УДК 519.711:681.5

И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова

# АДАПТИВНЫЙ КВАДРАТНО-КОРНЕВОЙ КОВАРИАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ

***Семушин Иннокентий Васильевич,*** *доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные технологии» Ульяновского государственного университета (УлГУ). Область научных интересов – диагностика, фильтрация и управление в стохастических системах в условиях неопределенности. Имеет научные публикации, монографии, патенты на изобретения. [e-mail: kentvsem@yandex.ru].*

***Цыганова Юлия Владимировна,*** *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информационные технологии» УлГУ. Область научных интересов – параметрическая идентификация стохастических систем, адаптивная фильтрация, разработка численно эффективных алгоритмов идентификации и адаптации систем. Имеет научные публикации. [e-mail: tsyganovajv@mail.ru].*

Аннотация

В работе предложен новый адаптивный квадратно-корневой алгоритм фильтрации, который является численно устойчивым по отношению к ошибкам машинного округления и позволяет совместить процессы идентификации неизвестных параметров линейной стохастической системы и адаптивного оценивания ее состояния по методу вспомогательного функционала качества.

Ключевые слова: адаптивная фильтрация, параметрическая идентификация, фильтр Калмана, квадратно-корневой ковариационный фильтр, вспомогательный функционал качества.

***Innokenty Vasilyevich Semushin,*** *Doctor of Engineering, Professor of the Chair 'Information Technologies' at the Ulyanovsk State University; interested in diagnostics, filtering and control in stochastic systems under uncertain conditions; has papers, monographs, patents. e-mail: kentvsem@yandex.ru.*

***Yuliya Vladimirovna Tsyganova,*** *Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Chair 'Information Technologies' at the Ulyanovsk State University; interested in parametric identification of stochastic systems, adaptive filtering, development of numerically efficient algorithms of system identification and adaptation; author of papers. e-mail: tsyganovajv@mail.ru.*

Abstract

The article proposes a new adaptive square-root algorithm for filtering, being numerically stable regarding errors of rounding made by computers and allowing mapping of the identification processes for unknown parameters of linear stochastic system and adaptive evaluation of its state as per the method of auxiliary functional of quality.

Key words: adaptive filtering, parametric identification, Kalman filter, square-root covariance filter, additional functional of quality.

## Введение

Обработка измерительной информации в навигационных комплексах опирается на развитый аппарат теории оптимальной фильтрации и идентификации моделей систем. Зарубежные материалы и отечественная литература дают широкое представление об этих методах. За последние десятилетия созданы численно устойчивые реализации фильтра Калмана, включающие класс квадратно-корневых алгоритмов, которые позволяют обрабатывать данные с двойной точностью. Это свойство позволяет считать данный класс алгоритмов предпочтительным для практики [1]. Вместе с тем в отечественной литературе эффективные квадратно-корневые алгоритмы фильтрации освещены слабо. Еще менее подробно представлены так называемые совмещенные алгоритмы (Kailath [1] и др.). Важное место занимают адаптивные методы, применение которых – вынужденное из-за априорной неопределенности. И этим методам посвящено большое число работ.

Методы адаптации систем могут быть отнесены к двум крупным категориям [2]: пассивные или активные. Согласно пассивному принципу, для адаптации фильтра сначала оценивают неизвестные характеристики внешней (сигнально-помеховой) обстановки, а затем используют эти оценки в алгоритмах как «истинные». Принцип пассивен в том смысле, что оценивание происходит в разомкнутой цепи – без слежения за фактическим уровнем качества системы. Второй принцип активен в том смысле, что адаптивный фильтр контролирует степень удаления своего критерия качества от оптимума. Эта концепция либо пассивного, либо активного принципа адаптации отличается от терминов «пассивный» / «активный» в других работах, например, в известной монографии Дж. Саридиса [3] и недавней книге В.И. Денисова [4] и других (Серия «Монографии НГТУ», 2009).

Активный принцип адаптации, как он понимается здесь, предложен и описан в ряде работ (например, [5], [6] или [7]). Он детально характеризуется как метод вспомогательного функционала качества и в этой работе, но с новым содержанием.

