УДК 004.023

А.И. Моисеев

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ И ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ СРЕДСТВ НАБЛЮДЕНИЯ БЕРЕГОВОЙ СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ

Моисеев Александр Иванович, *аспирант кафедры информационных технологий Ульяновского государственного университета, окончил факультет трансферных специальностей УлГУ. Инженер-программист 2 категории ФНПЦ ОАО «НПО «Марс». Специализируется в области береговых систем наблюдения. [e-mail: moiseev-aiv@yandex.ru].*

Аннотация

Данное исследование посвящено анализу задачи размещения средств наблюдения береговой системы наблюдения. В статье проведена оценка временной сложности задачи и доказана ее NP-полнота. Предложен алгоритм приближенного решения задачи, позволяющий получать полиномиальное решение для заданного уровня погрешности. Для анализа приближенных алгоритмов предложена методика оценки погрешности.

Ключевые слова: средства наблюдения, эффективность, задача о назначении, временная сложность, погрешность алгоритма.

Abstract

The present paper is devoted to an analysis of task of dislocation of surveillance facilities of shore-based surveillance system. In the article the authors have evaluated the time complexity of task and proved its NP-fullness. It offers an algorithm of approximate solution of the task, allowing getting polynominal solution for a given error level. For analysis of the approximate algorithms the article offers a procedure of error evaluation.

Key words: surveillance facilities, efficiency, assignment task, time complexity, algorithm error.

Введение

Береговая система наблюдения (БСН) является одним из элементов различных систем управления. При этом на первом этапе проектирования БСН важная задача, требующая решения, – это размещение средств наблюдения (СН). Данному вопросу посвящены работы многих отечественных и зарубежных ученых [1–8]. Однако, несмотря на широкую известность и актуальность проблемы, до сих пор не проведен комплексный анализ задачи размещения средств наблюдения. Прежде всего, необходимо узнать, существует ли возможность создания общего и эффективного алгоритма данной задачи или необходимо разбивать ее на более узкие классы и разрабатывать для них эффективные алгоритмы решения. Отсутствие ответа на данный вопрос ведет к необходимости анализа сложности задачи. Эта проблематика актуальна и потому, что к случаю размещения береговой системы наблюдения сводятся многие практические задачи экономики, техники, военного дела и др.

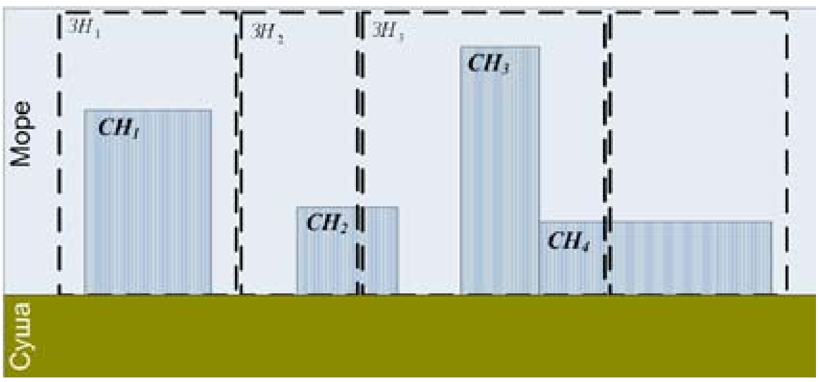

Рис. 1. Береговая система наблюдения

Методы и ожидаемые результаты

Объясним смысл задачи размещения средств наблюдения [9]. В процессе мониторинга морского пространства средства наблюдения осуществляют обнаружение и сопровождение объектов (рис. 1).

Наблюдаемое морское пространство разделяется на m зон наблюдения (ЗН), отличающихся требуемыми значениями вероятности обнаружения целей q_i. Аналогичной характеристикой – реальной вероятностью обнаружения цели r_j, обладают и n СН. ЗН и СН характеризуются шириной w_i и v_j, дальностью d_i и h_j, расположением x_i и t_j (координатой левого ближнего к берегу угла) соответственно. Решение задачи размещения сводится к отысканию такого расположения средств наблюдения, при котором максимальная сумма условных вероятностей обнаружения целей береговой системы наблюдения

$$F_{сум} = f(q_1 \dots q_m, w_1 \dots w_m, d_1 \dots d_m, x_1 \dots, x_m, r_1 \dots r_n, v_1 \dots v_n, h_1 \dots h_n, t_1 \dots t_n).$$

