УДК 517.977:531.36

А.С. Андреев[1], Е.И. Беликова

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Андреев Александр Сергеевич*, доктор физико-математических наук, профессор, окончил факультет прикладной математики и механики Ташкентского государственного университета. Декан факультета математики и информационных технологий, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета. Имеет статьи, учебные пособия, монографию в области теории устойчивости. [e-mail: andreevas@ulsu.ru].*

Беликова Елена Игоревна*, кандидат физико-математических наук, окончила механико-математический факультет Ульяновского государственного университета. Инженер-программист 1 категории ФНПЦ ОАО «НПО «Марс». Имеет статьи в области теории устойчивости. [e-mail: e.belikova@gmail.com].*

Аннотация

В работе исследуется задача управления общей нелинейной механической системой посредством декомпозиции на системы с одной степенью свободы. Полученный закон управления сравнивается по эффективности с управлениями, обеспечивающими стабилизацию на бесконечном интервале времени. Представлен алгоритм решения задачи о декомпозиции управления общей механической системы.

Ключевые слова: нелинейная механическая система, синтез управления, декомпозиция.

Abstract

The actual paper presents studies in control of general nonlinear mechanical system by means of decomposition into systems of the same degree of freedom. The obtained control law is compared by efficiency with controls ensuring stabilization within infinite time interval. The article suggests an algorithm for solution of task of control decomposition of general mechanical system.

Key words: nonlinear mechanical system, control synthesis, decomposition

Одной из центральных задач теории и практики управления остается проблема синтеза законов управления механическими системами. Основы решения этой задачи заложены в работах Н.Н. Красовского, В.В. Румянцева, А.М. Летова, Д.Е. Охоцимского, Ф.Л. Черноусько, Е.С. Пятницкого и их научных школ.

Одно из направлений исследований научной школы акад. Ф.Л. Черноусько посвящено методам управления сложными механическими системами. Особое внимание при этом уделяется декомпозиции сложных управляемых систем, построению управлений при неизвестных инерционных параметрах с учетом ограничений на управление и фазовые координаты, с приведением системы в терминальное состояние за конечный промежуток времени, динамике процесса управления [8–12].

Приведение управляемой системы в заданное терминальное состояние невозможно при непрерывных обратных связях. Е.С. Пятницким был предложен способ декомпозиции, при котором управляемая система приводится в заданное терминальное состояние управлением вида $U = -\mu \, sign\left(\dot{q} - \dot{q}(t)\right)$. При таком управлении замкнутая механическая система начинает двигаться в скользящем режиме так, что нелинейная многосвязная динамическая система высокого порядка через конечный интервал времени начинает двигаться в силу простейшей одномерной системы.

Усложнение структуры управляемых механических систем, повышение качества и надежности управления ими приводит к необходимости решения задач синтеза управления этими системами с учетом их нелинейности, нестационарности и многосвязности. Данная работа посвящена развитию задачи синтеза управления на основе декомпозиции к системам с одной степенью свободы.

Рассмотрим механическую систему с нестационарными голономными идеальными связями, положение которой определяется n обобщенными координатами $\boldsymbol{q}' = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, и, соответственно, кинетическая энергия системы

1 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00741) и программы РНПВШ Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/6194).

представляется в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0;$$

$$T_2(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}' A(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}; \quad T_1(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = B'(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}};$$

$$T_0(t,\mathbf{q}) = C(t,\mathbf{q}),$$

где $A(t,\mathbf{q})$ — матрица размерности $n\times n$ является положительно-определенной;

$B'(t,\mathbf{q})$ — матрица-столбец размерности;

$C(t,\mathbf{q})$ — скалярная функция;

$(\ )'$ — операция транспонирования.

Предполагаем, что функции переменных $(t,\ \mathbf{q})$ определены, непрерывно дифференцируемы в области $R^+\times\Gamma$,

$$\Gamma = \{\mathbf{q}\in R^n : \|\mathbf{q}\| < H, \quad 0 < H \le +\infty\},$$

где $\|\mathbf{q}\| = \max(|q_1|,|q_2|,...,|q_n|)$, т.е. являются достаточно гладкими функциями. К такому виду кинетической энергии приводимы задачи об управлении программными движениями механических систем.

Примем, что движение системы под действием управляющих сил $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ и других обобщенных сил (внешних, сил взаимодействия точек системы, трения и т.д.) $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ описывается уравнениями Лагранжа второго рода, которые с учетом вида кинетической энергии представляются в следующей форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{q}} + G\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{Q} + \mathbf{U}, \quad (1)$$

где матрица G определяется равенством

$$G(t,\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}}\right)' - \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}} = -G'.$$

Допустим, что при $\mathbf{q}=0$ действующие силы $\mathbf{Q}(t,0,0)$ таковы, что при всех $t\in R^+$ имеет место тождество

$$\mathbf{Q}(t,0,0) - \frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{q}}(t,0) - \frac{\partial B}{\partial t}(t,0) \equiv 0.$$

Тогда система (1) при $\mathbf{U}=0$ имеет положение относительного равновесия

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = 0, \quad \mathbf{q}(t) = 0.$$

Представим уравнения движения (1) в следующем виде

$$A(t,\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{Q}}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{U}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \quad (2)$$

где выделены члены, содержащие $\ddot{\mathbf{q}}$ и управление $\mathbf{U}$, а через $\tilde{\mathbf{Q}}$ обозначены все остальные составляющие.