Традиционно, для построения вспомогательного функционала качества применяли адаптивный фильтр в форме стандартного алгоритма Калмана и градиент наблюдаемого функционала вычисляли по отношению к параметрам этого фильтра. Есть два обстоятельства, побуждающие искать лучшее решение. Первое – стандартный алгоритм может быть численно неустойчив; выход – применять упомянутые выше устойчивые реализации фильтра. Второе – градиент по настраиваемым параметрам адаптивного фильтра приводит к моделям чувствительности с сильно разреженными матрицами, т. е. дифференцированные по параметрам фильтра алгоритмы адаптации получаются неэффективными и неустойчивыми для вычислений; выход – применять дифференцирование не по параметрам фильтра, а по параметрам неопределенности в модели поступающей информации. Целью настоящей работы является улучшение качества динамического процесса активной адаптации фильтра на основе отмеченных двух подходов.

## Постановка задачи

Рассмотрим данные в виде стохастической линейной дискретной системы

$$x_t = \Phi(\Theta)x_{t-1} + \Gamma(\Theta)w_{t-1}, \tag{1}$$

$$z_t = H(\Theta)x_t + v_t \tag{2}$$

с вектором состояния $x_t \in \Re^n$ и вектором измерения $z_t \in \Re^m$, где $\{w_0, w_1, \ldots\}$ и $\{v_1, v_2, \ldots\}$ – $q$-мерная и $m$-мерная независимые последовательности независимых и одинаково распределенных случайных векторов с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями $Q(\Theta)$ и $R(\Theta)$ соответственно. Эти последовательности не зависят от случайного начального состояния системы $x_0 \in \mathrm{N}(\bar{x}_0(\Theta), P_0(\Theta))$.

Предположим, что описывающие систему (1), (2) матрицы зависят от неизвестного параметра $\Theta \in \Re^p$, причем элементы указанных матриц являются дифференцируемыми по $\theta_i$ функциями, где $\theta_i$ – $i$-й элемент вектора $\Theta$, $i = 1, \ldots, p$. Таким образом, параметрами адаптивного фильтра можно считать оценки $\theta_i$. Тогда возникает задача их идентификации, но в активном принципе это должно происходить как процесс нахождения оптимума вспомогательного (одновременно, и исходного) критерия качества функционирования фильтра.

Для решения задачи по методу вспомогательного функционала качества введем ряд предположений: пусть матрица $R > 0$, матрица $P_0 \ge 0$ и $\Gamma Q \Gamma^T \ge 0$, система (1), (2) стабилизируемая и полностью наблюдаемая, причем все частные индексы наблюдаемости [6] $p_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ известны и не зависят от параметра $\Theta$.

Так как состояние недоступно наблюдению, адаптивный фильтр строим в форме фильтра Калмана. Для повышения точности алгоритма вместо стандартного фильтра Калмана будем рассматривать квадратно-корневой ковариационный фильтр (ККК Ф) [8], который зависит от неизвестного параметра $\Theta$. В случае его совпадения с оптимальным («истинным») значением $\Theta$*, полученная оценка вектора состояния «автоматически» будет оптимальной в среднеквадратическом смысле, т. е. будет доставлять минимум также и исходному функционалу качества (ИФК):

$$J_{ИФК} = \tfrac{1}{2} E\{\|e_t\|^2\}. \tag{3}$$

Область определения ИФК включает в себя все одношаговые оценки предсказания вектора состояния $x_t$, полученные по доступным измерениям $Z_1^t = [z_1^T \mid z_2^T \mid \ldots \mid z_t^T]^T$, а $e_t$ – ошибка предсказания. Препятствием для активной адаптации фильтра является то, что функционал (3) – теоретический, но не практический: ошибка et принципиально не известна, т. е. этот ИФК для численных методов оптимизации не доступен. На это препятствие первыми обратили внимание Prouza [9], Sefl [10] и Горский [11]. Его первыми преодолели Семушин [12] и Хэмптон [13]. Семушин разработал теорию активной адаптации [2, 14], а Perriot-Mathonna [15] использовал результаты Льюнга [16] по сходимости настраиваемой модели для исследования сходимости фильтра Хэмптона.

Таким образом, препятствие оказалось преодолимым, поскольку в [2, 14] был предложен метод построения вспомогательного функционала качества (ВФК):

$$J_{ВФК} = \tfrac{1}{2} E\{\|\varepsilon_t\|^2\}, \tag{4}$$

который зависит только от доступных величин и достигает минимума одновременно с ИФК на множестве значений параметра $\hat{\Theta}$ – оценки параметра $\Theta$. Здесь $\varepsilon_t$ – вспомогательный процесс, доступный наблюдению, который необходимо сформировать. Метод ВФК минимизирует среднеквадратическую ошибку (СКО) фильтрации, а не СКО предсказания выхода, и в этом его принципиальное отличие от MPE-методов (Minimum Prediction Error) [16, 17].