На данный момент времени не существует полиномиального алгоритма решения данной задачи. Сложность же простого перебора равна:

$$O(n \cdot m + C_n^{\,2} \cdot m^2 + \ldots + C_n^{\,n} \cdot m^n),$$

так как необходимо провести поиск по n сочетаниям СН $C_n^{\,1} \ldots C_p^{\,k} \ldots C_n^{\,n}$ (где $C_p^{\,k}$ – количество неповторяющихся наборов k элементов, которые можно выбрать из данных p элементов), для каждого из которых перебирая $m^1 \ldots m^n$ позиций для размещения.

Отсутствие эффективного полиномиального алгоритма обуславливает необходимость поиска других подходов к данной задаче, например, отыскание приближенного алгоритма, заранее обладающего погрешностью, но требующего меньше времени для решения. Для того чтобы иметь все основания для разработки приближенного алгоритма решения задачи, необходимо доказать ее принципиальную труднорешаемость, а именно: обосновать NP-полноту задачи.

Согласно теории вычислений [10] выделяют следующие классы задач:

- задачи, имеющие полиномиальный алгоритм решения (класс P);
- задачи, для которых полиномиального алгоритма решения не найдено.

При этом среди задач второго класса отдельно изучают задачи, для которых существует полиномиальный алгоритм проверки некоторого предположения на то, является ли оно решением задачи. Известно, что такие задачи решаются недетерминированным алгоритмом за полиномиальное время (класс NP). В классе NP выявлены так называемые универсальные (или NP-полные) задачи. При этом изучение NP-полных задач связано с так называемым вопросом «P = NP» [10]. Этот вопрос был поставлен в 1971 году и является сейчас одной из наиболее сложных проблем теории вычислений. Если для некоторой задачи удается доказать ее NP-полноту, то есть основания считать ее практически неразрешимой, поэтому более рационально построение приближенного алгоритма, чем поиск быстрого и точного алгоритма.

Доказательство NP-полноты задачи размещения средств наблюдения

Общепризнанный метод доказательства NP-полноты задачи состоит из следующих четырех шагов [10]:

1) доказательство того, что задача лежит в области NP;

2) выбор известной NP-полной задачи Π;

3) построение функции, сводящей задачу Π к решаемой задаче;

4) доказательство того, что найденная функция осуществляет полиномиальное сведение.

Для обоснования того, что исследуемая задача лежит в области NP, предположим, что получено конкретное сочетание СН и ЗН, удовлетворяющее решению задачи. Покажем за время, пропорциональное количеству СН, что данное сочетание СН и ЗН является решением задачи. Для этого вычислим N значений эффективности наблюдения, сложим и сравним их с заданным порогом. Причем это вычисление, как и требует теория сложности, занимает время полиномиально пропорциональное количеству СН. Таким образом, первый шаг методики доказательства NP-полноты пройден.

На следующем этапе исследования задачи размещения СН обратимся к обширному списку задач, доказательство которых уже проведено [10]. Наиболее подходящей для сведéния к задаче размещения средств наблюдения является квадратичная задача о назначении [11]. Покажем ее смысл.

Условие задачи: задано m вакантных должностей, на которые имеется n претендентов. Полезность каждого кандидата зависит от должности, на которую он будет назначен. Пусть возможный доход за конкретный промежуток времени при принятии претендента j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ на должность i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ известен и равен $U_{i,j}$. Матрицу $U = \|U_{i,j}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ назовем матрицей доходов.

Вопрос. Существует ли такое назначение n претендентов на m вакантных должностей, которое обеспечивает доход меньше $B \in Z^+$

$$\sum_{j=1}^{n} U_{ij} \le B \ ?$$

Методы, используемые при доказательстве результатов об NP-полноте, меняются почти в столь же широких пределах, как и сами NP-полные задачи, поэтому обратимся к наиболее общему и часто используемому методу доказательства – сужению.