Пусть

$$\dot{q}_i = f_i(t,q_i), \quad f_i(t,0) = 0 \quad (i=\overline{1,n}) \quad (3)$$

есть выбранный закон движения системы по каждой координате в отдельности, по которому система приводится в положение равновесия $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}(t) = 0$ за конечный или бесконечный промежуток времени.

Допустим, что этот закон движения реализуется при допустимом управлении

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \quad \|\mathbf{U}_0\| \le \mu_0.$$

Рассмотрим задачу синтеза управления, состоящую в определении управления $\mathbf{U} = (U_1,U_2,...,U_n)'$, $U_i = U_i(t,q_i,\dot{q}_i)$ $(i=\overline{1,n})$, при котором движения из области Γ_0,

$$\Gamma_0 = \{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in R^n\times R^n : \|\mathbf{q}\| \le \alpha_0, \|\dot{\mathbf{q}}\| \le \beta_0\}$$

$(\alpha_0,\beta_0 > 0)$, попадают на множество движений $\Gamma_1 = \{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in\Gamma_0 : \dot{q}_i - f_i(t,q_i) = 0\}$ за конечный промежуток времени.

Такая постановка относится к принципу декомпозиции в задачах управления механическими системами [5-6, 8-12].

Относительно величин, входящих в уравнения (2), будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) управление $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ есть измеримая ограниченная функция для $(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in R^+\times\Gamma_0$, составляющая $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ — непрерывна, ограничена для $(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in R^+\times\Gamma_0$ и такая, что

$$\|\tilde{\mathbf{Q}}\| \le \mu_2; \quad (4)$$

2) инерционная матрица $A(t,\mathbf{q})$ для $(t,\mathbf{q})\in R^+\times\Gamma_2$ $(\Gamma_2 = \{\|\mathbf{q}\| \le \alpha_0\})$ удовлетворяет неравенствам

$$\|A\| \le a_0, \quad \left\|\frac{\partial A}{\partial t}\right\| \le a_1, \quad \left\|\frac{\partial A}{\partial q_i}\right\| \le a_2, \quad (i=\overline{1,n}), \quad (5)$$

где $a_0, a_1, a_2 = const > 0.$

Относительно функции f_i из (3) будем дополнительно предполагать, что при $(t,\mathbf{q})\in R^+\times\Gamma_2$ она удовлетворяет неравенствам

$$\left|f_i\right| \le f_0, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial t}\right| \le \nu_1, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\right| \le \nu_2. \tag{6}$$

Введем класс функций типа Хана:

$h \in K$, если $h: R^+ \to R^+$ есть непрерывная, строго монотонно возрастающая функция со значением $h(0)=0$. Определим подкласс $K_1 \subset K$ такой, что если $h \in K_1$, то при $a>0$ выполняется неравенство

$\int\limits_0^a h^{-1}(\tau)d\tau < +\infty$, т.е. интеграл сходится.

Имеет место следующий результат.

Результат 1. Пусть (3) есть закон движения, при котором положение равновесия $\dot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{q}(t)=0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\{(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q}): \dot{q}_i - f_i(t,q_i)=0\}$. Тогда под действием управления

$$\mathbf{U} = \begin{cases} (U_1, U_2, ..., U_n)', \ U_i = -\mu_1 sign(\dot{q}_i - f_i(t,q_i)) \\ \qquad\qquad\qquad npu\ (\dot{q}, q) \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_1, \\ \mathbf{U}_0(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\ npu\ (\dot{q}, q) \in \Gamma_1, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 > \mu_0 + \mu_2 + na_0(\nu_1 + n\nu_2\beta) + \\ + n^2(\beta + f_0)(a_1 + na_2\beta), \end{aligned} \tag{8}$$

положение равновесия $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}=0$ является равномерно асимптотически устойчивым, а каждое ограниченное движение $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$ системы (1) при некотором $t=t_0+T$, $T>0$, попадает на множество $\{\dot{q}_i - f_i(t,q_i)=0\}$ и несвязанным образом, по каждой координате q_i, продолжает движение по закону (3), неограниченно приближаясь при $t \to +\infty$ к положению $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}=0$.

Если же движения, начинающиеся на множестве Γ_1, попадают в положение равновесия $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}=0$ за конечный промежуток времени, то управление (7) решает задачу синтеза на конечном отрезке времени.