## Построение адаптивного квадратно-корневого ковариационного алгоритма

Для построения ВФК перейдем от представления системы в виде (1), (2) к стандартной наблюдаемой модели, т. е. выполним соответствующее преобразование базиса в пространстве состояний. Далее, используя результаты работ [6, 7], построим вспомогательный функционал (4), а вспомогательный процесс зададим следующим образом:

$$\varepsilon_t = \varphi(Z_{t+1-s}^t) - \tilde{x}_{t+1-s}, \tag{5}$$

где преобразование $\varphi$ определено в [6];

$Z_{t+1-s}^t$ – составной вектор;

$s$ – максимальный из индексов наблюдаемости системы ($s = max\{ pk \mid k = 1, \ldots, m \}$);

$\tilde{x}_{t+1-s}$ – оценка предсказания, полученная от адаптивного фильтра.

*Теорема 1*. [7] Пусть задан ИФК в виде (3) – СКО фильтрации. Тогда существует ВФК в виде (4), который зависит только от вспомогательного наблюдаемого процесса (5), и при этом выполняется условие $J_{ВФК} = J_{ИФК} + const$, в котором величина const не зависит от параметров фильтра $\hat{\Theta}$ и, следовательно, ВФК достигает минимума одновременно с ИФК на множестве значений его параметров (рассматриваемых как оценки параметра неопределенности $\Theta$ источника данных).

Теорема 1 указывает, как строить реализуемый ВФК взамен недоступного ИФК, и тем самым открывает возможности применять весь аппарат и средства численной минимизации [18]. Все непоисковые методы требуют вычисления градиента ВФК. Пусть оценка ВФК равна $\hat{J}_{ВФК} = \frac{1}{2N}\sum_{k=t-N+1}^{t} \varepsilon_k^T \varepsilon_k$. Тогда $\frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta_i} = \frac{1}{N}\sum_{k=t-N+1}^{t} \varepsilon_k^T \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta_i}, i = 1, \ldots, p$.

Вычисление частных производных вспомогательного процесса требует записи уравнений дифференцированного фильтра, или так называемых уравнений чувствительности. Различные методы вычисления уравнений чувствительности на основе стандартного фильтра Калмана подробно обсуждаются в работе [19]. Если в методе ВФК применять адаптивный фильтр (АФ) в форме установившегося фильтра Калмана и градиент ВФК вычислять по отношению к параметрам этого АФ, то матрицы в уравнениях чувствительности АФ будут сильно разрежены, а весь алгоритм – неэффективен и неустойчив. Неизбежная защита от неустойчивости (например, по методу Джури) еще более усложняет вычисления. Поэтому в данной работе критерий ВФК будем дифференцировать не по параметрам АФ, а по параметрам неопределенности в модели поступающей информации.

Более того, поскольку хорошо известно, что стандартная форма фильтра Калмана является неустойчивой по отношению к ошибкам машинного округления, то следует предположить, что тем же недостатком будет обладать и дифференцированный фильтр.

Поэтому применим другой подход и разработаем алгоритм для вычисления частных производных $(\varepsilon_k)'_{\theta_i}$ непосредственно в терминах квадратно-корневого ковариационного фильтра. В работе [8] проведен численный анализ нескольких модификаций фильтра Калмана, среди которых в качестве наиболее устойчивого к ошибкам машинного округления рекомендован КККФ.

Ниже будем использовать следующие обозначения: квадратный корень матрицы $A$, полученный в разложении Холесского [20], обозначим как $S_A$($A = S_A S_A^T$), при этом $S_A$ – нижняя треугольная матрица; квадратные корни ковариационных матриц $\tilde{P}$ и $\hat{P}$, участвующие в уравнениях фильтра Калмана, обозначим $\tilde{S}$ и $\hat{S}$; и пусть $\overline{L}$ и $\overline{U}$ – строго нижняя и строго верхняя треугольные матрицы, $D$ — диагональная матрица.

На основе КККФ построим новый адаптивный квадратно-корневой ковариационный фильтр (АКККФ) и получим следующий основной результат.

