УДК 159.9:629.735

В.В. Митюков, И.В. Извольский

МЕТОДИКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Митюков Виктор Вениаминович, *окончил Киевский институт инженеров гражданской авиации (КИИГА) и аспирантуру КИИГА. Программист 1 категории отдела вычислительной техники и информатики Ульяновского высшего авиационного училища гражданской авиации (института) (УВАУ ГА). Область научных интересов – вычислительные методы, моделирование, задачи аппроксимации, компьютерные обучающие программы. [e-mail: v.mityukov@gmail.com].*

Извольский Иван Валерьевич, *окончил УВАУ ГА, аспирант Санкт-Петербургского университета гражданской авиации. Командир воздушного судна ООО «Авиакомпания ВИМ АВИА», г. Москва. Область научных интересов – безопасность полетов. [e-mail: Ivan_sky@mail.ru].*

Аннотация

Предложена методика преобразования векторных величин между различными системами координат (СК), что позволяет воспроизводить процесс моделирования движения недеформируемого тела применительно к любому транспортному средству в проекциях на произвольную систему координат.

Ключевые слова: моделирование полета, системы координат, воздушное судно, вектор сил, инерциальная система, движение твердого тела.

Abstract

The article offers a conversion of vector quantities between different coordinate systems. That allows reproducing a modeling process for the movement of an undeformed solid for any vehicle in the projections to an arbitrary coordinate system.

Key words: flight modeling, coordinate system, aircraft, force vector, inertial system, solid movement.

С развитием вычислительной техники системы математического моделирования становятся все более важным инструментом решения многих задач, направленных на повышение уровня безопасности и экономичности эксплуатации транспортных средств.

В представленной работе традиционная модель динамики движения в виде системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс и движение вокруг центра масс недеформируемого тела, дополнена методикой отображения векторных компонентов между используемыми системами координат. Эта методика продемонстрирована на опыте и примере переходов между системами координат, которые применяются в уравнениях движения воздушного судна (ВС) и регламентированы ГОСТ 20058-80 [1].

При традиционном математическом моделировании полета обычно предполагается, что воздушное судно представляет собой твердое тело (недеформируемую конструкцию). Поскольку расстояния между любыми точками твердого тела сохраняются неизменными, то движение такой системы материальных точек сводится к сумме двух движений:

- перемещение центра масс твердого тела (на вектор r),
- вращение всех точек тела вокруг центра масс (на вектор угловой ориентации φ).

Из теоретической механики известно, что в *инерциальной* системе отсчета уравнение движения центра масс (1) и уравнение движения вокруг центра масс (2) в векторной форме имеют следующий вид:

$$m \cdot \frac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{R}, \qquad (1)$$

где m – общая масса системы материальных точек,

V – вектор скорости центра масс ВС,

R – суммарный вектор внешних сил.

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \mathrm{M}, \qquad (2)$$

где L – вектор момента количества движения ($\mathrm{L} = \mathrm{I} \cdot \omega$),

I – тензор инерции системы материальных точек,

ω – вектор скорости вращения системы материальных точек,

M – вектор главного момента от внешних сил.

Для ВС в качестве инерциальной системы отсчета обычно выбирается система координат, связанная с поверхностью Земли, оси которой фиксированы относительно этой поверхности. Такая система отсчета участвует в суточном вращении Земли вокруг своей оси и в годовом вращении вокруг Солнца. Однако порядок перегрузок, обусловленных влиянием этих вращений, весьма мал, даже для гиперзвукового ВС.

На практике чаще используются уравнения движения, записанные в проекционной системе координат, которая уже не будет являться инерциальной. При рассмотрении нескольких систем координат возникает понятие *сложного движения* — когда твердое тело движется относительно какой-либо системы координат, которая, в свою очередь, движется относительно другой системы отсчета. Обычно выбирают одну из СК за «абсолютную», другую называют «подвижной» и вводят следующие термины [2]:

- *абсолютное движение* – это движение точки/тела в базовой (инерциальной) СК.

- *относительное движение* – движение точки/тела относительно подвижной СК.

- *переносное движение* – движение подвижной СК относительно базовой.

