

УПРАВЛЕНИЕ С НАСЫЩЕНИЕМ В ЗАДАЧЕ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ¹

Моторина Дарья Юрьевна, аспирант Ульяновского государственного университета, специальность «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Окончила факультет математики и информационных технологий Ульяновского государственного университета. Инженер-программист 3 категории ФНПЦ ОАО «НПО «Марс». Сфера научных интересов — управление движением механических систем. [e-mail: dariaM7@rambler.ru].

Аннотация

В работе рассматривается задача слежения для механических систем с запаздыванием в структуре обратной связи. Обосновывается непрерывный закон управления с насыщением, являющийся аппроксимацией релейного управления. Подход к решению задачи основан на применении вектор-функции Ляпунова с компонентами в виде векторных норм. В качестве примера рассматривается мобильный робот с тремя роликонесущими колесами.

Ключевые слова: механическая система, задача слежения, управление с насыщением, запаздывание, вектор-функции Ляпунова, матричные нормы, мобильный робот с роликонесущими колесами.

Abstract

The article deals with the task of tracking for mechanical system taking into account delay in the structure of feedback. It proves continuous law of control with saturation, which is an approximation of relay control. The approach is based on the use of Lyapunov vector-function with components in the form of vector norms. A mobile robot with three-roller wheel is considered in the article as an example.

Key words: mechanical system, tracking task, control with saturation, delay, Lyapunov vector-function, matrix norms, mobile robot with roller wheels.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальными являются задачи управления движением различных механических систем. В зависимости от целей существуют различные постановки задачи управления. Одной из них является задача слежения для механических систем [1–4].

Данная задача заключается в построении такого управления, под действием которого механическая система будет отслеживать заданную траекторию с некоторой точностью, называемой погрешностью слежения. Это означает, что любая траектория механической системы с начальной точкой из допустимой области отклонений за конечный промежуток времени выйдет на отслеживаемую траекторию и будет придерживаться ее все оставшееся время движения. При этом отклонение истинной траектории системы от отслеживаемой не будет превышать погрешность слежения.

Перспективным направлением в решении задачи слежения является синтез релейных управлений движением механических систем [4]. Релейные управления обладают рядом преимуществ, что связано с их универсальностью и воз-

можностью использования для целого класса траекторий и допустимых параметров системы.

Релейный закон управления является разрывным, что создает определенные трудности для практического применения, так как для его реализации необходимо, чтобы выходной сигнал управляющего устройства изменялся мгновенно — от минимального значения до максимального. Выполнение данного условия не может обеспечить ни одно реальное устройство.

В данной работе предлагается для решения задачи слежения использовать непрерывное управление с насыщением вида:

$$u = \text{sign}(x), \text{ при } |x| \geq \gamma, \quad u = \frac{x}{\gamma}, \text{ при } |x| < \gamma,$$

где γ — достаточно малая положительная постоянная. В области $|x| \geq \gamma$ рассматриваемое управление совпадает с релейным, а в области $|x| < \gamma$ — представляет собой быстро меняющееся линейное управление, т. е. данный закон управления можно рассматривать как аппроксимацию релейного управления.

В данной работе рассматривается метод построения управления с насыщением с учетом за-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Минобрнауки РФ в рамках проекта 2.1.1/6194.

паздывания в структуре обратной связи. Необходимость учитывать запаздывание в управлении обуславливается тем, что реальным системам управления требуется некоторое время для переработки поступающей информации и формирования выходного сигнала.

Предлагаемый подход основан на применении вектор-функции Ляпунова с компонентами в виде векторных норм. Производные функций Ляпунова оцениваются с помощью операторных и логарифмических матричных норм [4, 5]. Находятся условия, при выполнении которых обеспечивается отслеживание заданной траектории. Из полученных условий определяются параметры управления.