Для вывода результата рассмотрим функцию Ляпунова следующего вида:

$$V = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}(t,\mathbf{q}))' A(t,\mathbf{q})(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}(t,\mathbf{q})),$$

$$\mathbf{f}' = (f_1, f_2, ..., f_n).$$

В силу определенной положительности и ограниченности матрицы A функция V является определенно-положительной и допускает бесконечно малый высший предел по переменной $\zeta = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}(t,\mathbf{q})$

$$\nu_1\|\zeta\|^2 \le V \le \nu_2\|\zeta\|^2, \quad 0<\nu_1<\nu_2.$$

Для производной функции V в области $R^+ \times \Gamma_1$ имеем следующую оценку

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f})' A(\ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{f}}) + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f})' \times \\ &\times \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \left\{\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right\}\right)(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}) = \\ &= (\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f})'(\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{U} - A\dot{\mathbf{f}}) + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f})' \times \\ &\times \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \left\{\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right\}\right)(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}) = \\ &= (\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f})'\left(\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{U} - A\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}\right)'\dot{\mathbf{q}}\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f})'\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \left\{\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right\}\right)(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}) \le \\ &\le \|\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}\| n(-\mu_1 + \mu_2 + na_0(\nu_1 + n\nu_2\beta)) + \\ &+ \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}\|^2 n^2(a_1 + na_2\beta) \le \\ &\le \|\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}\| n(-\mu_1 + \mu_2 + na_0(\nu_1 + n\nu_2\beta) + \\ &+ n^2(\beta + f_0)(a_1 + na_2\beta)) \le \\ &\le -\mu_0\|\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}\| = -\mu_0\|\zeta\|, \end{aligned}$$

если для величин μ_2, ν_1, ν_2, f_0, a_0, a_1, a_2 из соотношений (4)–(6) выполнено неравенство (8) или имеет место оценка

$$\dot{V} \le -\mu_0\|\zeta\| = -\frac{\mu_0}{\sqrt{\nu_2}}\sqrt{\nu_2}\|\zeta\| \le -\frac{\mu_0}{\sqrt{\nu_2}}\sqrt{V}.$$

Так как функция $h(a)=\sqrt{a} \in K_1$, то имеем выполнение всех условий теорем из работы [1], откуда следует искомый результат.

Замечание 1. Последний результат можно вывести и при невыполнении последнего условия (6), например, для функции $f(q) = -\sqrt[2k+1]{q^{2r_0+1}}$, $1<k<r_0$, или функции $f(q) = -\|q\|^{\alpha} sign\, q$, $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$.

Замечание 2. Пусть управление $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, реализующее заданное движение (3), представляется в виде

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0^1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{U}_0^2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

где $\mathbf{U}_0^1$ и $\mathbf{U}_0^2$ — соответственно известные и неизвестные составляющие $\mathbf{U}_0$.

Составляющая $\mathbf{U}_0^2$ может быть отнесена к воздействию $\tilde{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Соответственно, результат 1 имеет место, когда в (7) $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0^1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, и в самом частном случае, $\mathbf{U}_0 \equiv 0$.

Эффективность полученного решения задачи синтеза рассмотрим на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим задачу о стабилизации положения равновесия перевернутого математического маятника, движение которого описывается известным уравнением

$$\ddot{\varphi} = k \sin\varphi + U, \quad k = const > 0, \tag{9}$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикальной оси, направленной вверх;

U — приложенный управляющий момент.

Согласно результату 1 и замечанию 2 задача приведения маятника в положение равновесия $\dot{\varphi} = \varphi = 0$ решается моментом

$$U = -\mu sign(\dot{\varphi} - f(t, \varphi)), \quad \mu \geq k, \tag{10}$$

где $f = f(t, \varphi)$ есть функция, при которой нулевое решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ либо равномерно асимптотически устойчиво, либо решение этого уравнения $x = x(t, t_0, x_0)$, $\|x_0\| < \delta$, попадает в точку $x = 0$ за конечный промежуток времени.

Пусть $k = 1$. Проведем численный анализ процесса приведения маятника в положение $\dot{\varphi} = \varphi = 0$ моментом, построенным по закону (7), при значениях

$$\mu = 1, \quad f = -\sqrt[3]{\varphi^5} \tag{11}$$

и моментами, определяемыми классической теоремой из [3] на основе линейного приближения и новой теоремой из [2] в нелинейном виде.

Моделирование процесса управления (9)—(10) представлено на рисунках 1 и 2.