Векторные уравнения (1) и (2) относительно инерциальной СК в проекциях на оси подвижной проекционной СК примут следующий вид:

$$m\cdot\left(\frac{\tilde{d}\mathrm{V}}{dt}+\omega\times\mathrm{V}\right)=\mathrm{R}, \qquad (3)$$

$$\frac{\tilde{d}\mathrm{L}}{dt}+\omega\times\mathrm{L}=\mathrm{M}, \qquad (4)$$

где $\frac{\tilde{d}}{dt}$ – оператор производной по времени относительно координат проекционной СК.

В зависимости от характера решаемой задачи полученные динамические уравнения могут дополняться:

- уравнениями, содержащими кинематические связи;
- уравнениями, задающими управляющие воздействия;
- уравнениями, моделирующими динамику двигателей;
- уравнениями, описывающими состояние внешней среды.

В первую очередь, систему уравнений (3)–(4) необходимо дополнить кинематическими уравнениями, определяющими (связывающими) значения векторов V и ω. Остальные уравнения влияют, главным образом, на представления правых частей динамических уравнений – векторов внешних сил R и моментов M.

$$\frac{d\mathrm{r}}{dt}=\mathrm{V}, \qquad (5)$$

где r – вектор положения центра масс ВС относительно инерциальной СК.

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega, \qquad (6)$$

где φ – вектор угловой ориентации ВС (угловые координаты).

Эти четыре векторных уравнения (3)–(6) динамики управляемого движения самолета в атмосфере Земли проецируются в 12 скалярных дифференциальных уравнений [3]. Первые шесть соответствуют уравнениям сил и моментов, а шесть остальных – кинематическим уравнениям в проекциях на оси проекционной СК.

Включенные в эти уравнения векторы обычно определены в различных СК, и их требуется приводить к проекционной СК. Например, вектор перемещения r и вектор силы тяжести G ориентированы относительно поверхности Земли; вектор тяги двигателя P фиксирован относительно конструкции ВС; аэродинамические силы и моменты приводятся в СК, связанной с вектором воздушной скорости V, и т. д.

Исходя из наглядных геометрических представлений и правил операций с матрицами, при выводе рабочих формул линейных преобразований координат в заявленной методике необходимо предусмотреть следующие 4 практических пункта:

1. Неважно, в какой очередности выполняется произведение матриц, однако важен их порядок в этом произведении. В общем случае произведение $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ не равно $\mathrm{B}\times\mathrm{A}$, вследствие чего важно строго соблюдать последовательность выполнения поворотов.

2. В трехмерном пространстве три координаты (компоненты) x, y, z вектора могут быть представлены в виде вектор-строки или вектор-столбца. Линейное преобразование вектор-столбца соответствует умножению его справа на матрицу этого преобразования. Таким образом, матрица каждого последующего преобразования становится левым сомножителем. В случае вектор-строки производится его умножение слева на транспонированную относительно предыдущего случая матрицу линейного преобразования, следовательно, каждая следующая транспонированная матрица является правым сомножителем.

3. Каждый последовательный поворот объекта (вектор-столбца) представляется матрицей, в которой элемент главной диагонали, соответствующий оси вращения, равен 1, а элементы проходящих через него строки и столбца равны нулю. Четыре остальных элемента – это синусы и косинусы соответствующего угла поворота. Последовательным поворотам вектор-столбца в положительном направлении вокруг осей x, y, z прямоугольной системы координат на соответствующие углы α, β, γ будут соответствовать следующие матрицы:

$$\mathbf{R}_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & 0 & \sin(\beta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\gamma)=\begin{pmatrix}\cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0\\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4. Перемещение или поворот рассматриваемой системы координат относительно неподвижного объекта эквивалентен переносу или повороту объекта относительно неподвижной системы координат в обратную сторону.

Системы координат, связанные с поверхностью Земли и с воздушным судном, регламентируются ГОСТ 20058-80 [1]. В соответствии с принятыми в нем определениями и обозначениями, основные СК могут быть представлены в виде схемы

Неподвижной системой координат является только *нормальная земная СК* $O_g X_g Y_g Z_g$, начало которой O_g

располагается на поверхности Земли, ось Y_g направлена вертикально вверх (против местного направления силы тяжести), а направления осей X_g и Z_g выбираются в соответствии с постановкой задачи.