Доказательство методом сужения NP-полноты задачи заключается в установлении того, что решаемая задача включает в качестве частного случая известную NP-полную задачу Π. Суть состоит в том, чтобы указать дополнительные ограничения, которые требуется наложить на решаемую задачу, чтобы получившаяся в результате сужения задача была бы эквивалентна П. При этом не требуется, чтобы возникающая в результате сужения задача была точной копией известной NP-полной задачи Π, необходимо только, чтобы между задачами имелось очевидное взаимно-однозначное соответствие.

Покажем, что задача размещения средств наблюдения является частным случаем квадратичной задачи о назначении.

Особенность данной задачи заключается в том, что она имеет непрерывную форму. Множество позиций для назначения представляют собой отрезок длиной, равной ширине побережья. Кроме того, сами СН могут занимать не одну позицию, как в задаче назначения, а покрывать сразу несколько ЗН. Для нивелирования данных отличий и обеспечения возможности сведéния друг к другу сравниваемых задач позиции СН приведем решаемую задачу к дискретному виду. Отметим, что погрешность данной задачи в дискретном виде будет пропорциональна частоте разбиения (дискретизации) наблюдаемого пространства, что создает возможность решать задачу с заданной точностью в зависимости от частоты разбиения наблюдаемого пространства. В зависимости от соотношения количества СН и ЗН будем различать два случая задачи.

1) Количество СН такое, что сумма длин областей видения меньше либо равна ширине наблюдаемой берего-

вой линии. В этом случае будем пытаться обеспечить максимально равномерное покрытие ЗН областями видения СН. Для этого распределим возможные позиции СН через постоянный интервал

$$E = \frac{\sum v_i}{n}. \quad (1)$$

2) Количество СН такое, что сумма длин областей из видения строго больше ширины наблюдаемой береговой линии. Для данного случая задачи разделим ее на подзадачи в количестве, пропорциональном отношению суммы ширин областей видимости СН к длине наблюдаемого пространства. Решение этого случая задачи будет состоять из последовательных итераций в количестве

$$K = div\left(\frac{\sum v_j}{\sum w_i}\right) + 1. \quad (2)$$

Таким образом, дискретный вид задачи размещения средств наблюдения (с заданной точностью) эквивалентен по сложности квадратичной задаче о назначении и, следовательно, характеризуется NP-полнотой.

Получив доказательство NP-полноты решаемой задачи, мы можем с большой долей уверенности считать, что не существует алгоритма решения задачи, работающего за полиномиальное время. Разумеется, полностью быть уверенным можно будет только тогда, когда будет доказана фундаментальная неэквивалентность P и NP классов сложности. И наоборот, получив равенство P = NP, будем на 100% уверены в существовании полиномиального алгоритма. Как бы то ни было, будем солидарны с большей частью мирового научного сообщества, т. е. считать неравными P и NP классы сложности.

Приближенный алгоритм решения задачи размещения средств наблюдения

Возможные подходы к приближенному решению задачи можно разбить на 2 категории. К первой категории относятся подходы, в которых делается попытка максимального сокращения объема перебора, хотя при этом и признается неизбежность экспоненциального времени работы. К наиболее широко используемым приемам сокращения перебора относятся приемы, основанные на методе «ветвей и границ» или методе «неявного перебора». Подходы, относящиеся ко второй категории, включают прием, который можно назвать «снижение требований». Он заключается в отказе от поиска оптимального решения и в нахождении «хорошего» решения за приемлемое время. Опишем возможный приближенный алгоритм, относящийся ко второй категории подходов. Этот метод решения имеет несколько названий: «жадный алгоритм», «наиболее подходящий» или «локальный поиск».

Работа алгоритма представлена на следующей блок-схеме (рис. 2).