Согласно общему методу [3] задачу о стабилизации в малом системы (9) решает такой момент

$$U_1 = -0{,}1\dot{\varphi} - 1{,}2\varphi, \tag{12}$$

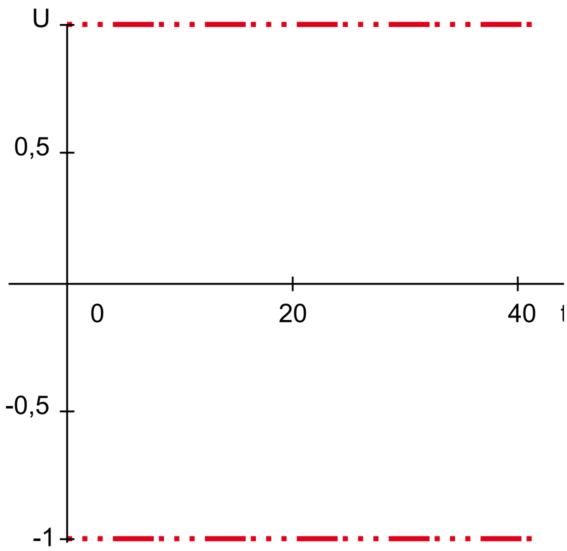
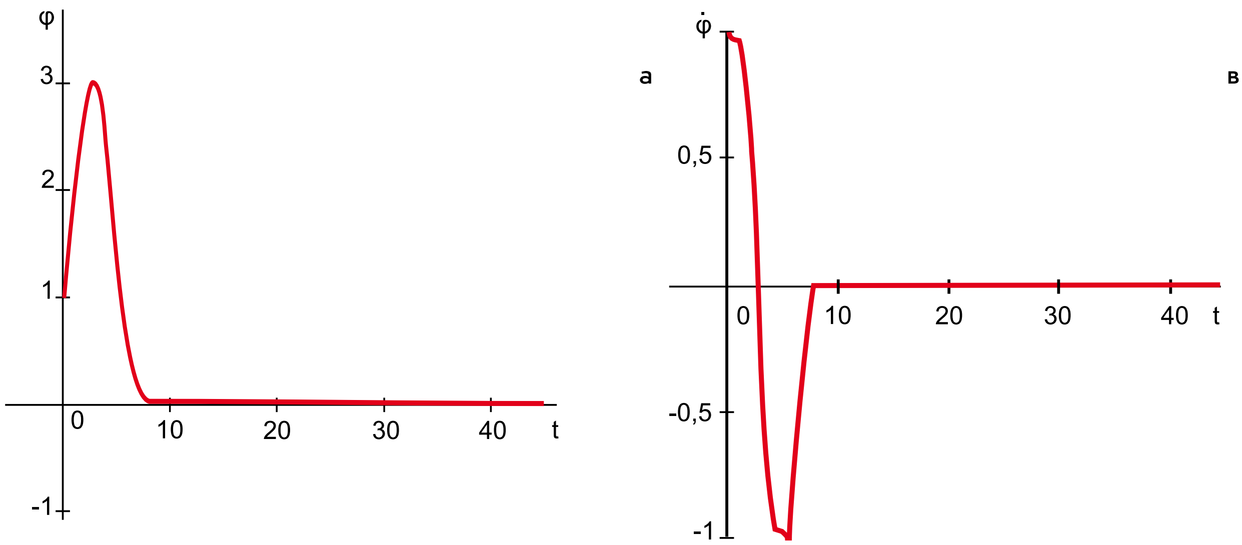


Рис. 1. Изменение управления U во времени



а б

Рис. 2. Изменение угла отклонения φ (а) и угловой скорости $\dot{\varphi}$ (б) маятника во времени при начальных условиях $\varphi_0 = 1$ рад, $\dot{\varphi}_0 = 1$ рад/с для управляющего момента U

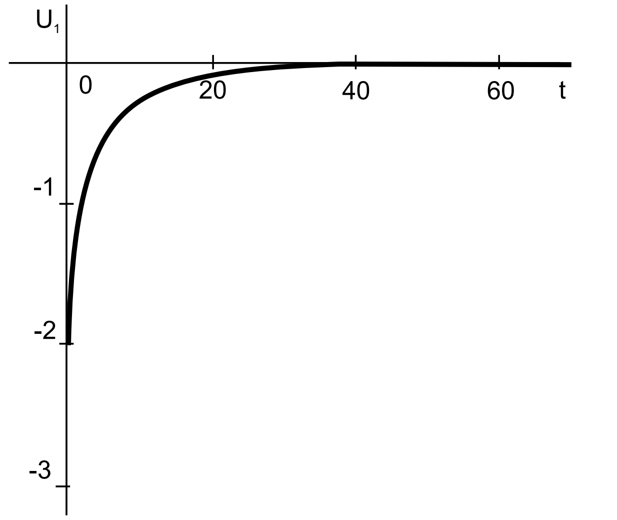
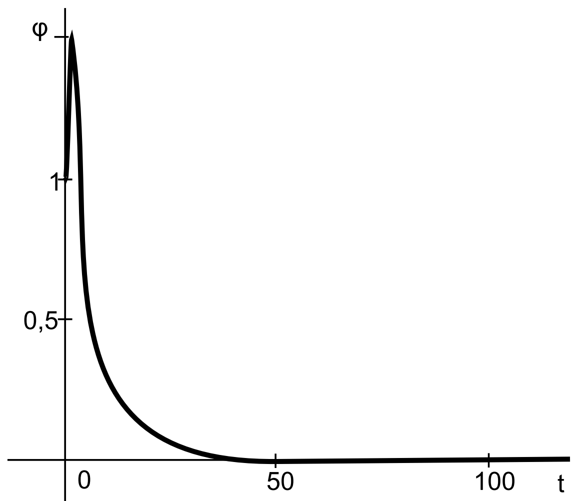
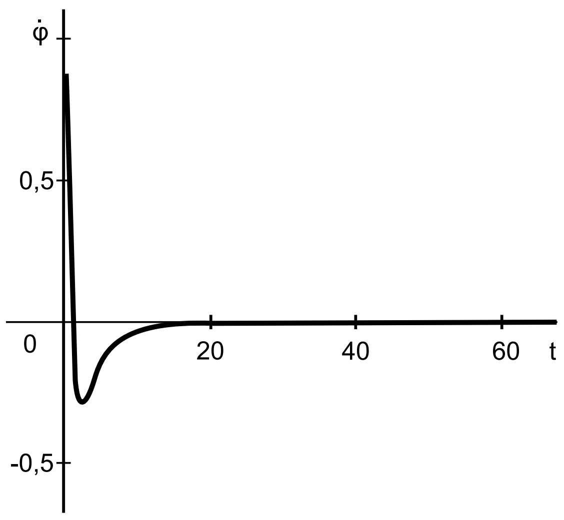