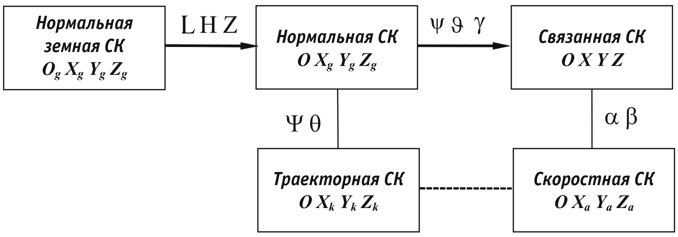

Рис. 1. Основные системы координат в ГОСТ 20058-80 и связи между ними

Остальные четыре системы координат являются подвижными, начало которых помещается в центр масс ВС.

Нормальная система координат $O X_g Y_g Z_g$.

Направления осей X_g Y_g Z_g выбираются параллельно соответствующим осям нормальной земной СК.

Связанная система координат $O X Y Z$.

Ось OX направлена к носовой, а ось OY – к верхней части ВС в плоскости его симметрии. Перпендикулярная к ним ось OZ направлена в сторону правой части ВС.

Траекторная система координат $O X_k Y_k Z_k$.

Продольная ось OX_k совпадает с направлением вектора скорости V_k (относительно нормальной земной СК), а ось OY_k расположена в вертикальной плоскости, вверх от Земли.

Скоростная система координат $O X_a Y_a Z_a$.

Продольная ось OX_a совпадает с направлением вектора воздушной скорости V, а ось OY_a лежит в плоскости симметрии ВС.

Положение этих СК относительно друг друга, используя трактовку определений ГОСТ 20058-80, можно характеризовать следующими параметрами:

L – *удаление* центра масс ВС вдоль земной поверхности (координата X_g);

H – *высота* центра масс ВС над земной поверхностью (координата Y_g);

Z – *боковое отклонение* центра масс ВС (координата Z_g);

ψ – угол *рыскания* (соответствует повороту связанной СК вокруг оси Y (оси Y_g));

ϑ – угол *тангажа* (соответствует повороту вокруг оси Z, повернутой на угол ψ);

γ – угол *крена* (соответствует повороту вокруг оси X, повернутой на углы ψ и ϑ);

Ψ – угол *пути* (поворот траекторной СК вокруг оси $Y_к$ (совмещенной с Y_g));

Θ– угол *наклона траектории* (поворот вокруг оси $Z_к$, повернутой на угол Ψ);

α – угол *атаки* (поворот связанной СК вокруг оси Z (совмещенной с Z_a));

β – угол *скольжения* (поворот вокруг оси Y, повернутой на угол α).

Переходы между представленными на рисунке 1 системами координат с учетом четырех вышеприведенных пунктов, включенных в данную методику, можно проиллюстрировать на следующих примерах.

Переход от нормальной СК (g) к связанной СК(_).

Пусть вектор силы тяжести объекта задан в нормальной СК – $G = \{0, -G, 0\}$. Чтобы получить его координаты относительно связанной СК нужно совместить некоторую систему координат наблюдателя с нормальной СК и, поворачивая СК наблюдателя последовательно на углы ψ, ϑ , γ вокруг промежуточных положений ее осей, совместить с осями связанной СК. Согласно пункту 4, это будет эквивалентно поворотам объекта (вектора G) относительно СК наблюдателя в обратные стороны, на углы $-\psi$, $-\vartheta$, $-\gamma$.

Тогда с учетом пунктов 2 и 3 общая матрица (R_g) преобразования координат этого вектора-столбца, заданных в нормальной СК, в систему координат наблюдателя, совмещенной со связанной СК, определится следующим произведением матриц:

$$R_{g\_}(\psi, \vartheta, \gamma) = R_x(-\gamma) \bullet R_z(-\vartheta) \bullet R_y(-\psi) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & \text{-}\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 0 \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \text{-}\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Аналогично, сверяясь с определениями ГОСТ 20058-80 [1], определяются матрицы перехода между остальными СК.