*Теорема 2*. Пусть элементы матриц $\Phi$, $\Gamma$, $Q$, $H$, $R$ и $P_0$ в системе (1), (2) являются дифференцируемыми функциями по неизвестному параметру $\Theta \in \Re^p$. Тогда идентификация неизвестного параметра $\Theta$ и оценивание вектора состояния системы (1), (2) по критерию (4) могут выполняться одновременно с помощью АКККФ в следующем алгоритме:

0. *Инициализация*. Пусть $\hat{x}_0 = \bar{x}_0(\Theta)$, $\Phi = \Phi(\Theta)$, $\Gamma = \Gamma(\Theta)$, $R=R(\Theta)>0$, $R = S_R S_R^T$, $Q=Q(\Theta)\geq 0$, $Q = S_Q S_Q^T$, $P_0=P_0(\Theta)>0$, $P_0 = \hat{S}_0 \hat{S}_0^T$. Вычислить $\partial\hat{S}_0 / \partial\theta_i$, $\partial\hat{x}_0/\partial\theta_i$ иположить $\hat{J}_{ВФК} = 0$, $\partial\hat{J}_{ВФК}/\partial\theta_i = 0$ ($i=1,\ldots,p$).

При заданных начальных условиях рекуррентно вычислять ($t = 1,\ldots,N$):

*1. Экстраполяция.*

1.1. Вычислить оценку вектора состояния: $\tilde{x}_t = \Phi\hat{x}_{t-1}$.

1.2. Для каждого $\theta_i$, $i = 1, \ldots, p$ вычислить: $\frac{\partial\tilde{x}_t}{\partial\theta_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i}\hat{x}_{t-1} + \Phi\frac{\partial\hat{x}_{t-1}}{\partial\theta_i}$.

1.3. Вычислить квадратный корень ковариационной матрицы $\tilde{S}_t$:

$$\tilde{T}_t \begin{bmatrix} \hat{S}_{t-1}^T \Phi^T \\ S_Q^T \Gamma^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_t^T \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\tilde{T}_t$ – матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду правой части выражения (6).

1.4. Для каждого $\theta_i$, $i = 1, \ldots, p$ применить ортогональное преобразование $\tilde{T}_t$ из (6):

$$\tilde{T}_t \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(\hat{S}_{t-1}^T \Phi^T\right)}{\partial\theta_i} \\ \dfrac{\partial\left(S_Q^T \Gamma^T\right)}{\partial\theta_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ C_i \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где через $A_i$ и $C_i$ обозначены соответствующие матричные блоки размеров nЧn и sЧn в правой части выражения (7).

1.5. Для каждого $\theta i$, $i = 1, \ldots, p$ вычислить:

$$\frac{\partial\tilde{S}_t^T}{\partial\theta_i} = (\overline{L}_i^T + D_i + \overline{U}_i)\tilde{S}_t^T,$$

где $\overline{L}_i^T + D_i + \overline{U}_i = A_i \tilde{S}_t^{-T}$.

*2. Вычисление ВФК и его градиента.*

2.1. Вычислить вспомогательный процесс: $\varepsilon_t = \varphi\,(Z_{t+1-s}^t) - \tilde{x}_{t+1-s}$.

2.2. Вычислить ВФК: $\hat{J}_{ВФК} := \hat{J}_{ВФК} + \frac{1}{2t}\varepsilon_t^T \varepsilon_t$.

2.3. Для каждого $\theta_i$, $i = 1, \ldots, p$ вычислить:

$$\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial \tilde{x}_{t+1-s}}{\partial \theta_i},$$

$$\frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta_i} + \frac{1}{t}\left(\varepsilon_t^T \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i}\right).$$

*3. Фильтрация.*

3.1. Вычислить квадратный корень ковариационной матрицы $\hat{S}_t$:

$$\hat{T}_t \begin{bmatrix} S_R^T & 0 \\ \tilde{S}_t^T H^T & \tilde{S}_t^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_E^T & \Psi_t^T \\ 0 & \hat{S}_t^T \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где $\hat{T}_t$ – матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду правой части выражения (8).

3.2. Вычислить оценку вектора состояния: $\hat{x}_t = \tilde{x}_t + \Psi_t \overline{e}_t$, где $\overline{e}_t = S_E^{-1}(z_t - H\tilde{x}_t)$.