На основе данного подхода разработан алгоритм нахождения параметров управления. Действие данного алгоритма демонстрируется на примере задачи слежения для мобильного робота с роликонесущими колесами [4, 6–11]. Данный робот состоит из платформы и трех колес вида «omni-directional». Рассматривается движение робота без проскальзывания по горизонтальной шероховатой поверхности под действием моментов, приложенных к его колесам тремя независимыми электродвигателями. Алгоритм нахождения параметров управления реализован с применением численных методов математического пакета Mathcad.

Постановка задачи слежения для механических систем с запаздывающим управлением

Рассмотрим задачу управления движением механической системы, динамика которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$H(t, q)\ddot{q} + F(t, q, \dot{q}) = u(t - h(t)) , \quad (1)$$

где $q \in R^n$ – вектор обобщенных координат;

$\dot{q} \in R^n$ – вектор обобщенных скоростей;

$H(t, q) \in R^{n \times n}$ – невырожденная матрица с дважды непрерывно дифференцируемыми ограниченными элементами;

$F(t, q, \dot{q}) \in R^n$ – вектор-функция с дважды непрерывно дифференцируемыми элементами;

$u \in R^n$ – вектор управляющих воздействий;

$h(t)$ – ограниченная непрерывная функция запаздывания в управлении,

$$0 \leq h(t) \leq h_0 = const > 0 .$$

В качестве нормы в пространстве R^n выберем кубическую векторную норму:

$$|x| = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| \} \quad \forall x \in R^n .$$

Пусть $q^*(t) \in R^n$ – отслеживаемая траектория системы (1), удовлетворяющая условию

гладкости, а $q(t)$ – некоторое решение системы (1) с начальным условием

$$q(s) = \varphi(s) , \quad -h_0 \leq s \leq 0 , \quad (2)$$

где $\varphi(s)$ – начальная функция, определенная на интервале $-h_0 \leq s \leq 0$.

Задача отслеживания траектории $q^*(t)$ состоит в построении запаздывающего управления $u(t - h(t))$, при котором для некоторого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой начальной функции $\varphi(s)$, удовлетворяющей на интервале $-h_0 \leq s \leq 0$ условию

$$\max \left\{ \max_{-h_0 \leq s \leq 0} |\varphi(s) - q^*(s)| , \max_{-h_0 \leq s \leq 0} |\varphi(s) - q^*(s) + C^{-1}(\dot{\varphi}(s) - \dot{q}^*(s))| \right\} < \delta , \quad (3)$$

для решения $q(t)$ системы (1) с начальным условием (2) будет справедливо неравенство:

$$|q(t) - q^*(t)| < \varepsilon , \quad \forall t \geq 0 .$$

Число ε при этом называется ошибкой слежения, а неравенство (3) задает область допустимых начальных отклонений от отслеживаемой траектории.

Решение задачи слежения для механических систем с запаздывающим управлением

Управление в системе (1) определим в виде $u(t - h(t)) = -kH(t, q^*(t))Csat[q(t - h(t)) - q^*(t - h(t)) + C^{-1}(\dot{q}(t - h(t)) - \dot{q}^*(t - h(t)))]$, (4)

где $C \in R^{n \times n}$ – постоянная невырожденная матрица, k – положительная константа, которую необходимо определить. Вектор-функция

$sat(z) = (sat(z_1), \dots, sat(z_n))^T$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} sat(z_i) &= sign(z_i), \quad npu |z_i|^3 \gamma, \\ sat(z_i) &= \frac{z_i}{\gamma}, \quad npu |z_i| < \gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

где $0 < \gamma = const$.

Преобразуем уравнение (1), умножив обе части уравнения слева на матрицу $H^{-1}(t, q)$, и получим

$$\ddot{q} + L(t, q, \dot{q}) = H^{-1}(t, q)u(t - h(t)) , \quad (6)$$

где $L(t, q, \dot{q}) = H^{-1}(t, q)F(t, q, \dot{q})$.