Рис. 3. Изменение управления U_1 во времени



а



б

Рис. 4. Изменение угла отклонения φ (а) и угловой скорости $\dot{\varphi}$ (б) маятника во времени при начальных условиях $\varphi_0 = 1$ рад, $\dot{\varphi}_0 = 1$ рад/с для управляющего момента U_1

соответствии с работой [2] задачу о стабилизации положения равновесия $\dot{\varphi} = \varphi = 0$ в большом решает момент

$$U_2 = -1{,}1\left(\dot{\varphi} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (13)$$

Моделирование процесса приведения маятника в окрестность $\{(\dot{\varphi},\varphi) : |\dot{\varphi}| \le 0.001, |\varphi| \le 0.001\}$ точки $\dot{\varphi} = \varphi = 0$ при управлениях (12) и (13) показано на рисунках 3—4 и рисунках 5—6 соответственно.

Сравнительный анализ представленных законов показывает не только преимущества способов управления (10) с точки зрения быстродействия, но и недостатки: сложную технику реализации этих управлений, требующих большое количество переключений. Преимущество (13) перед (12) и (10) состоит в значительно большей области стабилизируемости [2]: для всех движений, если угол φ замерять по $mod\, 2\pi$.

Пример 2. Рассмотрим перевернутый математический маятник, точка подвеса которого находится на подвижном основании. В этом случае уравнение управляемого движения маятника может быть записано в следующем виде

$$\ddot{\varphi} = g(t)\sin\varphi + U.$$

Управление вида (13) в этом случае не гарантирует стабилизацию.

Приведение в точку $\dot{\varphi} = \varphi = 0$ в большом возможно при управлении вида

$$U = -\mu_1 sign\left(\dot{\varphi} + \varphi^{\alpha} sign\varphi\right),$$

$$\mu_1 > \max_{t\ge 0} |g(t)| = g_0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Стабилизация этого положения равновесия в малом возможна управляющим моментом

$$U = -k_1\dot{\varphi} - k_2\varphi, \quad k_2 > g_0.$$

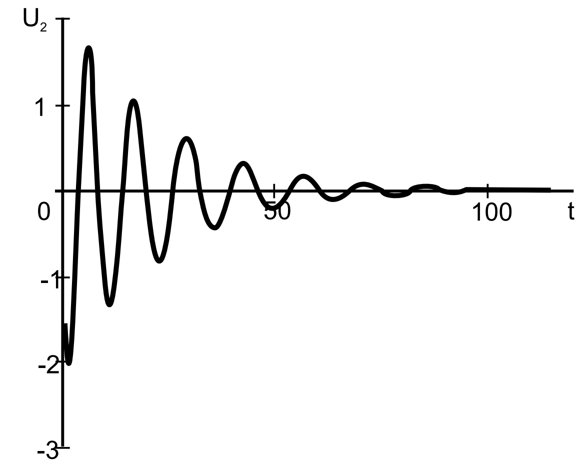
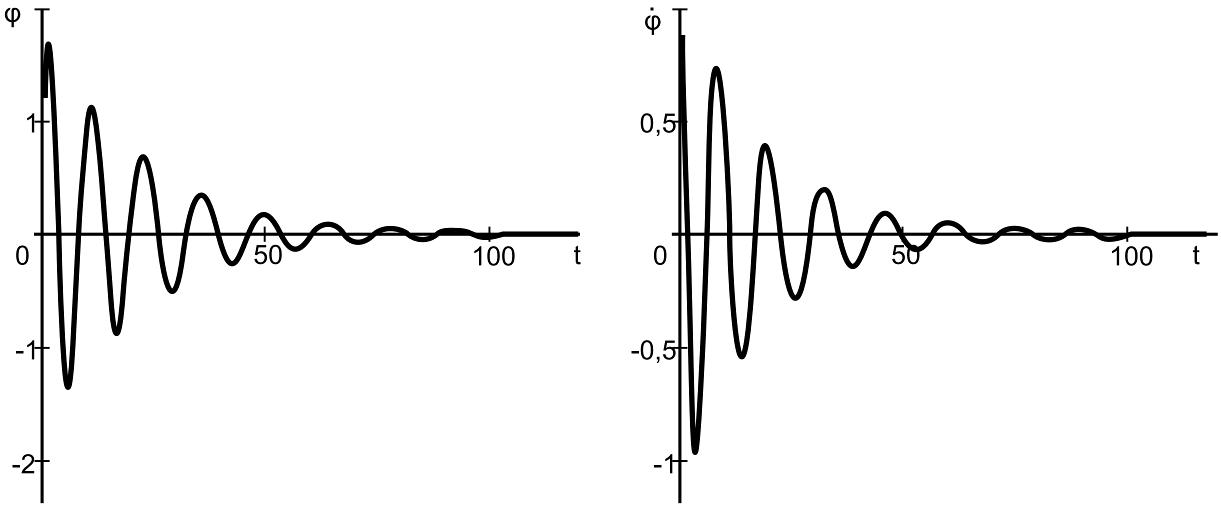