3.3. Для каждого $\theta_i$, $i = 1,\ldots,p$ применить ортогональное преобразование $\hat{T}_t$ из (8):

$$\hat{T}_t \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S_R^T}{\partial \theta_i} & 0 \\ \dfrac{\partial (\tilde{S}_{t-1}^T H^T)}{\partial \theta_i} & \dfrac{\partial \tilde{S}_t^T}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ V_i & W_i \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где через $X_i$, $Y_i$ и $V_i$, $W_i$ обозначены соответствующие матричные блоки размеров $m \times m$, $m \times n$ и $n \times m$, $n \times n$ в правой части выражения (10).

3.4. Для каждого $\theta_i$, $i = 1, \ldots, p$ вычислить матрицу $G$:

$$G = \overline{L}_i + D_i + \overline{U}_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ V_i & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_E^T & \Psi_t^T \\ 0 & \hat{S}_t^T \end{bmatrix}^{-1}. \qquad (10)$$

3.5. Далее для $i = 1, \ldots, p$ вычислить:

$$\frac{\partial \hat{S}_t^T}{\partial \theta_i} = \left(\overline{L}_i^{*T} + D_i^* + \overline{U}_i^*\right)\hat{S}_t^T,$$

$$\frac{\partial S_E^T}{\partial \theta_i} = \left(\overline{L}_i^{**T} + D_i^{**} + \overline{U}_i^{**}\right)S_E^T,$$

$$\frac{\partial \Psi_t}{\partial \theta_i} = Y_i^T + (\overline{L}_i^{**T} - \overline{L}_i^{**})\Psi_t^T + (V_i S_E^{-T})^T \hat{S}_i^T,$$

где $\overline{L}_i^*$, $D_i^*$ и $\overline{U}_i^*$ – составляющие части подматрицы $[G]_{col(m+1):(m+n)}^{row(m+1):(m+n)}$ (верхний и нижний индексы указывают область расположения матричного блока),

$\overline{L}_i^{**}$, $D_i^{**}$ и $\overline{U}_i^{**}$ – составляющие части подматрицы $[G]_{col\,1:m}^{row\,1:m}$.

3.6. Для каждого $\theta_i$, $i = 1, \ldots, p$ вычислить:

$$\frac{\partial \hat{x}_t}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \tilde{x}_t}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Psi_t}{\partial \theta_i}\overline{e}_t + \Psi_t \frac{\partial \overline{e}_t}{\partial \theta_i},$$

где $\dfrac{\partial \overline{e}_t}{\partial \theta_i} = -S_E^{-1}\left(\dfrac{\partial S_E}{\partial \theta_i}\overline{e}_t + H\dfrac{\partial \tilde{x}_t}{\partial \theta_i}\right)$.

4. Оценка неизвестного параметра $\Theta \in R^p$:

$\hat{\Theta}_{\min} = \arg\min_{\Theta \in D(\Theta)} \hat{J}_{ВФК}(\Theta)$ (применяется один из стандартных численных методов).

Доказательство основано на свойствах ортогональных преобразований и ортогональных матриц, на правилах перемножения блочных матриц, на правилах дифференцирования матриц, а также на методах работы [21].

## Заключение

В заключение перечислим преимущества полученных в работе результатов:

1) Квадратно-корневые алгоритмы выгоднее, чем обычные (нефакторизованные) алгоритмы, поскольку:

- они удваивают точность решения уравнения Риккати при одном и том же машинном представлении вещественных чисел;
- удерживают положительную определенность решения уравнения Риккати (защищают от расходимости фильтра);
- они хорошо применимы и в активном принципе адаптации по методу ВФК;
- работают лучше в задаче с плохой обусловленностью схемы измерений и независимо от того, устойчива переходная матрица состояния $\Phi$ или нет.

2) Квадратно-корневые алгоритмы с ортогонализацией массивов данных выгодны по следующим причинам:

- их удобно распараллеливать; распараллеленные алгоритмы повышают скорость вычислений и отвечают новейшим тенденциям в организации высокопроизводительных вычислений;
- они привлекательны своей компактной формой, обладают «самоконтролем» – защитой против роста ошибок вычислений – и регулярностью вычислительной схемы; последнее упрощает реализацию фильтров в специализированных программных комплексах.

3) При использовании активного принципа адаптации по методу ВФК идентификация параметров исходной си-

стемы выгоднее, чем идентификация параметров адаптивного фильтра, так как:

• она учитывает динамику (переходный процесс) уравнений Риккати, что положительно влияет на качество оценок;

• количество идентифицируемых параметров может быть существенно (на порядок и более) ниже;

• градиент ВФК вычисляется проще – без построения моделей чувствительности по параметрам фильтра;

• она применима и в случае матриц, зависящих от времени, что критично для обработки навигационных данных.