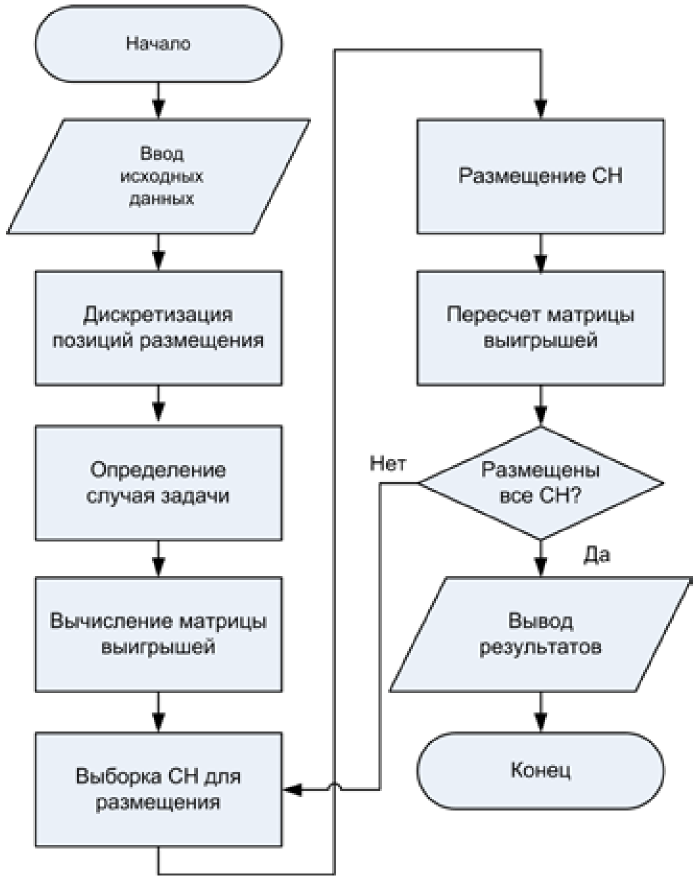

Рис. 2. Блок-схема приближенного алгоритма

Поясним основные этапы работы алгоритма.

Шаг 1. Ввод исходных данных. Для каждой ЗН: координаты расположения, ширина, дальность, требуемая вероятность обнаружения. Для каждого СН: координаты расположения, ширина, дальность, реальная вероятность обнаружения.

Шаг 2. Дискретизация позиций размещения СН. Береговая линия, представляя собой отрезок прямой, характеризуется бесконечным количеством позиций. Для перехода к дискретному распределению позиций СН вычислим необходимое среднее расстояние между ними (1).

Шаг 3. Определение случая задачи. На данном шаге рассчитывается плотность покрытия наблюдаемого пространства областями видения СН (2), что определяет количество итераций решения задачи.

Шаг 4. Вычисление матрицы выигрышей A (частных показателей эффективности) размерностью $n \times m$:

$$A = \begin{vmatrix} S(ЗН_1, СН_1)\cdot q_1 \cdot r_1 & \ldots & S(ЗН_m, СН_1)\cdot q_m \cdot r_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & S(ЗН_i, СН_j)\cdot q_i \cdot r_j & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S(ЗН_1, СН_n)\cdot q_1 \cdot r_n & \ldots & S(ЗН_m, СН_n)\cdot q_m \cdot r_n \end{vmatrix},$$

где $S(ЗН_i, СН_j)$ – площадь пересечения области видения $СН_j$ с $ЗН_i$.

Шаг 5. Сортировка матрицы по убыванию выигрышей. Данный этап является подготовительным для вычисления количества размещаемых СН. На выходе получим массив СН, упорядоченных по убыванию частных показателей эффективности:

$$\left(CH_{max\left(A_{ij}\right)}...CH_{min\left(A_{ij}\right)}\right).$$

Шаг 6. Вычисление количества размещаемых СН. Для этого производим накопление ширин областей видения СН до тех пор, пока не будет превышена длина наблюдаемого пространства $\sum v_j \le \sum w_i$. В итоге получим часть массива с Шага 5:

$$\left(CH_{max\left(A_{ij}\right)}...CH'\right).$$

Шаг 7. Размещение СН. СН из массива Шага 6 размещаем, начиная с первого СН и далее по порядку. Работа алгоритма на данном шаге продолжается пока не будут размещены все СН из текущего массива. В случае если размещены все имеющиеся СН, то работа алгоритма заканчивается, в противном случае — переходим на следующий шаг.

Шаг 8. Пересчет позиций для размещения и матрицы для новой итерации задачи. На данном шаге осуществляется пересчет позиций для размещения по формуле (1) и матрицы выигрышей с учетом наложения областей ви́дения СН

$$A_{ij} = S(ЗН_i, CH_j) \cdot q_i \cdot r_j - q_i \cdot \sum(S_{пер} \cdot \sum\prod r_{пер}),$$

где составляющая $q_i \cdot \sum(S_{пер} \cdot \sum\prod r_{пер}$ определяет эффективность наблюдения, которая была учтена на предыдущих итерациях задачи. А $S_{пер}$ и $\sum\prod r_{пер}$ означают площадь пересечения и сумму всевозможных уникальных произведений реальных вероятностей обнаружения пересекаемых СН соответственно.