Введем отклонения истинного движения системы от отслеживаемой траектории $x = q - q^*(t)$,

$\dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^*(t)$. Тогда система уравнений в отклонениях примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{q}^*(t) + L(t, q^*(t) + x, \dot{q}^*(t) + \dot{x}) = \\ = H^{-1}(t, q^*(t) + x) u(t - h(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Задача управления системой (1) эквивалентна задаче стабилизации нулевого решения $(x = 0, \dot{x} = 0)$ системы (7).

Линеаризуем полученную систему (7) в окрестности точки $(x = 0, \dot{x} = 0)$. Линеаризованная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x = \\ = H_1(t, x)u(t - h(t)) + S(t) + G(t, x, \dot{x}), \end{aligned} \quad (8)$$

где матрицы $H_1(t, x)$, $A(t)$, $B(t)$ и вектор $S(t)$ определяются следующим образом:

$$H_1(t, x) = H^{-1}(t, q^*(t) + x),$$

$$S(t) = -L(t, q^*(t), \dot{q}^*(t)) - \ddot{q}^*(t),$$

$$A(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t)),$$

$$B(t) = \frac{\partial L}{\partial q}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t)),$$

где $G(t, x, \dot{x})$ — остаточный член разложения.

Задачу синтеза управления будем рассматривать для линеаризованной системы (8), применяя для нахождения параметров управления матричные нормы.

Введем в пространстве $R^{n \times n}$ матричные нормы, подчиненные выбранной ранее кубической векторной норме. Пусть $M \in R^{n \times n}$ — произвольная матрица с компонентами m_{ij} . Операторная норма матрицы, подчиненная выбранной кубической векторной норме, вычисляется по формуле [5]:

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \right\}, \quad (9)$$

а логарифмическая норма матрицы, подчиненная выбранной кубической векторной норме, вычисляется по формуле [5]:

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ m_i + \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \right\}. \quad (10)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть управление в системе (1) имеет вид (4) и найдутся такие положительные постоянные ε , α , b и N что:

- 1) число γ удовлетворяет неравенству $\gamma < \varepsilon$;
- 2) матрица C такова, что выполняется нера-

венство $\lg n \| -C \| < 0$;

3) матрицы $A(t)$, $B(t)$, $H_1(t, x)$, векторы $S(t)$, $G(t, x, y)$ и число k удовлетворяют условию: для всех $t \geq 0$ и $x, y \in R^n$, таких, что $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, справедливы неравенства

$$\lg n \| C - C^{-1}A(t)C \| \leq b,$$

$$|G(t, x, y)| \leq N(|x|^n + |y|^n),$$

$$\begin{aligned} \| -C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \| e + |C^{-1}S(t)| + \\ + 2Ne^2 + \| -kC^{-1}H_1(t, x)H(t, q^*(t))C \| \leq a, \end{aligned}$$

$$\left[\| -C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \| \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \lg n \| C - C^{-1}A(t)C \| \right] \varepsilon + |C^{-1}S(t)| +$$

$$+ 2N\varepsilon^2 + \lg n \| -kC^{-1}H_1(t, x)H(t, q^*(t))C \| \leq 0,$$

где $c = -\frac{\|C\|}{\lg n \| -C \|} = \text{const} > 0$;

4) начальная функция $\varphi: [-h_0, 0] \rightarrow R^n$ удовлетворяет неравенству (3), где число δ таково, что $0 < c\delta < \varepsilon$;

5) максимальная величина запаздывания h_0 удовлетворяет неравенству

$$h_0 < \frac{1}{b} \ln \frac{be + ac}{c(a + bg)}.$$

Тогда решение системы (1) отслеживает траекторию $q^*(t)$ посредством управления (4) с погрешностью слежения, не превышающей ε .

Доказательство. Так как C — невырожденная матрица, в системе (8) можно сделать замену переменных

$$y = x, \quad z = x + C^{-1}\dot{x}. \quad (11)$$

В новых переменных система примет вид:

$$\dot{y} = -Cy + Cz,$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \left[-C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \right] y + \\ & + \left[C - C^{-1}A(t)C \right] z + C^{-1}S(t) + C^{-1}G_1(t, y, z) - \\ & - kC^{-1}H_1(t, y)H(t, q^*(t))Csat(z(t - h(t))), \end{aligned} \quad (12)$$

где $G_1(t, y, z) = G(t, y, -Cy + Cz)$.

