \text{мин} = 0,25' / \text{сек}.$$

Для удобства расчетов целесообразно пользоваться только положительными значениями аргумента $(\lambda_H + \Delta\lambda)$, т.е. в интервале $0^\circ - 360^\circ$, а для отрицательных значений широты φ_H (южного полушария) брать широту со знаком плюс, но при этом изменить знак склонения Солнца на противоположный.

Искомый **угол β** из найденного значения $\cos(\beta)$ получается путем вычисления его арккосинуса.

$$\beta = \arccos(\cos(\beta)). \quad (5)$$

На рисунке 2 в графическом виде показаны результаты расчетов указанного угла β , т.е. угла, образованного вектором, направленным на Солнце, и радиусом-вектором, проведенным в точку наблюдателя из центра Земли (нормалью к плоскости наблюдателя или плоскости го-

Угол с плоскостью наблюдателя на широте 60 градусов

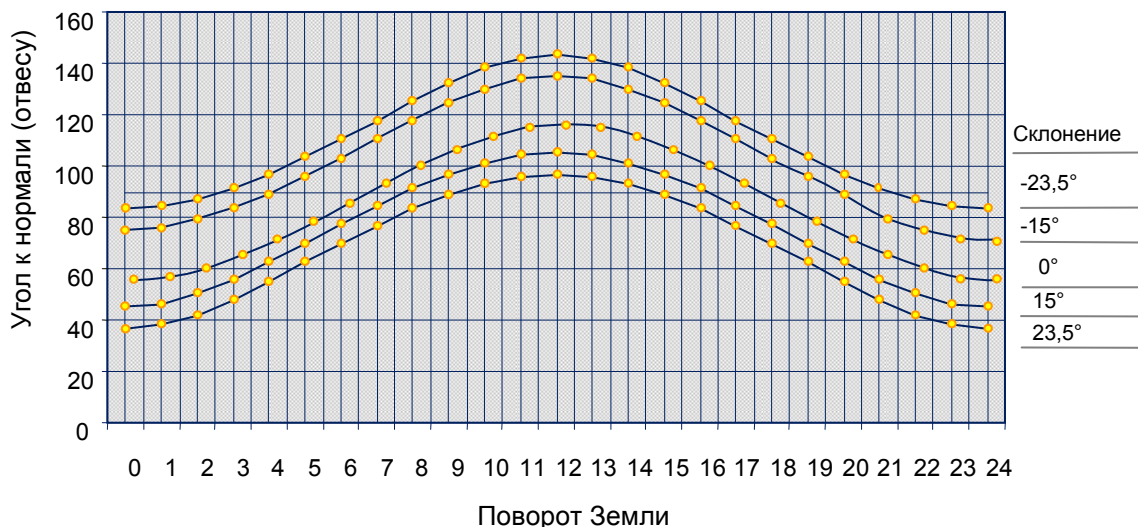


Рис. 2. Определение светлого времени суток на широте 60°

ризонта). Условием того, что Солнце находится строго в плоскости наблюдателя (т.е. в плоскости горизонта), является условие перпендикулярности к нормали этой самой плоскости (к первому единичному вектору). При этом угол $\beta=90^\circ$ и определяет переход Солнца через плоскость наблюдателя (горизонта), поэтому значению угла $\beta>90^\circ$ соответствует положение Солнца над плоскостью наблюдателя (Солнце выше горизонта – светлое время суток), а значению угла $\beta<90^\circ$ соответствует положение Солнца под плоскостью наблюдателя (Солнце ниже горизонта – темное время суток). Таким образом, **высота Солнца относительно горизонта** находится из условия:

$$\beta_{\text{Солнца}} = \beta - 90^\circ. \quad (6)$$

На рисунке 2 приведены результаты расчетов по определению текущего угла β и текущей высоты Солнца относительно горизонта (угла $\beta-90^\circ$) по приведенным выше зависимостям (2) ÷ (6). Расчеты выполнены с интервалом в один час в течение суток, т.е. для суточного оборота Земли. При этом каждому часу соответствует изменение угла поворота Земли $\Delta\lambda = \omega \cdot \Delta T$ на 15 градусов для использования в формулах (4) при расчете новых направляющих отрезков вектора наблюдателя.

На рисунке 2 приведено семейство кривых для широты наблюдателя 60° и для пяти различ-

ных значений склонения Солнца ($+23,5^\circ, +15^\circ, 0^\circ, -15^\circ, -23,5^\circ$). При этом высота Солнца относительно горизонта получается при использовании в качестве оси ОХ линии $Y=90^\circ$. В результате эта высота получает как положительные (днем), так и отрицательные (ночью) значения.