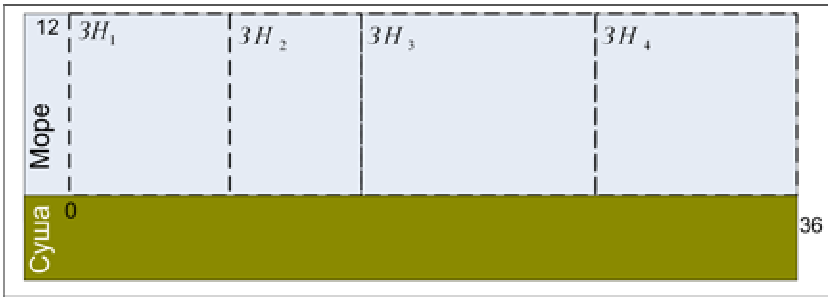

Рис. 3. Наблюдаемое пространство

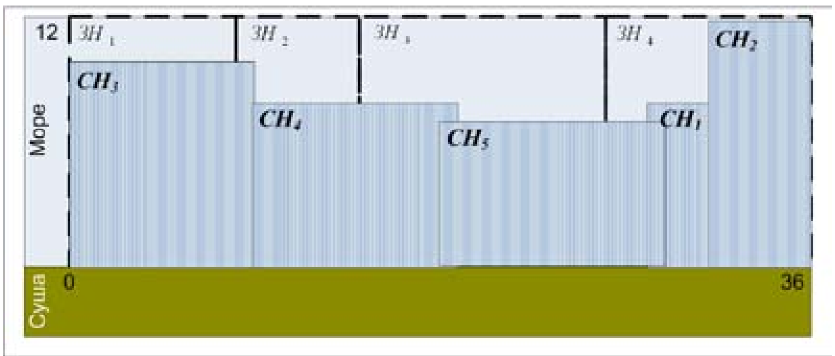

Рис. 4. Результат решения задачи размещения СН

После получения данной матрицы переходим на Шаг 5.

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий разработанную методику.

Исходные данные: имеется пространство, наблюдение которого необходимо организовать (рис. 3).

Данное пространство разделено на зоны наблюдения со следующими характеристиками:

№ п/п	Требуемая вероятность обнаружения, q_i	Ширина, w_i	Дальность, d_i	Расположение, x_i
1	0,7	8	12	0
2	0,8	6	12	8
3	0,6	12	12	14
4	1,0	10	12	26

Необходимо найти оптимальное расположение СН со следующими характеристиками:

№ п/п	Реальная вероятность обнаружения, r_j	Ширина, v_j	Дальность, h_j
1	0,7	8	8
2	0,4	5	12
3	0,6	9	10
4	0,5	10	8
5	0,6	11	7

Решим данную задачу с помощью предлагаемой методики.

Будем считать, что шаг 1 алгоритма выполнен, т. к. введены все исходные данные.

Шаг 2. Определим среднюю ширину СН (среднее расстояние между ними):

$$E = \frac{\sum v_i}{n} = \frac{43}{5} = 8,6.$$

Шаг 3. Рассчитаем количество итераций решения задачи:

$$K = div\left(\frac{\sum v_j}{\sum w_i}\right) + 1 = div\left(\frac{43}{36}\right) + 1 = 2.$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу выигрышей А размерностью 5 × 4:

$$A = \begin{vmatrix} 31,36 & 32,48 & 26,88 & 44,8 \\ 16,8 & 19,2 & 14,4 & 24 \\ 81,6 & 38,4 & 34,8 & 54 \\ 28,8 & 28 & 27,2 & 40 \\ 33,6 & 31,92 & 32,76 & 44,52 \end{vmatrix}.$$

Шаг 5–7. Размещаем СН в следующем порядке:

$$CH_3 \rightarrow ЗН_1$$
$$CH_1 \rightarrow ЗН_4$$
$$CH_5 \rightarrow ЗН_3$$
$$CH_4 \rightarrow ЗН_2$$

Шаг 8. Остается разместить CH_2. Для этого рассчитаем матрицу выигрышей A размерностью 7 × 1:

$$A = |\ 8{,}4\ \ 9{,}52\ \ 13{,}44\ \ 9{,}132\ \ 9{,}36\ \ 11{,}47\ \ 15{,}04\ |.$$

На следующей итерации задачи размещаем CH_2 на позицию, в которой обеспечивается максимальное значение частного показателя эффективности наблюдения. Эта позиция – $3H_7$.