Переход от связанной СК (_) к скоростной СК (a).

$$R_{\_a}(\alpha, \beta) = R_y(\beta) \bullet R_z(\alpha) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{-}\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{-}\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Переход от нормальной СК (g) к траекторной СК (k).

$$R_{gk}(\Psi, \vartheta) = R_z(-\Theta) \bullet R_y(-\Psi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathit{cos}(\Psi) & 0 & \text{-}\mathit{sin}(\Psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathit{sin}(\Psi) & 0 & \mathit{cos}(\Psi) \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Обратные переходы между перечисленными системами координат осуществляются поворотами в обратную сторону и в обратной последовательности, т. е.:

$R_{\_g}(\psi, \vartheta, \gamma) = R_y(\psi) \bullet R_z(\vartheta) \bullet R_x(\gamma)$;

$R_{a\_}(\alpha,\beta) = R_z(-\alpha) \bullet R_y(-\alpha)$;

$R_{kg}(\Psi, \Theta) = R_y(\Psi) \bullet R_z(\Theta)$.

В СК, связанной с движущимся телом, входящий в выражение для вектора $L = I \cdot \omega$ тензор инерции I не будет зависеть от времени (если не учитывать влияние расходования топлива), поэтому такая СК традиционно выбирается в качестве проекционной. В проекциях уравнений (3)–(6) на оси связанной СК используются следующие 12 переменных [1]:

V_x ,V_y ,V_z – проекции вектора V_k земной скорости ВС на оси связанной СК;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора ω скорости вращения ВС на оси связанной СК;

L, H, Z – проекции вектора r положения центра масс ВС на оси инерциальной (нормальной земной) СК;

ψ, ϑ, γ – проекции вектора φ угловой ориентации ВС на оси промежуточных СК (в общем случае не ортогональных между собой).

Проекции векторных уравнений (3), (5) – движения центра масс, на оси связанной СК сводятся к проекции на эту СК вектора внешних сил R, входящего в правую часть уравнения (3), а также вектора положения центра масс $r = \{L, H, Z\}$. В вектор внешних сил R, входят:

- вектор тяги двигателей/винта P, фиксированный относительно связанной СК;
- главный вектор аэродинамических сил R_A, приведенный к полусвязанной СК (частный случай скоростной СК при $\beta = 0$);
- вектор силы веса G, заданный в нормальной СК.

Таким образом, уравнения движения центра масс относительно связанной СК в векторной форме принимают следующий вид:

$$m \cdot (\frac{d\mathbf{V}_k}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_k) = \mathbf{P} + \mathbf{R}_{a\_}(\alpha, 0) \cdot \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{g\_}(\psi, \vartheta, \gamma) \cdot \mathbf{G};$$

$$\mathbf{R}_{g\_}(\psi, \vartheta, \gamma) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_k .$$

Получение проекций векторных уравнений (4), (6) вращательного движения вокруг центра масс на оси связанной СК происходит сложнее, однако рассуждения остаются аналогичными. Тензор инерции I, включающий в себя моменты инерции I_i и центробежные моменты инерции Iij представляется относительно прямоугольной СК симметричной матрицей, в которой $I_{ij} = I_{ji}$. Для симметричных относительно вертикальной плоскости тел еще дополнительно $I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$, так как для всякой материальной точки с данными значениями $x_i\, y_i\, z_i$ найдется симметрично расположенная такая же масса с теми же значениями x_i и y_i, но с противоположным значением z_i. Таким образом:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Вектор главного момента внешних сил (M_R) включает в себя (придерживаясь обозначений ГОСТ 20058-80):

- вектор момента тяги двигателей M_P, фиксированный относительно связанной СК;
- главный вектор аэродинамических сил M, приведенный в полусвязанной СК.

$M_R = M_P + M = M_P + R_{a\_}(\alpha,0) \cdot M$.

Для производной вектора угловой ориентации $\frac{d\varphi}{dt}$ справедливы следующие рассуждения.