Таким образом, предложенный АКККФ является новым, благодаря решению в нем важных задач:

• численное формирование ВФК, имеющего тот же минимизирующий аргумент, что и критерий оптимальной фильтрации;

• численная минимизация этого ВФК традиционными методами;

• совмещение процесса идентификации параметров данной системы с процессом адаптивного оценивания ее состояния.

Теоретическое и практическое исследование вычислительных свойств адаптивных квадратно-корневых алгоритмов является предметом ближайшего рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kailath T. Array algorithms for structured matrices // Presented at the conference of the International Linear Algebra Society. Winnipeg, USA, 1998.

2. Семушин И.В. Активные методы адаптации и контроля дискретных систем : дис. … д-ра техн. наук. – Л. : ЛИАП, 1987. – 426 с.

3. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. – М.: Наука, 1980.

4. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем / В.И. Денисов [и др.]. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 192 с. (Серия «Монографии НГТУ»).

5. Понырко С.А., Семушин И.В. Построение обучающихся винеровских фильтров при ограниченном объеме априорной информации // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. – 1971. – № 5. – С. 215–220.

6. Семушин И.В. Адаптивное управление стохастическим линейным объектом в условиях неопределенности // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление : сб. тр. – М.: ИСА РАН, 1994. – Вып. 2. – С. 104–110.

7. Semoushin I.V., Tsyganova J.V. Auxiliary Performance Functional Approach to Adaptive and Learning Filtering and Control // Conference Proceedings of European Control Conference ECC'99. Karlsruhe. Germany. 31 August-3 September 1999.

8. Verhaegen M., Van Dooren P. Numerical aspects of different Kalman filter implementations // IEEE Trans. On Automat. Contr. 1986. Vol. AC-31, No. 10. pp. 907–917.

9. Prouza L. Bemerkung zur linearen Predictoren mittels eines lernenden Filters. In: Trans. of the 1st Prague Conf. On the Inform. Theory and Statistical Decision Functions, Praha: Academia, 1957. pp. 330–334.

10. Sefl O. Filters and Predictors which Adapt Their Values to Unknown Parameters of the Input Process. In: Trans. of the 2st Prague Conf. On the Inform. Theory, Praha: Academia, 1960. pp. 418–423.

11. Горский А.А. Автоматическая оптимальная фильтрация // Изв. АН СССР, ОТН. Сер. Энергетика и автоматика. – 1962. – № 5. – С. 87–98.

12. Семушин И.В. Многоканальный адаптивный фильтр активного типа // Изв. вузов СССР. Сер. Приборостроение. – 1969. – № 10. – С. 47–50.

13. Hampton R.L.T. Unsupervised Learning of the Kalman Filter. Electronic Letters, 1971. Vol. 9, No. 17. pp. 383–384.

14. Семушин И.В. Исследование дискретных фильтров, самонастраивающихся по замкнутой схеме : дис. … канд. техн. наук. –Л. : ЛЭТИ, 1970. – 197 с.

15. Perriot-Mathonna D. On the Use of Ljung's Results for Studying the Convergence Properties of Hampton's Filter. // IEEE Trans. On Automat. Contr. 1980. Vol. AC-25, No. 6. pp. 1165–1169.

16. Ljung L. Convergence Analysis of Parametric Identification Methods // IEEE Trans. On Automat. Contr. 1978. Vol. AC-23, No. 5. pp. 770–783.

17. Caines Peter E. Linear Stochastic Systems. – New York : John Wiley&Sons, 1988. – 874 p.

18. Mosca E. Optimal, Predictive and Adaptive Control. – Prentice Hall, Inc., 1995.

19. Gupta N. K., Mehra R. K. Computational Aspects of Maximum Likelihood Estimation and Reduction in Sensitivity Function Calculations // IEEE Trans. On Automat. Contr. 1974. V. AC-19, No. 6. pp. 774-783.

20. Bierman G.J. Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. – New York : Academic Press, 1977.

21. Bierman G.J., Belzer M.R., Vandercraft J.S., Porter D.W. Maximum Likelihood Estimation Using Square Root Information Filters // IEEE Trans. On Automat. Contr. 1990. Vol. 35, No. 12. pp. 1293–1299.