Для удобства восприятия по оси Х отложено время суток в часах. Каждому часу соответствует поворот Земли на $360/24=15$ градусов, т.е. долгота рассматриваемой точки ($\lambda_H + \Delta\lambda$) последовательно принимает значения, равные $0^\circ, 15^\circ, \dots, 360^\circ$ относительно Гринвичского меридиана, т.е. $\lambda_H = 0$. Самая нижняя кривая показывает график изменения высоты Солнца (угла $\beta-90^\circ$) в течение суток для самого короткого дня в период зимнего солнцестояния (склонение Солнца на 22 декабря $\varphi_{\text{Солнца}} = -23,45^\circ$). При этом высота Солнца над горизонтом определяется как разность между данной кривой и линией $Y=90$.

На рисунке 3 показаны графики изменения высоты Солнца в течение суток для различных значений широты наблюдателя ($\varphi_{\text{набл.}} = 0^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ$) для дней зимнего и летнего солнцестояния. Из графиков видно, что, во-первых, с увеличением широты наблюдателя ход кривых становится все более пологим. Это приводит к тому, что в день зимнего солнцестояния для $\varphi_{\text{Солнца}} = -23,45^\circ$ и для широты наблюдателя $\varphi_{\text{набл.}} = 80^\circ$ соответствующая кривая вообще не

Угол с плоскостью наблюдателя на широтах 0 - 80 градусов

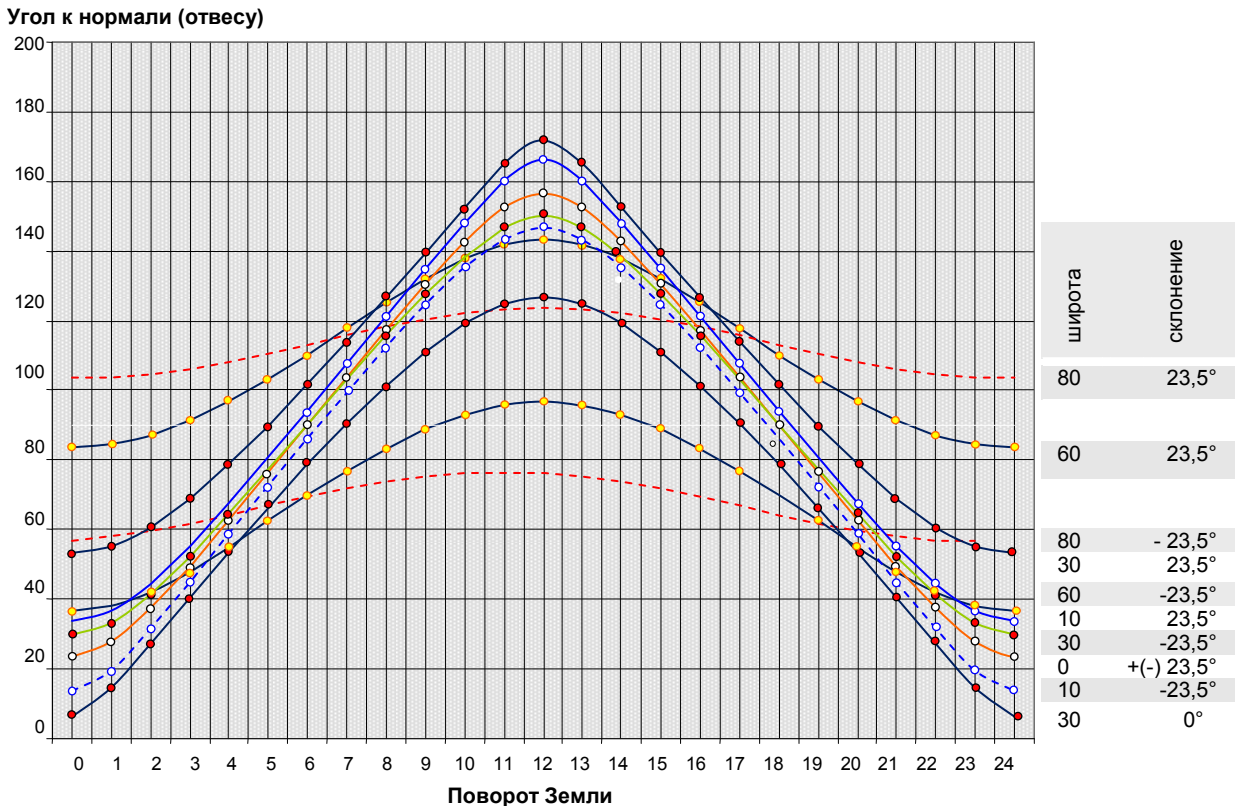


Рис. 3. Определение светлого времени суток на широтах $0^\circ - 80^\circ$

пересекает линию $Y=90^\circ$. Это говорит о том, что Солнце вообще не восходит над горизонтом, т.е. подтверждает факт полярной ночи.

