УДК 621.377

А.К. Иванов

АЛГОРИТМ ПЛАНИРОВАНИЯ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

***Иванов Александр Куприянович**, доктор технических наук, окончил физический факультет Иркутского государственного университета, аспирантуру Московского высшего технического училища им. Н.Э.Баумана, докторантуру Ульяновского государственного технического университета. Главный научный сотрудник ФНПЦ ОАО «НПО «Марс», профессор кафедры «Вычислительная техника» УлГТУ. Имеет монографии, учебное пособие, статьи в области математического моделирования иерархических АСУ реального времени. [Тел.: (8422) 26-23-20, e-mail: mars@mv.ru].*

Аннотация

В статье рассматривается порядок оптимального распределения объектов управления иерархической системы на основе формирования параметров математических моделей от низших уровней к высшим. Приведены блок-схемы программ, реализующих предложенный алгоритм, и результаты экспериментальных исследований.

Ключевые слова: планирование, иерархические системы, математические модели.

***Alexander Kupriyanovich Ivanov,** Doctor of Engineering, graduated from the Faculty of Physics at the Irkutsk State University, finished his post-graduate studies at the Bauman Moscow Higher Technical School and his doctoral studies at the Ulyanovsk State Technical University; chief staff scientist of FRPC OJSC 'RPA 'Mars', Professor of the Chair 'Computer Engineering' of the Ulyanovsk State Technical University; author of monographs, a text-book and articles in the field of mathematical modeling of real-time hierarchical computer-aided control systems. Phone: +7 (8422) 262 320. e-mail: mars@mv.ru.*

Abstract

The article deals with an order of optimal distribution of objects of hierarchical-system control on basis of formation of mathematical-model parameters from the lowest levels to the highest ones. It also cites block-diagrams of programmes implementing the proposed algorithm and the results of experimental investigations.

Key words: planning, hierarchical systems, mathematical models.

Введение

Одна из задач планирования в иерархической системе управления состоит в оптимальном распределении объектов управления по объектам среды с целью оказания на них определенного воздействия для достижения поставленной цели [1, 2]. Планирование производится от высших уровней иерархии к низшим с детализацией объектов управления и объектов среды и распределением полученных элементов в рамках плана, заданного от вышестоящего органа управления. Но в общем случае математические модели планирования для каждого уровня не могут быть составлены без решения комплекса задач подчиненными органами управления с формированием параметров математических моделей. Поэтому в планировании выделяются два этапа: трудоемкий этап подготовки исходных данных с решением множества задач и более короткий этап поиска окончательного решения.

Необходимо оценить время решения десятков и сотен задач оптимального распределения объектов в органах управления и наметить пути его сокращения. В частности, для этого применимы аналитические зависимости оптимального решения от исходных данных, полученные в [1]. Задача актуальна в связи с тем, что процесс планирования должен выполняться с определенной периодичностью, соответствующей динамике изменения обстановки.

1 Состав задач оптимального распределения

В иерархической системе управления оптимальное распределение объектов управления по объектам среды с целью оказания на них определенного воздействия производится последовательно, начиная с высших уровней. Рассмотрим три уровня.

На первом уровне управления производится распределение объектов управления первого уровня $B_1, B_2, \ldots, B_n$ по объектам среды первого уровня $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Исходными данными для распределения являются вероятности достижения целей для каждой пары объектов:

	A_1	A_2	...	A_n
B_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1n}
B_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2n}
...	...	...	...	...
B_n	P_{n1}	P_{n2}	...	P_{nn}.

P_{ij} – вероятность достижения цели при воздействии i-го объекта управления на j-й объект среды.

Наиболее простой случай распределения состоит в назначении для воздействия каждому объекту управления только одного объекта среды.

Результатом является матрица $[X_{ij}]$, в которой

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й объект управления} \\ \quad \text{действует на } j\text{-й объект среды,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве одного из критериев оптимизации может быть принята суммарная вероятность по всем объектам:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} P_{ij} \to max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1;$$

$$B_1 \to A_{i_1}, \ B_2 \to A_{i_2}, \ \ldots, \ B_n \to A_{in},$$

Объекты среды первого уровня включают совокупность объектов второго уровня:

$$A_1 = (A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1m}), \ldots, A_n = (A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nm}).$$

Объекты управления первого уровня включают совокупность объектов второго уровня:

$$B_1 = (B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1m}), \ldots, B_n = (B_{n1}, B_{n2}, \ldots, B_{nm}).$$

На втором уровне в каждом органе управления решается задача распределения в соответствии с решением задачи на первом уровне:

	$A_{j_1 1}$	$A_{j_1 2}$	...	$A_{j_1 m}$
B_{11}	$P_{11 j_1 1}$	$P_{11 j_1 2}$	...	$P_{11 j_1 m}$
B_{12}	$P_{12 j_1 1}$	$P_{12 j_1 2}$	...	$P_{12 j_1 m}$
...	...	...	...	...
B_{1m}	$P_{1m j_1 1}$	$P_{1m j_1 2}$	...	$P_{1m j_1 m}$.