Применим к системе (12) вектор-функцию Ляпунова $V = (V_1, V_2)^T$ с компонентами, взятыми в виде кубической векторной нормы:

$$V_1 = |y|, \quad V_2 = c|z|. \quad (13)$$

Функции V_1 и V_2 не являются гладкими, но удовлетворяют условию Липшица, поэтому будем рассматривать правые производные \dot{V}_1 и \dot{V}_2 в силу системы (12).

Так как $\left| \frac{z_i}{\gamma} \right| < 1$, при $|z_i| < \gamma$, для правых про-

изводных \dot{V}_1 и \dot{V}_2 в силу системы (12) справедливо оценки:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \lg n \| -C \| V_1 - \lg n \| -C \| V_2, \\ \dot{V}_2 &\leq c \| -C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \| V_1 + \\ &+ \lg n \| C - C^{-1}A(t)C \| V_2 + \\ &+ c \left[|C^{-1}S(t)| + |C^{-1}G_1(t, y, z)| + \right. \\ &\left. + \| -kC^{-1}H_1(t, y)H(t, q^*(t))C \| \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $(y(t), z(t))$ – произвольное решение системы (12), удовлетворяющее начальному условию

$$\max_{-h_0 \leq s \leq 0} \{ |y(s)|, |z(s)| \} < \delta.$$

Докажем, что для скалярной функции $\bar{V}(y(t), z(t))$, определенной следующим образом: $\bar{V}(y(t), z(t)) = \max \{ V_1(y(t), z(t)), V_2(y(t), z(t)) \}$,

будет справедливо неравенство $\bar{V}(y(t), z(t)) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$. (15)

Неравенство (15) влечет за собой искомое

неравенство $|q - q^*(t)| < \varepsilon$.

Предположим от противного, что существует такой момент времени $T > 0$, что

$$\bar{V}(y(T), z(T)) = \varepsilon, \quad \bar{V}(y(t), z(t)) < \varepsilon, \quad 0 \leq t < T. \quad (16)$$

Функция $\bar{V}(y(t), z(t))$ представляет собой кубическую норму в пространстве R^2 , для нее справедливы условия Липшица, поэтому можно

рассмотреть правую производную $\dot{\bar{V}}$ в силу системы (12). Для нее, при учете неравенств (14), справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &\leq \max \left\{ 0, \left[c \| -C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \| + \right. \right. \\ &+ \lg n \| C - C^{-1}A(t)C \| \bar{V} + \\ &+ c \left[|C^{-1}S(t)| + |C^{-1}G_1(t, y, z)| + \right. \\ &\left. \left. + \| -kC^{-1}H_1(t, y)H(t, q^*(t))C \| \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Это означает, что существует момент времени t_0 , $0 < t_0 < T$, такой, что для всех $t \in [t_0, T]$ справедливо соотношение:

$$\bar{V}(y(t), z(t)) = V_2(y(t), z(t)).$$

Действительно, если такого момента не существует, то будет справедливо равенство:

$$\bar{V}(y(t), z(t)) = V_1(y(t), z(t)) > V_2(y(t), z(t)), \quad t \in (0, T).$$

Из первого неравенства (14) следует, что для всех $t \in (0, T)$ имеет место неравенство

$$\dot{\bar{V}} \leq 0.$$

Это означает, что функция $\bar{V}(y(t), z(t))$ не убывает на промежутке $t \in (0, T)$, что противоречит предположению (16).

Рассмотрим значение функции $\bar{V}(y(t), z(t))$ в момент времени T :

$$\begin{aligned} \bar{V}(y(T), z(T)) &= V_2(y(T), z(T)) = \\ &= c|z(T)| = c|z_k(T)|, \end{aligned} \quad (18)$$

где z_k – компонента вектора z .

