УДК 519.87

М.Ф. Гильванов

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МЕТОДОМ ЯКОБИ С ПЕРЕМЕННОЙ РАЗРЯДНОСТЬЮ

***Гильванов Марат Фаритович**, окончил факультет информационных систем и технологий Ульяновского государственного технического университета, аспирант кафедры ВТ ТТИ ЮФУ. Начальник научно-исследовательского отделения ФНПЦ ОАО «НПО «Марс». Имеет статьи, изобретения в области разработки автоматизированных систем и комплексов управления. [e-mail: mars@mv.ru].*

Аннотация

Рассматриваются возможности повышения скорости сходимости вычисления собственных значений и собственных векторов методом Якоби. Метод основан на изменении разрядности исходных переменных при приближении к устойчивому состоянию. В целом выигрыш оказывается существенным по отношению к прямой реализации.

Ключевые слова: итерационный процесс, метод Якоби, переменная разрядность, устойчивость.

Abstract

The article deals with possible increase of rate of convergence of eigenvalue and eigenvector calculation by Jacobi method. The method is based on change of capacity of original variables in case of stable-state approximation. In general, the suggested method is more advantageous with respect to direct implementation.

Key words: iteration process, Jacobi method, variable capacity, stability.

Высокая вычислительная сложность определения собственных значений и собственных векторов методом Якоби поставила вопрос о возможности использования вычислений с переменной разрядностью [1] для снижения вычислительных затрат данного метода. Метод Якоби, как и всякий итерационный процесс, использует последовательность преобразований подобия (т.н. вращения), в результате чего на каждом шаге алгоритма происходит непрерывное уточнение величин собственных значений и собственных векторов исходной матрицы. При использовании вычислений только с фиксированной разрядностью оказывается, что погрешность результата становится сравнимой с минимально возможной погрешностью для данной разрядной сетки только на последних итерациях алгоритма. В этом случае, особенно в начале вычислений (т.е. на первых итерациях), погрешность результата существенно превосходит минимальную. В связи с этим было бы желательно изменять разрядность вычислений от минимальной в начале работы алгоритма до максимальной в конце. Этот прием поможет не только снизить вычислительные затраты, но и поставить оптимальным образом погрешность результата в соответствие с погрешностью представления исходных данных.

Поэтому, было бы желательно на начальных этапах вычислений использовать меньшую разрядность, например, 4, 8 или 16 бит, а разрядность 32 бита использовать на последних этапах алгоритма для уточнения результатов решения.

Вначале необходимо определить устойчивость итерационного процесса и оценить погрешность вычислений. В условиях влияния ошибок округления элементы матрицы на каждом шаге вычислительного процесса будут известны лишь приближенно, поэтому необходима оценка устойчивости решения, получаемого в результате применения метода Якоби. Для этого можно использовать дифференциальные оценки вида: для матрицы — dA, собственных векторов — dx и собственных значений — $d\lambda$. Матрица представляется в виде $A+dA$,

где A — истинная матрица;

dA — матрица погрешностей.

Собственные векторы представляются в виде $x+dx$, а собственные значения — в виде $\lambda + d\lambda$. Основное соотношение между всеми величинами записывается как [2]:

$Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Рассмотрим dA, dx и $d\lambda$ как дифференциалы, тогда

$$dx_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\left(dA\cdot x_i, v_j\right)}{\left(\lambda_i - \lambda_j\right)\cdot\left(x_j, v_j\right)}\cdot x_j,$$

$$|d\lambda_i| \le \frac{\|dA\| \cdot |x_i| \cdot |v_i|}{|(x_i, v_i)|} = c_i \cdot \|dA\|,$$

где $c_i = \frac{|x_i| \cdot |v_i|}{|(x_i, v_i)|}$ — коэффициент перекоса матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i.

Изменение λ_i при заданной погрешности $||dA||$может быть тем больше, чем больше соответствующий ему коэффициент перекоса. Для нормальных матриц, у которых выполняется соотношение

$$N^2(A) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2,$$

где $N^2(A)$ — сферическая норма (такой является диагональная матрица на выходе метода Якоби), имеет место соотношение $x_i = v_i$, и для них погрешность собственных значений составляет $|d\lambda_i| \le ||dA||$, и задача определения собственных значений наиболее устойчива. Задача определения собственных векторов может быть неустойчивой только тогда, когда велик коэффициент перекоса или имеются близкие собственные значения.