$P_{1u j_1 v}$ – вероятность достижения цели при действии на $j_1 v$-й объект среды $1u$-го объекта управления.

$$P_{1 j_1} = \sum_{u=1}^{m} \sum_{v=1}^{m} X_{1u j_1 v} P_{1u j_1 v} \to max;$$

$$\sum_{u=1}^{m} X_{1u j_1 v} = 1; \quad \sum_{v=1}^{m} X_{1u j_1 v} = 1;$$

$$B_{11} \to A_{j_1 j_{11}}, \ B_{12} \to A_{j_1 j_{12}}, \ \ldots, B_{1m} \to A_{j_1 j_{1m}};$$

....

	$A_{j_n 1}$	$A_{j_n 2}$	...	$A_{j_n m}$
B_{n1}	$P_{n1 j_n 1}$	$P_{n1 j_n 2}$	...	$P_{n1 j_n m}$
B_{n2}	$P_{n2 j_n 1}$	$P_{n2 j_n 2}$	...	$P_{n2 j_n m}$
...	...	...	...	...
B_{nm}	$P_{nm j_n 1}$	$P_{nm j_n 2}$	...	$P_{nm j_n m}$.

$P_{nu j_n v}$ – вероятность достижения цели при действии на $j_n v$-й объект среды nu-го объекта управления.

$$P_{n j_n} = \sum_{u=1}^{m} \sum_{v=1}^{m} X_{nu j_n v} P_{nu j_n v} \to \max;$$

$$\sum_{u=1}^{m} X_{nu j_n v} = 1; \quad \sum_{v=1}^{m} X_{nu j_n v} = 1;$$

$$B_{n1} \to A_{j_n j_{n1}}, \ B_{n2} \to A_{j_n j_{n2}}, \ \ldots, B_{nm} \to A_{j_n j_{nm}}.$$

Объекты среды второго уровня включают совокупность объектов третьего уровня:

$$A_{11} = (A_{111}, A_{112}, \ldots, A_{11m}), \ldots$$
$$\ldots, A_{1m} = (A_{1m1}, A_{1m2}, \ldots, A_{1mm});$$

....

$$A_{n1} = (A_{n11}, A_{n12}, \ldots, A_{n1m}), \ldots$$
$$\ldots, A_{nm} = (A_{nm1}, A_{nm2}, \ldots, A_{nmm}).$$

Объекты управления второго уровня включают совокупность объектов управления третьего уровня:

$$B_{11} = (B_{111}, B_{112}, \ldots, B_{11m}), \ldots$$
$$\ldots, B_{1m} = (B_{1m1}, B_{1m2}, \ldots, B_{1mm});$$

....

$$B_{n1} = (B_{n11}, B_{n12}, \ldots, B_{n1m}), \ldots$$
$$\ldots, B_{nm} = (B_{nm1}, B_{nm2}, \ldots, B_{nmm}).$$

На третьем уровне в каждом органе управления решается задача распределения в соответствии с решением задач на втором уровне:

	$A_{j_1 j_{11} 1}$	$A_{j_1 j_{11} 2}$	…	$A_{j_1 j_{11} \mathrm{m}}$
B_{111}	$P_{111\, j_1 j_{11} 1}$	$P_{111\, j_1 j_{11} 2}$	…	$P_{111\, j_1 j_{11} \mathrm{m}}$
B_{112}	$P_{112\, j_1 j_{11} 1}$	$P_{112\, j_1 j_{11} 2}$	…	$P_{112\, j_1 j_{11} \mathrm{m}}$
…	…	…	…	…
B_{11m}	$P_{11m\, j_1 j_{11} 1}$	$P_{11m\, j_1 j_{11} 2}$	…	$P_{11m\, j_1 j_{11} \mathrm{m}}$.