Пусть t_1 – наибольший момент такой, что $-h_0 \leq t_1 < T$ и $z_k(t_1) = 0$. Если такого момента не существует, то определим $t_1 = -h_0$. Таким образом, на отрезке $[t_1, T]$ функция $z_k(t)$ не меняет знак. Будем считать, для определенности, что $z_k(t) \geq 0$ при всех $t \in [t_1, T]$. Пусть t_2 – наибольший момент времени, такой, что $t_1 \leq t_2 < T$ и $z_k(t_2) = \gamma$. Если такого момента не существует, то определим $t_2 = t_1$.

Тогда, учитывая условие 3 теоремы, будет иметь место дифференциальное неравенство:

$$\begin{aligned} \dot{z}_k(t) &\leq a + bz_k \quad \forall t \in [t_2, T], \\ z_k(t_2) &= \gamma. \end{aligned} \quad (19)$$

По теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [5] справедлива следующая оценка:

$$z_k(T) \leq \frac{1}{b} \left[(a + b\gamma) \exp \{ b(T - t_2) \} - a \right]. \quad (20)$$

Из соотношения (18) и предположения (16) следует неравенство:

$$\varepsilon \leq \frac{c}{b} \left[(a + b\gamma) \exp \{ b(T - t_2) \} - a \right].$$

Откуда, с учетом условия 5 теоремы, получаем:

$$T - t_2 \geq \frac{1}{b} \ln \frac{b\varepsilon + a}{c(a + b\gamma)} > h_0.$$

Значит найдется такое число $\delta_1 > 0$, что для всех $t \in [T - h_0 - \delta_1, T]$ будет иметь место неравенство $z_k(t) \geq \gamma$. Следовательно, для всех $t \in [T - \delta_1, T]$ будет справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \left[c \left\| -C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \right\| + \right. \\ & \left. + \lg n \left\| C - C^{-1}A(t)C \right\| \right] \bar{V} + \\ & + c \left[\left\| C^{-1}S(t) \right\| + \left\| C^{-1}G_1(t, y, z) \right\| + \right. \\ & \left. + \lg n \left\| -kC^{-1}H_1(t, y)H(t, q^*(t))C \right\| \right], \end{aligned}$$

которое, в силу условия 3 теоремы, влечет за собой неравенство:

$$\dot{V}(y(t), z(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [T - \delta_1, T],$$

означающее, что функция $\bar{V}(y(t), z(t))$ не убывает на отрезке $t \in [T - \delta_1, T]$, а это противоречит предположению (16). Таким образом, выполняется неравенство (15), что и доказывает теорему.

Теорема 1 позволяет установить максимально допустимое запаздывание h_0 и величину начальных возмущений δ , а также оценить погрешность слежения ε .

Алгоритм нахождения параметров управления

Рассмотрим, как применяется теорема 1 для нахождения параметров управления. Пусть известны параметры системы, а также величина δ , задающая область начальных отклонений, и величина γ в управлении (4). Для отслеживаемой траектории $q^*(t)$ необходимо найти следующие параметры управления: матрицу C и коэффициент k , а также оценить максимальную величину запаздывания h_0 и погрешность слежения ε .

В качестве матрицы C удобно взять диагональную матрицу $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$, где $c_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $c_i = c_i = \text{const} > 0$.

Параметры управления можно найти по следующему алгоритму:

1. Для начала необходимо подобрать положительные параметры c_i . Выбор данных коэффициентов достаточно произвольный, однако существует возможность поступить следующим образом: найти положительные постоянные s_i^0 , $1 \leq i \leq n$, для которых при всех $t \geq 0$ справедливы неравенства:

$$|S_i(t)| < s_i^0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Параметры c_i необходимо подобрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{s_1}{c_1} = \frac{s_2}{c_2} = \dots = \frac{s_n}{c_n}.$$

2. Найти оценки для следующих норм:

$$\lg n \left\| C - C^{-1}A(t)C \right\| \leq b,$$

$$|G(t, x, y)| \leq N \left(|x|^n + |y|^n \right),$$

$$\left\| -C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \right\| \leq b_1,$$

$$\left\| C^{-1}S(t) \right\| \leq S^0 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{s_i}{c_i} \right\},$$

используя формулы (9–10).