Рис. 5. Изменение управления U_2 во времени



а б

Рис. 6. Изменение угла отклонения φ (а) и угловой скорости $\dot{\varphi}$ (б) маятника во времени при начальных условиях $\varphi_0 = 1$ рад, $\dot{\varphi}_0 = 1$ рад/с для управляющего момента U_2

Моделирование процесса в случае $g(t) = 0,5(1 + sin\,t)$ при различных начальных отклонениях для управляющего момента $U = -sign(\dot{\varphi} + \sqrt[3]{\varphi^5})$ показано на рисунке 7.

Проведенное численное моделирование подтверждает утверждение о том, что построенный ограниченный управляющий момент, в отличие от линеаризованного, обеспечивает решение задачи при больших начальных возмущениях.

На основании полученных результатов может быть представлен следующий алгоритм решения задачи о декомпозиции управления общей механической системы, описываемой уравнениями (1):

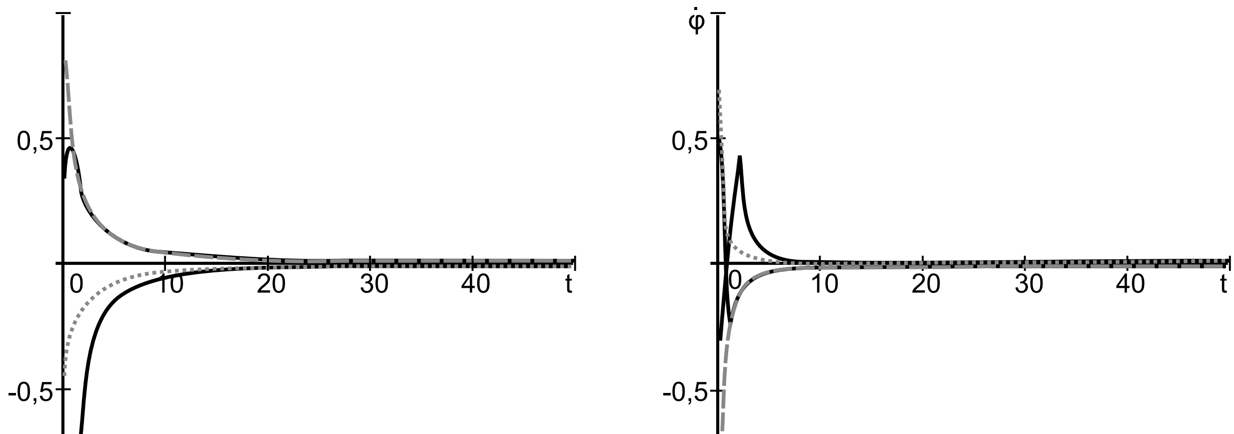
1. выбор закона движения (3) для каждой из обобщенных координат с точки зрения оптимального решения задачи;

2. анализ управления $\mathbf{U}_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, обеспечивающего движение по законам (3);

3. нахождение параметров управления вида (7), исходя из параметров системы, величины действующих неуправляющих сил $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и управляющих сил $\mathbf{U}_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$;

4. моделирование процесса управления на ЭВМ с целью анализа допустимости скользящего режима управления [7].

С помощью математической системы Mathcad 14.0 проводится исследование динамики переходных процессов – построение графиков $q_i(t)$ и $\dot{q}_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ как функций времени t, $t \in [0, T]$.



а б

Рис. 7. Изменение угла отклонения φ (а) и угловой скорости $\dot{\varphi}$ (б) маятника во времени при различных начальных условиях

Покажем эффективность выбранного алгоритма на примере моделирования управляемого движения следующей системы с двумя степенями свободы.