Таким образом, задача решена. Суммарная эффективность наблюдения, полученная путем суммирования частных показателей эффективности, равна 202,2. Наблюдаемое пространство и размещенные СН представлены на рисунке 4.

Методика оценки погрешности приближенного алгоритма решения задачи размещения средств наблюдения

Нетрудно понять причину, в силу которой очень желательно иметь оценки погрешностей для приближенных алгоритмов. Наибольший интерес представляет тот момент, с какой степенью точности алгоритм на практике будет находить оптимальное решение.

Сформулируем некоторый общий подход к оценке погрешности алгоритма решения задачи размещения СН. Методика оценки описывается следующей блок-схемой (рис. 5).

Шаг 1. Получение плотности распределения индивидуальных задач размещения СН.

Шаг 2. Генерация индивидуальной задачи A_i размещения СН. Учет плотности распределения индивидуальных задач позволит получить адекватную оценку, максимально соответствующую практике.

Шаг 3. Решение задачи A_i методом полного перебора. Производится генерация всей совокупности возможных решений задачи и выбор из них оптимального. На выходе получим оптимальное решение задачи $A_i - r_i^0$.

Шаг 4. Решение задачи исследуемым алгоритмом. На выходе получим приближенное решение задачи $A_i - r_i^{'}$.

Шаг 5. Подсчет погрешности исследуемого алгоритма для индивидуальной задачи A_i:

$$L_i = \frac{r_i^0 - r_i^{'}}{r_i^0}.$$

Шаг 6. Подсчет итоговой погрешности исследуемого алгоритма на i-ой итерации:

$$L_i^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}.$$

Алгоритм выполняется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность вычисления

$$\left|L_i^0 - L_{i-1}^0\right| < \varepsilon.$$

Заключение

Таким образом, в данной статье был проведен анализ задачи размещения средств наблюдения. В результате была получена оценка временной сложности задачи. Исследование показало, что проблема характеризуется NP-полнотой. Знание такой характеристики задачи позволяет сосредоточить силы не на поиске точного полиномиального алгоритма, а на разработке приближенных методов решения, позволяющих получать квазиоптимальные решения за полиномиальное время.

Полученное доказательство NP-полноты определило создание приближенного алгоритма, описанного в статье.