3. Зафиксировать число $\varepsilon > \max \{c\delta, \gamma\}$, характеризующее допустимую ошибку слежения для заданной траектории.

4. Для нахождения коэффициента k необходимо воспользоваться следующим свойством логарифмической нормы матрицы: для произвольной матрицы $M \in R^{n \times n}$ и произвольной положительной постоянной k справедливо соотношение

$$\lg n \left\| kM \right\| = k \lg n \left\| M \right\|.$$

Найти для всех $t \geq 0$ и $|x| < \varepsilon$ оценку логарифмической нормы

$$\lg n \left\| -C^{-1}H_1(t, x)H(t, q^*(t))C \right\| \leq -a_1 < 0,$$

тогда коэффициент k можно будет определить по формуле

$$k = \frac{cS^0 + (cb_1 + b)\varepsilon + 2cN\varepsilon^2}{ca_1}.$$

5. Найти оценку для операторной нормы $\left\| -kC^{-1}H_1(t, x)H(t, q^*(t))C \right\|$ и определить максимальную величину запаздывания h_0 из условия 5 теоремы 1.

Задача слежения для робота с роликонесущими колесами

Рассмотрим применение предложенного алгоритма на примере робота с роликонесущими колесами. Робот состоит из платформы, которая может перемещаться по горизонтальной поверхности на трех колесах. Углы между осями колес составляют 120° . На колесах робота закреплены ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колес. При наличии подобных колес платформа может двигаться в любом направлении, с любой ориентацией. Движение робота

происходит без проскальзывания под действием моментов, развиваемых тремя независимыми электродвигателями постоянного тока. Движение робота описывается следующими уравнениями [6]:

$$H\ddot{q} + F(\dot{q}) = P(\psi)u(t - h(t)), \quad (21)$$

$$q = (\xi, \eta, \psi)^T,$$

$$H = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}, \quad F(\dot{q}) = \begin{pmatrix} n\dot{\xi} + m_d\dot{\eta}\dot{\psi} \\ n\dot{\eta} + m_d\dot{\xi}\dot{\psi} \\ 2a^2n\dot{\psi} \end{pmatrix},$$

$$P(\psi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\psi) & \sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos(\psi) & -\cos\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix},$$

где ξ и η – координаты центра масс платформы в неподвижной декартовой системе координат $O\xi\eta\xi$; ψ – угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемой от оси $O\xi$;

$u = (u_1, u_2, u_3)^T$ – управляющие напряжения, подаваемые на электродвигатели постоянного тока, a – расстояние от центра масс платформы до центра каждого колеса:

$$m = m_0 + 3m_1\left(1 + \frac{r_1^2}{2r^2}\right), \quad m_d = \frac{3m_1r_1^2}{2r^2},$$

$$I_s = m_0\rho_0^2 + 3m_1\left(\rho_1^2 + a^2\left(1 + \frac{2r_1^2}{r^2}\right)\right),$$

$$n = \frac{3c_v}{2r^2}.$$

Здесь m_0 – масса платформы; m_1 – масса колеса робота; ρ_0, ρ_1 – соответственно радиусы инерции платформы и колеса относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс; r – радиус колеса; r_1 – радиус инерции колеса относительно оси вращения; c_v – коэффициент момента противозлектродвижущей силы.

Пусть параметры системы имеют следующие значения: $m = 23,101$ кг, $m_d = 6,601$ кг, $I_s = 9,486$ кг·м², $n = 1,76$ Н·с/м, $a = 0,5$ м. Отслеживаемая траектория имеет вид: $\xi^*(t) = 0,8 \sin t$, $\eta^*(t) = 1,3 \cos(0,8t + 2,3)$, $\psi^*(t) = 1,2t + 3$.