Пример 3. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, представляющую собой маятник с грузом, перемещающимся вдоль этого маятника, где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника длины l и массы m_1 от вертикали; x — перемещение груза массой m_2 вдоль маятника; c — коэффициент вязкого трения.

Выражения для кинетической T и потенциальной энергии Π имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l - x)^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = -\frac{1}{2} m_1 l \left(1 - \cos\varphi\right) -$$

$$- \frac{1}{2} m_2 \left(l - x\right)\left(1 - \cos\varphi\right) + \frac{1}{2} c x^2.$$

Уравнения движения в форме Лагранжа

$$\ddot{x} + (l - x)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) + \frac{c}{m_2} x = \frac{U_x}{m_2},$$

$$g_1(x)\ddot{\varphi} - 2m_2(l - x)\dot{x}\dot{\varphi} - \frac{1}{2} g_2(x)\sin\varphi = U_\varphi,$$

$$g_1\left(x\right) = m_1 l^2 + m_2\left(l - x\right)^2,$$

$$g_2\left(x\right) = m_1 l + m_2\left(l - x\right).$$

Пусть $x = x_0(t)$, $\varphi = \varphi_0(t)$ есть заданное программное движение маятника с грузом.

Согласно результату 1 и замечаниям 1 и 2 задача о приведении системы в заданное программное движение может решаться управлением вида

$$U_1 = -\mu_1 sign\left(\dot{y}_1 - f_1\left(t, y_1\right)\right),$$

$$U_2 = -\mu_2 sign\left(\dot{y}_2 - f_2\left(t, y_2\right)\right),$$

$$y_1 = x - x_0(t), \quad y_2 = \varphi - \varphi_0(t)$$

при соответствующих значениях коэффициентов μ_1 и μ_2.

Рассмотрим решение этой задачи на основе управления

$$U_{y_1} = -\mu_1 sign(\dot{y}_1 + \sqrt{|\,y_1\,|}\, sign\, y_1),$$

$$U_{y_2} = -\mu_2 sign(\dot{y}_2 + \sqrt{|\,y_2\,|}\, sign\, y_2).$$

Зададим параметры системы

$m_1 = 8$ *кг*; $m_2 = 10$ *кг*; $l = 1$ *м*; $c = 10$ *Н/м*

и начальные возмущения

$y_{10} = 0{,}5$ *м*; $\dot{y}_{10} = 0{,}5$ *м/с*;

$y_{20} = -0{,}5$ *рад*; $\dot{y}_{20} = -0{,}5$ *рад/с*.

Определим программное движение в виде законов

$$x_0\left(t\right) = a \sin\omega_1 t, \quad \varphi_0\left(t\right) = b \sin\omega_2 t;$$

$$a = 1; \quad b = 2; \quad \omega_1 = 0{,}5; \quad \omega_2 = 0{,}3.$$

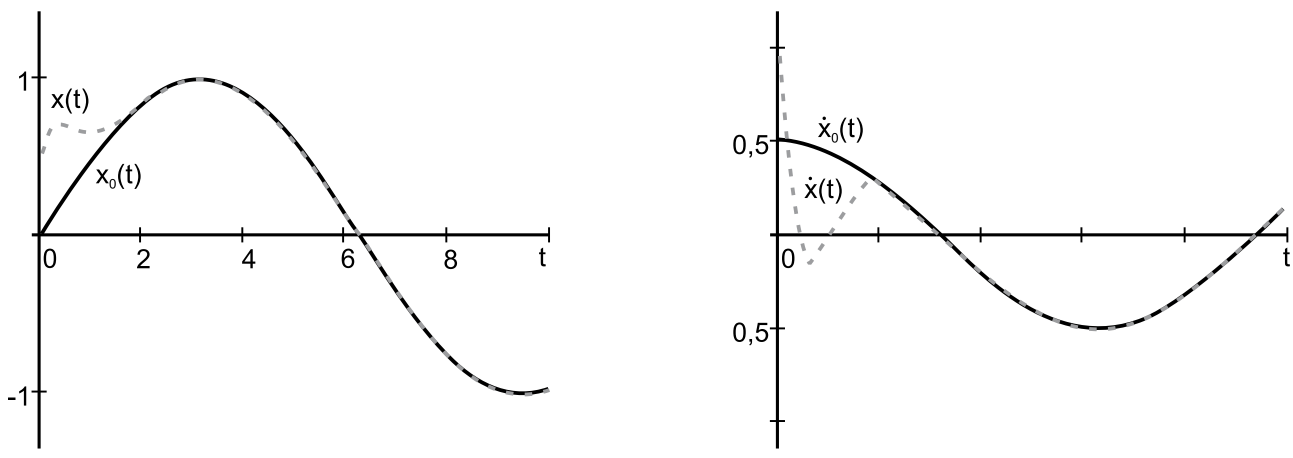
На основании результата 1 находим следующие значения для коэффициентов μ_1 и μ_2

$$\mu_1 = 25, \quad \mu_2 = 95.$$

Результаты компьютерного моделирования движения системы с двумя степенями свободы представлены на графиках (рис. 8–9).