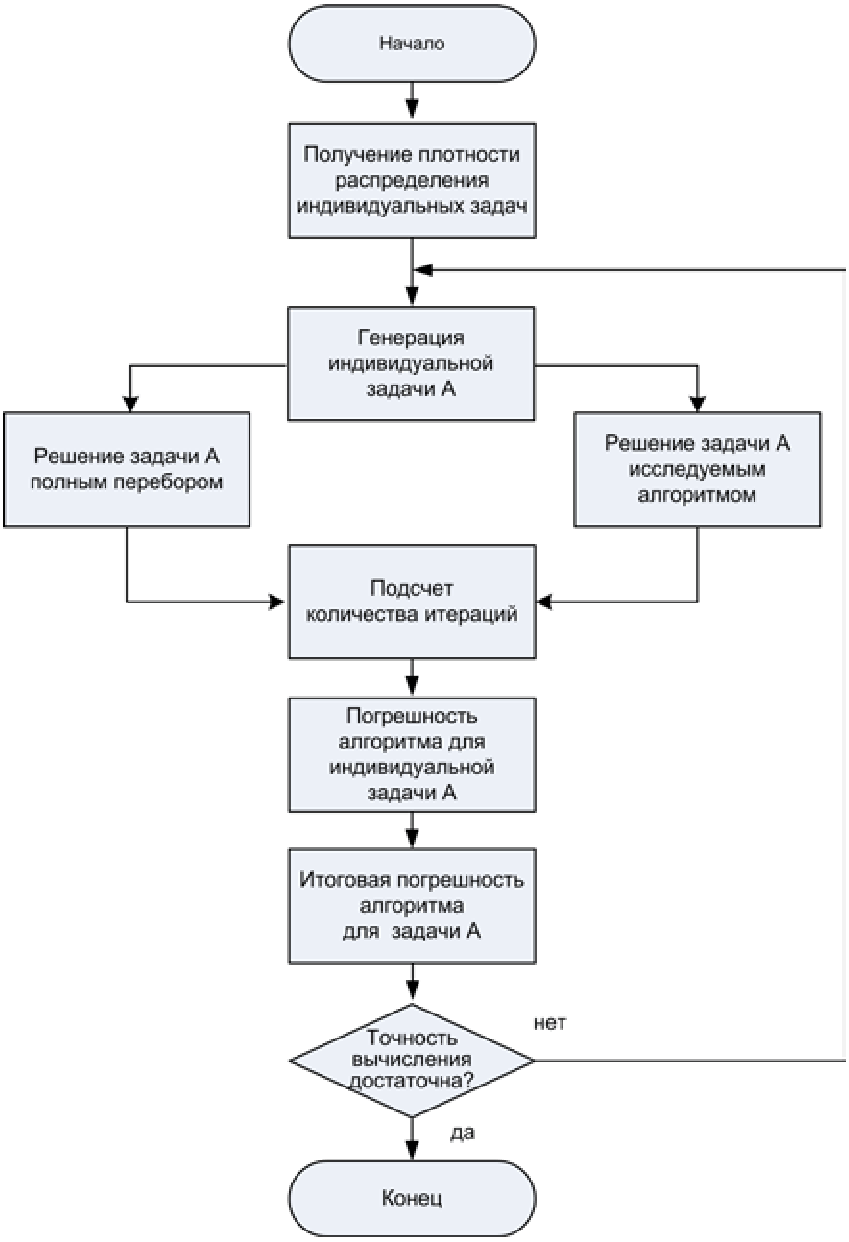

Рис. 5. Блок-схема методики оценки

В основу метода решения положен принцип поиска локальных оптимумов, позволяющий экономить время на решение задачи. Для проведения анализа данного алгоритма предложена методика оценки погрешности. Важно отметить, что разработанный подход к оценке погрешности может быть применим как для данного алгоритма, так и для других приближенных алгоритмов.

Работу по данной теме целесообразно продолжать в области улучшения точностных характеристик предложенного алгоритма и разработки аналитической методики его оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В. А. Эффективность обнаружения целей / В. А. Горбунов. – М. : Воениздат, 1979. – 160 с.
2. Афанасьев А. А. Эффективность обнаружения целей радиотехническими средствами наблюдения / А. А. Афанасьев. – М. : Воениздат, 1964. – 124 с.
3. Абчук В. А. Поиск объектов / В. А. Абчук. – М. : Советское радио, 1977. – 336 с.
4. Аверьянов В. Я. Разнесенные радиолокационные станции и системы / В. Я. Аверьянов. – М. : Наука и техника, 1978. – 184 с.
5. Кондратьев В. С. Многопозиционные радиотехнические системы / В. С. Кондратьев. – М. : Радио и связь, 1986. – 264 с.
6. Михайлова Т. А. Методика обоснования размещения средств радиоконтроля в заданном территориальном районе / Т. А. Михайлова // Радиотехника. – 2006. – № 1. – С. 88–91.
7. Гудков Д. Е. Решение задачи оптимизации размещения радиолокационных станций при помощи генетического алгоритма / Д. Е. Гудков // Научная сессия МИФИ. Информатика и процессы управления. – 2002. – № 3. – С. 24–25.
8. Beasley J. E. A genetic algorithm for the set covering problem / J. E. Beasley, P. C. Chu // European Journal of Operational Research. – 1996. – No 2. – P. 392–404.
9. Моисеев А. И. Подход к решению задачи оптимального распределения средств наблюдения системы освещения обстановки / А. И. Моисеев // Морская радиоэлектроника. – 2009. – № 4. – С. 64–66.
10. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 411 с.
11. Sahni S. P-complete approximation problems / S. Sahni, T. Gonzalez // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1976. – No 3. – P. 48–53.