Во-вторых, с увеличением широты наблюдателя ширина коридора увеличивается. И, наоборот, с уменьшением широты наблюдателя коридоры хода кривых для разных значений склонения Солнца все более сужаются. При широте наблюдателя $\varphi_{набл.}=0^\circ$ для любых значений склонения Солнца соответствующие им кривые вообще сливаются в одну линию, что означает одинаковую продолжительность светлого и темного времени суток (по 12 часов, восход 6^{00} , заход 18^{00}). Чем шире коридор (на высоких широтах), тем сильнее проявляется разница в продолжительности светлого и темного времени суток в летний и зимний периоды и, наоборот, на экваторе она исчезает.

3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ВОСХОДА И ЗАХОДА СОЛНЦА

Моменты **восхода и захода** Солнца являются абсциссами точек пересечения каждой из кривых горизонтали $Y=90$. Кроме того, по графику легко определяется продолжительность дня - участок кривой, расположенный **выше** горизонтали $Y=90$. В день зимнего солнцестояния (нижняя кривая на рисунке 2 $\varphi_{Солнца} = -23,45^\circ$) продолжительность дня составляет всего около 6 часов. В день летнего солнцестояния (верхняя кривая на рисунке 2 $\varphi_{Солнца} = +23,45^\circ$) - более 18 часов. В дни весеннего и осеннего равноденствия (средняя кривая $\varphi_{Солнца} = 0^\circ$) день продолжается ровно 12 часов. Из среднего графика также видно, что восход Солнца происходит ровно в 6 часов, а заход ровно в 18 часов по местному времени.

Для вычисления **моментов восхода и захода** предполагается циклическое с начальным интервалом 2-3 часа решение уравнений (3)+(5) с фиксацией факта смены знака в выражении (6). Определить моменты восхода и захода можно с любой точностью (вплоть до долей секунды),

например, методом деления отрезка, на котором происходит смена знака, пополам.

4 ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ МОМЕНТОВ ВОСХОДА И ЗАХОДА

Солнечные и звездные сутки - понятия разные. Соответственно различаются и понятия солнечного (истинного и среднего) и звездного времени, которое по своей сути первично по отношению к истинному. Отметим две основные причины неравномерности продолжительности солнечных суток.

Первая причина связана с тем, что Земля движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, и ее движение по ней происходит неравномерно. На участках орбиты, более близких к Солнцу, в силу законов Кеплера она движется быстрее, на более отдаленных участках - медленнее.

Вторая причина заключается в наклоне оси вращения Земли относительно плоскости ее орбиты. В день летнего солнцестояния она направлена на Солнце северной полуосью, в день зимнего солнцестояния - южной, в дни равноденствий - перпендикулярно направлению на Солнце.

Эти причины обуславливают то, что истинное и среднее солнечные времена, используемые нами в повседневной жизни, в разные дни расходятся между собой на различное число минут, достигающее в некоторые дни до 16. Только четыре раза в год оба времени совпадают: 15 апреля, 14 июня, 1 сентября и 24 декабря. Напротив, 12 февраля и 3 ноября разница между истинным и средним солнечными временами достигает наибольшей величины - около четверти часа. В разные дни года это расхождение меняется, что и показано на рисунке 4.

Следует отметить, что аналитическое решение уравнения времени носит достаточно сложный характер и выходит за рамки настоящей статьи, а непосредственное использование в практических расчетах приведенного на рисунке 4 графика неудобно. Поэтому в настоящей ста-