Теперь необходимо оценить теоретическую эффективность применения вычислений с переменной разрядностью. Для оценки выигрыша по времени в результате использования вычислений с переменной разрядностью необходимо оценить количественную долю операций с той или иной разрядностью в общем потоке вычислений. Поскольку в данном случае граничным пределом является разрядность 32 бита, то в начале алгоритма будет использоваться разрядность 8 бит, далее — 16 бит и в конце — 32 бита. Количество итераций, которые будут выполнены при разрядностях 8, 16 и 32 бита, будет, очевидно, различным, определим их как it8, it16 и it32 соответственно. Экспериментально была получена формула для вычисления количества итераций в зависимости от порядка n, евклидовой нормы исходной матрицы $||g||_E$, разрядности и требуемой точности:

$$it = -k \cdot \lg \Delta_{eig} \cdot \left(n \cdot \|g\|_E\right)^{1,425}.$$

Данная формула была получена для вычислений с фиксированной разрядностью и использоваться для вычислений с переменной разрядностью не может, поскольку из априорных оценок следует, что общее количество итераций при вычислениях с переменной разрядностью должно быть меньше, чем при фиксированной разрядности. Это происходит из-за того, что метод вращений Якоби, как и любой другой итерационный процесс, использует процедуру последовательного уточнения результата, полученного уже на первой итерации алгоритма. Применение на первых итерациях разрядности 8 бит позволит достаточно быстро, за 8 итераций, найти первое приближение (т.н. «низкочастотная компонента результата») для всех собственных значений исходной матрицы из-за того, что погрешность выше, чем при разрядности 32 бита, и, соответственно, больше интервал дискретизации (или шаг приращения).

После выполнения условия на окончание вычислений с разрядностью 8 бит осуществляется переход на разрядность 8+8 бит. В этом режиме с уже меньшим шагом приращения последовательно уточняются найденные на предыдущих итерациях результаты (т.н. «среднечастотная компонента результата»). Количество итераций равно it16, и оно меньше, чем it8. Аналогично осуществляется переход и на разрядность 32 бита. Здесь находится окончательное решение (т.н. «высокочастотная компонента результата») за число итераций it32, которое из-за еще большего уменьшения шага приращения не превосходит величину it16.

Далее, для определения выигрыша по времени, необходимо оценить соотношение между количеством итераций при разрядностях 8, 16 и 32 бита, т.е. найти пропорцию вида it8:it16:it32. Оценочной характеристикой обрабатываемой матрицы A будет служить ее евклидова норма, представленная с точки зрения выходного результата в виде: $\|A\|_E + \|dA\|_E$,

где $\|A\|_E$ — евклидова норма истинной матрицы;

$\|dA\|_E$— евклидова норма матрицы погрешностей.

При расчете можно считать, что норма истинной матрицы не изменяется в процессе вычислений, а норма матрицы погрешностей постепенно уменьшается. Очевидно, после окончания вычислений с разрядностью 8 бит элементы матрицы dA не превосходят величины погрешности, т.е. 2^{-8} после вычислений с разрядностью 16 бит — не более 2^{-16} и в конце вычислений с разрядностью 32 бита — не более 2^{-32} В этом случае для матрицы порядка $n = 10$ норма матрицы погрешностей $\|dA\|_E$ будет составлять: $n \cdot 2^{-8}$— для 8 бит, $n \cdot 2^{-16}$— для 16 бит и $n \cdot 2^{-32}$— для 32 бит.

Для простоты допустим, что норма истинной матрицы равна 10 (т.е. величины элементов истинной матрицы близки к 1). Для расчетов необходимо также определить начальную норму матрицы погрешностей. Для этого возьмем норму матрицы погрешностей после первой итерации.

Очевидно, уже после первой итерации будет найдено приближенное решение, в котором будут верными несколько первых цифр после запятой. Будем считать, что верны две цифры, и тогда сферическая норма матрицы погрешностей после первой итерации определится как

$n \cdot 2^{-2}$. Тогда оценки отношений числа итераций будут следующими:

$$\frac{it8}{it16} = \frac{\|A\|_E + \|dA_1\|_E}{\|A\|_E \|dA_8\|_E} = 3,37;$$

$$\frac{it16}{it32} = \frac{\|A\|_E + \|dA_8\|_E}{\|A\|_E \|dA_{16}\|_E} = 1,04.$$

Принимая относительное число итераций при разрядности 32 бита равным 1 и округляя до целых чисел в большую сторону, получим искомую пропорцию it8:it16:it32 $\Rightarrow$ 7:2:1.

Таким образом, предложенный метод существенно сокращает число итераций на начальном этапе и позволяет вести определение результата, начиная со старших разрядов, что, в свою очередь, допускает осуществление дальнейших вычислений, не дожидаясь получения окончательного его значения.

В заключение отметим, что предложенный подход позволяет существенно повысить скорость сходимости при вычислении собственных значений и собственных векторов. Это дает возможность сократить вычислительные затраты при построении целого ряда автоматизированных систем управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотовский В.Е. Арифметические и алгоритмические основы проблемно-ориентированных вычислительных систем. — Таганрог, 2003. — 186 с.

2. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. — М.: Наука, 1966. — 248 с.