$P_{11u\, j_1 j_{11} v}$ – вероятность достижения цели при действии на $j_1 j_{11} v$-й объект среды $11u$-го объекта управления.

$$P_{11 j_1 j_{11}} = \sum\nolimits_{u=1}^{m} \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{11uj_1 j_{11} v} P_{11uj_1 j_{11} v} \to \max;$$

$$\sum\nolimits_{u=1}^{m} X_{11uj_1 j_{11} v} = 1; \quad \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{11uj_1 j_{11} v} = 1;$$

$$B_{111} \to A_{j_1 j_{11} j_{111}},\ B_{112} \to A_{j_1 j_{11} j_{112}},\ \ldots$$
$$\ldots,\ B_{11m} \to A_{j_1 j_{11} j_{11m}};$$

……………………………………………………………

	$A_{j_1 j_{1m} 1}$	$A_{j_1 j_{1m} 2}$	…	$A_{j_1 j_{1m} \mathrm{m}}$
B_{1m1}	$P_{1m1\, j_1 j_{1m} 1}$	$P_{1m1\, j_1 j_{1m} 2}$	…	$P_{1m1\, j_1 j_{1m} \mathrm{m}}$
B_{1m2}	$P_{1m2\, j_1 j_{1m} 1}$	$P_{1m2\, j_1 j_{1m} 2}$	…	$P_{1m2\, j_1 j_{1m} \mathrm{m}}$
…	…	…	…	…
B_{1mm}	$P_{1mm\, j_1 j_{1m} 1}$	$P_{1mm\, j_1 j_{1m} 2}$	…	$P_{1mm\, j_1 j_{1m} \mathrm{m}}$.

$P_{1mu\, j_1 j_{1m} v}$ – вероятность достижения цели при действии на $j_1 j_{1m} v$ -й объект среды $1mu$-го объекта управления.

$$P_{1mj_1 j_{1m}} = \sum\nolimits_{u=1}^{m} \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{1muj_1 j_{1m} v} P_{1muj_1 j_{1m} v} \to \max;$$

$$\sum\nolimits_{u=1}^{m} X_{1muj_1 j_{1m} v} = 1; \quad \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{1muj_1 j_{1m} v} = 1;$$

$$B_{1m1} \to A_{j_1 j_{1m} j_{1m1}},\ B_{1m2} \to A_{j_1 j_{1m} j_{1m2}},\ \ldots$$
$$\ldots,\ B_{1mm} \to A_{j_1 j_{1m} j_{1mm}};$$

……………………………………………………………

	$A_{j_n j_{n1} 1}$	$A_{j_n j_{n1} 2}$	…	$A_{j_n j_{n1} \mathrm{m}}$
B_{n11}	$P_{n11\, j_n j_{n1} 1}$	$P_{n11\, j_n j_{n1} 2}$	…	$P_{n11\, j_n j_{n1} \mathrm{m}}$
B_{n12}	$P_{n12\, j_n j_{n1} 1}$	$P_{n12\, j_n j_{n1} 2}$	…	$P_{n12\, j_n j_{n1} \mathrm{m}}$
…	…	…	…	…
B_{n1m}	$P_{n1m\, j_n j_{n1} 1}$	$P_{n1m\, j_n j_{n1} 2}$	…	$P_{n1m\, j_n j_{n1} \mathrm{m}}$.

$P_{n1u\, j_n j_{n1} v}$ – вероятность достижения цели при действии на jnjn1v -й объект среды $n1u$-го объекта управления.

$$P_{n1 j_n j_{n1}} = \sum\nolimits_{u=1}^{m} \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{n1uj_n j_{n1} v} P_{n1uj_n j_{n1} v} \to \max;$$

$$\sum\nolimits_{u=1}^{m} X_{n1uj_n j_{n1} v} = 1; \quad \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{n1uj_n j_{n1} v} = 1;$$

$$B_{n11} \to A_{j_n j_{n1} j_{n11}},\ B_{n12} \to A_{j_n j_{n1} j_{n11}},\ \ldots,\ B_{n1m} \to A_{j_n j_{n1} j_{n1m}};$$

……………………………………………………………

	$A_{j_n j_{nm} 1}$	$A_{j_n j_{nm} 2}$	…	$A_{j_n j_{nm} \mathrm{m}}$
B_{nm1}	$P_{nm1\, j_n j_{nm} 1}$	$P_{nm1\, j_n j_{nm} 2}$	…	$P_{nm1\, j_n j_{nm} \mathrm{m}}$
B_{nm2}	$P_{nm2\, j_n j_{nm} 1}$	$P_{nm2\, j_n j_{nm} 2}$	…	$P_{nm2\, j_n j_{nm} \mathrm{m}}$
…	…	…	…	…
B_{nmm}	$P_{nmm\, j_n j_{nm} 1}$	$P_{nmm\, j_n j_{nm} 2}$	…	$P_{nmm\, j_n j_{nm} \mathrm{m}}$.