Построим управление следующего вида:
 $u = -kP^{-1}(\psi^*(t))HCsat(q(t-h(t)) - q^*(t-h(t))) + C^{-1}(\dot{q}(t-h(t)) - \dot{q}^*(t-h(t)))$,

где матрица C имеет вид: $C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$.

Для нахождения параметров управления воспользуемся описанным выше алгоритмом.

Численное моделирование дает следующие значения параметров управления:

$$c_1 = 1,4, \quad c_2 = 1,606, \quad c_3 = 1, \quad \gamma = 0,001, \\ k = 1,3. \quad \text{Максимальная величина запаздывания} \\ h_0 = 0,027. \quad \text{Погрешность слежения } \varepsilon = 0,1.$$

На рисунках 1–3 представлены результаты численного моделирования. На рисунке 4 представлен график траектории центра масс платформы. Из графиков видно, что рассматриваемая система движется вдоль отслеживаемой траектории на расстоянии, не превышающем погрешности слежения.

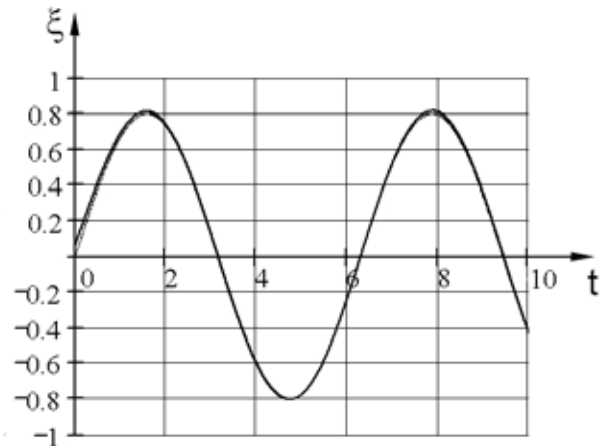


Рис. 1. График координаты центра масс платформы ξ

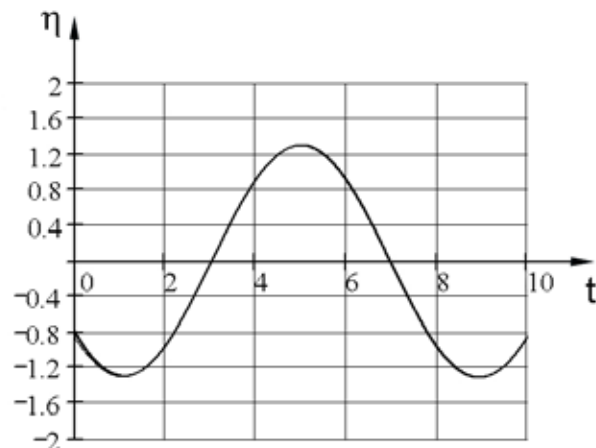


Рис. 2. График координаты центра масс платформы η

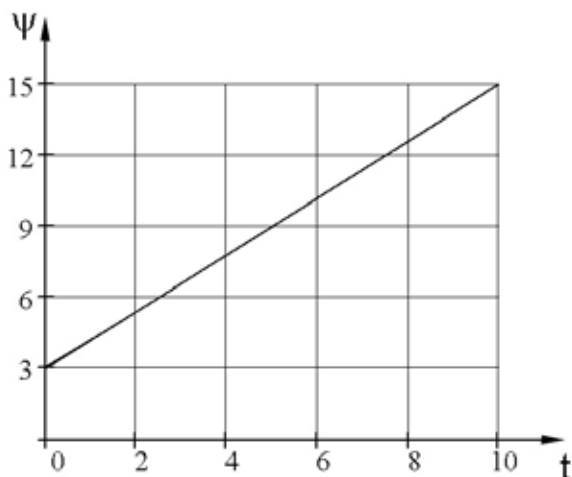
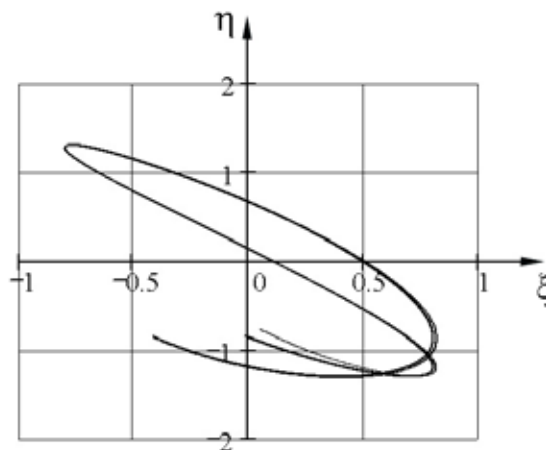
Рис. 3. График угла поворота платформы Ψ 