Основные результаты:

- предложена новая форма декомпозиции задачи о синтезе управления в нелинейной механической системе с приведением движения к заданному закону по каждой координате отдельно, т.е. в виде одномерных невзаимодействующих подсистем;



а б

Рис. 8. Изменение истинного $x(t)$ и программного $x_0(t)$ перемещения (а), истинной $\dot{x}(t)$ и программной $\dot{x}_0(t)$ скорости груза во времени (б)

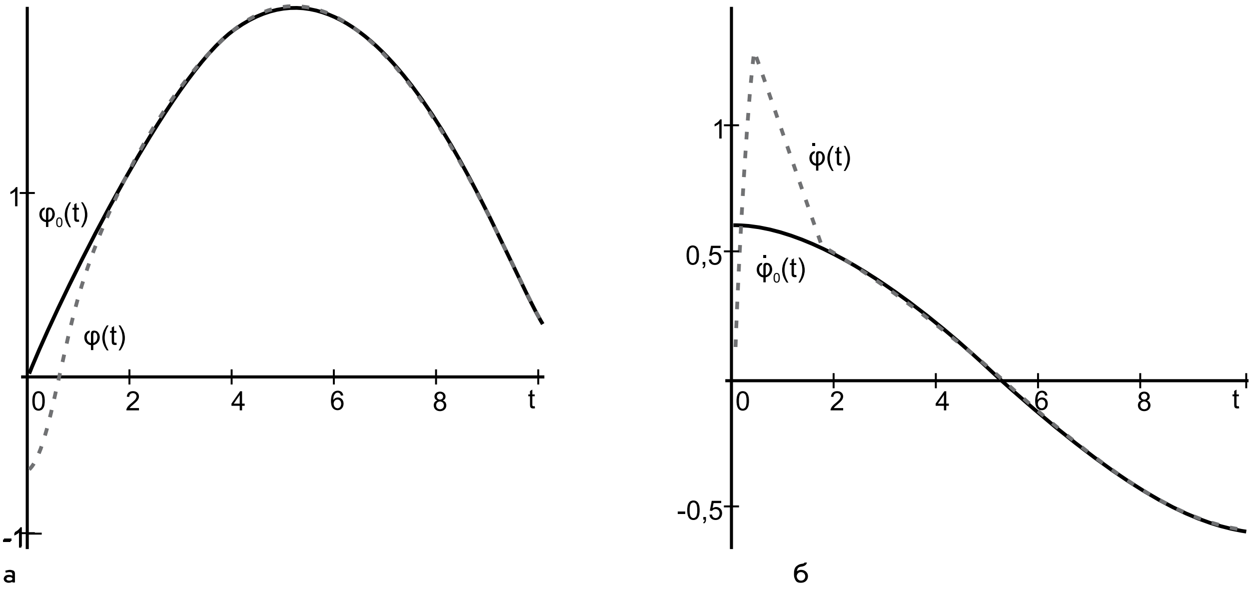


Рис. 9. Изменение истинного $\varphi(t)$ и программного $\varphi_0(t)$ угла отклонения (а), истинной $\dot{\varphi}(t)$ и программной $\dot{\varphi}_0(t)$ угловой скорости маятника во времени (б)

- представлен алгоритм решения задачи приведения системы в заданное программное движение за конечный промежуток времени;

- на примере управления механической системой с двумя степенями свободы показана эффективность разложения механической системы на подсистемы.

Полученные результаты дополняют результаты работ, представленных в монографиях [4, 12] и целом ряде предшествующих работ этих авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А.С., Беликова Е.И. Метод знакопостоянных функций Ляпунова в задачах о стабилизации и синтезе управления для нелинейной управляемой системы // Автоматизация процессов управления. — 2009. — № 1(15). — С. 65—72.

2. Андреев А.С., Ким Е.Б. Об оптимальной стабилизации установившегося движения управляемой системы // Механика твердого тела. — ИПМН НАН Украины (Донецк). — 2004. — Т. 34. — С. 119—126.

3. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Теория устойчивости движения. Доп. 4. — М.: Наука, 1966. — С. 475—514.

4. Матюхин В.И. Универсальные законы управления механическими системами. — М.: МАКС Пресс, 2001. — 252 с.

5. Пятницкий Е.С. Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1987. — № 3. — С. 92—99.

6. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН РФ. — 1988. — Т. 300. — № 2. — С. 300-303.

7. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981. — 368 с.

8. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. — 1990. — Т. 54. — Вып. 6. — С. 883—893.

9. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1990. — № 6. — С. 64—82.

10. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1995. — Т. 211. — С. 457—472.

11. Черноусько Ф.Л. Управление системой с одной степенью свободы при сложных ограничениях // ПММ. — 1999. — Т. 63. — Вып. 5. — С. 707—715.

12. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 328 с.