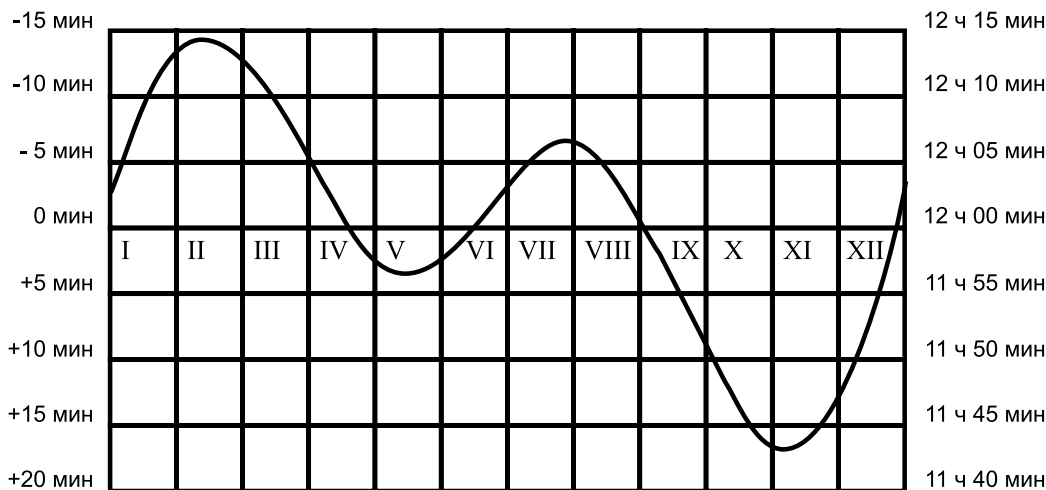


Рис. 4. График уравнения времени

тье предлагается использовать аппроксимацию данного графика с помощью набора математических функций. При анализе графика, представленного на рисунке 4, можно выделить 4 полуволны синусоидального вида, что позволяет в качестве аппроксимирующей функции



Рис. 5. Аппроксимация графика уравнения времени (без сдвига на +7)

выбрать $SIN(x)$. Однако разбиения графика на 4 части (по числу полуволн, имеющих различную амплитуду А) недостаточно в силу того, что большие полуволны несимметричны, т.е. имеют еще и разный период спада и возрастания (своих четвертей). Достаточная точность приближения может быть достигнута при разбиении графика на 6 частей: 2 малых полуволны и по две четверти на каждую большую.

Длительность периодов для разбиения графика на части определяется датами (порядковыми номерами) тех дней, в которые график уравнения времени пересекает ось X или достигает максимальных значений: 15/04, 14/06, 1/09, 24/12, 12/02, 3/11:

с 24/12 по 12/02 – 50 дней (31-24+31+12)

¼ от 50 → Δ=200;

с 12/02 по 15/04 – 63 дня (29-12+31+15)

¼ от 63 → Δ=252;

с 15/04 по 14/06 – 60 дней (30-15+31+14)

½ от 60 → Δ=120;

с 14/06 по 1/09 – 78 дней (30-14+31+31)

½ от 78 → Δ=156;

с 1/09 по 3/11 – 64 дня (30+31+3)

¼ от 64 → Δ=256;

с 3/11 по 24/12 – 51 день (30-3+24)

¼ от 51 → Δ=204.

При этом период функции SIN, обозначенный символом Δ, либо в 4 раза (для четвертей), либо в 2 раза (для полуволн) превышает указанные интервалы. Начало каждого нового участка сдвинуто относительно начала отсчета графика соответственно на 50, 113, 173, 251, 315 дней (начало графика - 24 декабря).

Семейство аппроксимирующих функций и коэффициенты для их описания приведены в таблице 2.

На рисунке 5 приведен график уравнения

времени, построенный по приведенным зависимостям и началом координат в Д1=0.

В случае использования коэффициентов А, В, d и Δ можно пользоваться одной формулой, в которой дополнительно учтен сдвиг на семь дней (+7) между началом нового календарного года (1 января) и началом графика (24 декабря – днем окончания зимнего солнцестояния). По аналогии с юлианским днем и текущим днем года, рассмотренными ранее, данный сдвиг достигается использованием вместо Д1 величины Д+7.

$$\Delta T = A * SIN((D+7-d)/\Delta * 2\pi + B),$$

где Д – порядковый номер дня в текущем году. Датам с 24.12 по 31.12 будут соответствовать дни с номерами -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0.

Таблица 2

Аппроксимирующие функции

| Вид функции | А | Δ | В | d | Условие |
|-------------------------------|-----|-----|-----|-----|---------|
| 14 SIN(Д1/200*2π) | 14 | 200 | 0 | 0 | Д≤50 |
| 14 SIN((Д1-50)/252*2π+π/2) | 14 | 252 | π/2 | 50 | Д≤113 |
| -4 SIN((Д1-113)/120*π2) | -4 | 120 | 0 | 113 | Д≤173 |
| 6 SIN((Д1-173)/156*π2) | 6 | 156 | 0 | 173 | Д≤251 |
| -16 SIN((Д1-251)/256*2π) | -16 | 256 | 0 | 251 | Д≤315 |
| -16 SIN((Д1-315)/204*2π+π/2)) | -16 | 204 | π/2 | 315 | Д≤366 |

Определенная поправка со своим знаком прибавляется к вычисленному ранее времени восхода и захода Солнца.

Решение данной задачи позволяет определить выполнение условий светлого времени и сумерек и может быть использовано при моделировании функционирования опико-электронных средств и сенсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астрономический ежегодник СССР на 1974 год. - Л.: Наука, 1972.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М., 1956.
3. Перельман Я.И. Занимательная астрономия. - М.: Наука, 1966.