Рис. 4. График траектории центра масс платформы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача отслеживания траекторий механических систем с учетом запаздывания в структуре обратной связи. Получены оценки для максимального запаздывания в системе и для величины начальных отклонений, а также для погрешности слежения, предложен алгоритм нахождения параметров управления.

Найден новый закон управления, позволяющий отслеживать траектории мобильного робота с тремя роликонесущими колесами.

Предложенный подход обладает следующими преимуществами:

- 1) простотой вычисления операторных и матричных норм;
- 2) возможностью применения полученных результатов к широкому классу траекторий;
- 3) достаточно произвольным выбором матрицы C , обеспечивающим гибкость в использовании метода и поиске наиболее подходящих параметров управления;
- 4) возможностью подбора параметров управления таким образом, чтобы получить оптимальное сочетание максимальной величины запаздывания h_0 и погрешности слежения ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перегудова О. А. К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении / О. А. Перегудова // АИТ. — 2009. — № 5. — С. 95–105.
2. Ананьевский И. М. Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем / И. М. Ананьевский, С. А. Решмин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 5. — С. 25–32.
3. Ефремов М. С. Новый алгоритм слежения для некоторых механических систем / М. С. Ефремов, А. Е. Поляков, В. В. Стрыгин // ПММ. — 2005. — Т. 69. — Вып. 1. — С. 30–41.

4. Перегудова О. А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем / О. А. Перегудова. — Ульяновск : УлГУ, 2009. — 253 с.

5. Перегудова О. А. Методы сравнения в задачах устойчивости и стабилизации / О. А. Перегудова. — Ульяновск : УлГУ, 2004. — 60 с.

6. Мартыненко Ю. Г. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами / Ю. Г. Мартыненко, А. М. Формальский // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 6. — С. 142–149.

7. Зобова А. А. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринев // Мобильные роботы и мехатронные системы. — М. : Изд-во МГУ, 2006. — С. 61–67.

8. Yong Liu, J. Jim Zhu, Robert L. Williams II, Jianhua Wu. Omni-directional mobile robot based on trajectory linearization // Robotics and Autonomous Systems. — 2008. — N 56. — P. 461–479.

9. Muir P. F., Neuman C. P. Kinematic modeling for feedback control of an omni directional wheeled mobile robots // Proceedings of IEEE International Conference on Robots and Automation. Raleigh — 1987. — P. 1772–1786.

10. Purwin O., D'Andrea R. Trajectory of generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles // Robotics and Autonomous Systems. — 2006. — Vol. 54 (1). — P. 13–22.

11. Andre Scolari Conceicao, A. Paulo Moreira / Paulo J. Costa. A nonlinear model predictive control strategy for trajectory tracking of a four wheel omnidirectional mobile robot // Optim. Control Appl. Meth. — 2008. — N 29. — P. 335–352.

12. Ching-Chih Tsai, Hsu-Chih Huang, Tai-Yu Wang. Simultaneous tracking and stabilization of an omnidirectional mobile robot in polar coordinates. // Journal of the Chinese Institute of Engineers. — 2009. — Vol. 32. — N 4. — P. 569–575.