СК наблюдателя поворачивается на углы ψ, ϑ, γ вокруг промежуточных положений ее осей до совмещения с осями связанной СК. Вектор мгновенной скорости первого поворота будет направлен по оси Y СК наблюдателя. Вектор скорости второго поворота $\dot{\upsilon}$ направлен по оси Z (повернутой на угол ψ), плюс вектор скорости первого будет повернут еще на угол – ϑ относительно нового положения СК наблюдателя. После третьего поворота на угол γ вектор его скорости $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ будет направлен по оси X, уже совмещенной с осью X связанной СК, а векторы скорости предыдущих поворотов дополнительно повернуты на угол $-\gamma$ относительно окончательного положения СК наблюдателя. Суммарное преобразование в векторной форме примет следующий вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{R}_x(-\gamma) \cdot \dot{\boldsymbol{\upsilon}} + \mathbf{R}_x(-\gamma) \cdot \mathbf{R}_z(-\vartheta) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} .$$

Отсюда динамическое и кинематическое уравнения вращения вокруг центра масс ВС относительно связанной СК в векторной форме принимают следующий вид:

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_P + \mathbf{R}_{a\_}(\alpha, 0) \cdot \mathbf{M};$$

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} + \mathbf{R}_x(-\gamma) \cdot \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} + \mathbf{R}_x(-\gamma) \cdot \mathbf{R}_z(-\vartheta) \cdot \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \boldsymbol{\omega} .$$

Выводы

В работе систематизированы разрозненные сведения о системах координат и параметрах, определяющих их положение относительно друг друга, исходя из опыта работы с регламентированными системами координат, на которые традиционно проецируются векторные компоненты уравнений движения воздушного судна.

Приняты 4 соглашения, позволяющие однозначно толковать элементарные преобразования координат путем перемножения матриц. Приведены примеры составления последовательностей из этих элементарных преобразований с целью отображения векторных величин, заданных в одной системе координат, на другую систему координат.

Даже при наличии справочников и таблиц, регламентирующих переходы между стандартизованными системами координат, такая обобщенная методика способствует более правильному их пониманию. А при необходимости преобразований координат в нестандартных случаях, когда нужные таблицы отсутствуют, наличие предложенной методики является несомненным подспорьем.

Полученные векторные уравнения движения центра масс и вращения вокруг центра масс в развернутой матричной форме составляют каркас уравнений движения твердого тела в проекциях на оси подвижной, связанной СК. В матричной форме векторное произведение двух векторов, например, для $(a \times b)$, может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Тогда относительно 12 переменных V_x, V_y, V_z, ω_x, ω_y, ω_z, L, H, Z, ψ, ϑ, γ и их производных по времени матричная форма уравнений движения твердого тела принимает следующий вид:

Уравнения движения центра масс:

$$m\left\{\begin{pmatrix} dV_x/dt \\ dV_y/dt \\ dV_z/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 0 \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 0 \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dL/dt \\ dH/dt \\ dZ/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}.$$

Уравнения вращения вокруг центра масс:

$$\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_{Px} \\ M_{Py} \\ M_{Pz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{xa} \\ M_{ya} \\ M_{za} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} d\gamma/dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \times \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\vartheta/dt \end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 0 \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ d\psi/dt \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Для получения численного решения этих уравнений (зависимостей от времени перечисленных выше 12 переменных) дополнительно требуется разрешить их относительно производных, т. е. привести к виду, в котором в левой части будут находиться только 12 входящих в эти уравнения производных. К полученным дифференциальным уравнениям добавляются еще алгебраические уравнения, связывающих углы α, β, Ψ, Θ, которые, в свою очередь, можно выразить через перечисленные выше 12 параметров и их производные.

Аналогичным путем, используя вышеприведенную методику, можно последовательно составить системы уравнений в проекциях на другие системы координат.

Следует добавить, что компоненты векторов аэродинамических сил и моментов выражаются на основании теории подобия и размерностей. Входящие в них безразмерные коэффициенты выражаются в виде функциональных зависимостей от кинематических параметров движения и параметров подобия, зависящих от режима полета и конфигурации ВС (механизации крыла, шасси и т.д.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. – М.: Издательство стандартов, 1981. – 53 с.

2. Халфман Р. Динамика: [пер.с англ.] –М.: Наука, 1972. – 568 с.

3. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник / Горбатенко С.А. [и др.]. – М., 1971. – 352 с.