$P_{nmu\, j_n j_{nm} v}$ – вероятность достижения цели при действии на $j_n j_{nm} v$ -й объект среды nmu-го объекта управления.

$$P_{nmj_n j_{nm}} = \sum\nolimits_{u=1}^{m} \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{nmuj_n j_{nm} v} P_{nmuj_n j_{nm} v} \to \max;$$

$$\sum\nolimits_{u=1}^{m} X_{nmuj_n j_{nm} v} = 1; \quad \sum\nolimits_{v=1}^{m} X_{nmuj_n j_{nm} v} = 1;$$

$$B_{nm1} \to A_{j_n j_{nm} j_{nm1}},\ B_{nm2} \to A_{j_n j_{nm} j_{nm2}},\ \ldots$$
$$\ldots,\ B_{nmm} \to A_{j_n j_{nm} j_{nmm}}.$$

2 Формирование исходных данных

Практически на первом уровне управления при решении задачи оптимального распределения для заданного множества объектов управления и объектов среды неизвестны вероятности P_{ij}. Для их определения при известных совокупностях объектов второго уровня необходимо решить на втором уровне в каждом органе управления n задач оптимального распределения. В свою очередь, на втором уровне управления неизвестны вероятности P_{iujv}. Для их определения на третьем уровне при известных совокупностях объектов третьего уровня необходимо решить в каждом органе управления nm задач распределения, что требует значительного времени.

На втором уровне решаются следующие задачи распределения:

	A_{11}	A_{12}	…	A_{1m}
B_{11}	$P_{11\,11}$	$P_{11\,12}$	…	$P_{11\,1m}$
B_{12}	$P_{12\,11}$	$P_{12\,12}$	…	$P_{12\,1m}$
…	…	…	…	…
B_{1m}	$P_{1m\,11}$	$P_{1m\,12}$	…	$P_{1m\,1m}$.

$P_{1u\,1v}$ – вероятность достижения цели при действии на $1v$-й объект среды $1u$-го объекта управления.

$$P_{11}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{1u1v}P_{1u1v}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{1u1v}=1;\quad\sum_{v=1}^{m}X_{1u1v}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{n1}	A_{n2}	…	A_{nm}
B_{11}	$P_{11\ n1}$	$P_{11\ n2}$	…	$P_{11\ nm}$
B_{12}	$P_{12\ 11}$	$P_{12\ 12}$	…	$P_{12\ 1m}$
…	…	…	…	…
B_{1m}	$P_{1m\ n1}$	$P_{1m\ n2}$	…	$P_{1m\ nm}$.

$P_{1u\ nv}$ – вероятность достижения цели при действии на nv-й объект среды $1u$-го объекта управления.

$$P_{1n}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{1unv}P_{1unv}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{1unv}=1;\quad\sum_{v=1}^{m}X_{1unv}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{11}	A_{12}	…	A_{1m}
B_{n1}	$P_{n1\ 11}$	$P_{n1\ 12}$	…	$P_{n1\ 1m}$
B_{n2}	$P_{n2\ 11}$	$P_{12\ 12}$	…	$P_{12\ 1m}$
…	…	…	…	…
B_{nm}	$P_{nm\ 11}$	$P_{nm\ 12}$	…	$P_{nm\ 1m}$.

$P_{nu\ 1v}$ – вероятность достижения цели при действии на $1v$-й объект среды nu-го объекта управления.

$$P_{n1}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{nu1v}P_{nu1v}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{nu1v}=1;\quad\sum_{v=1}^{m}X_{nu1v}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{n1}	A_{n2}	…	A_{nm}
B_{n1}	$P_{n1\ n1}$	$P_{n1\ n2}$	…	$P_{n1\ nm}$
B_{n2}	$P_{n2\ n1}$	$P_{n2\ n2}$	…	$P_{n2\ nm}$
…	…	…	…	…
B_{nm}	$P_{nm\ n1}$	$P_{nm\ n2}$	…	$P_{nm\ nm}$.

$P_{nu\ nv}$ – вероятность достижения цели при действии на nv-й объект среды nu-го объекта управления.

$$P_{nn}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{nunv}P_{nunv}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{nunv}=1;\quad\sum_{v=1}^{m}X_{nunv}=1;$$

На третьем уровне решаются следующие задачи распределения:

	A_{111}	A_{112}	…	A_{11m}
B_{111}	$P_{111\ 111}$	$P_{111\ 112}$	…	$P_{111\ 11m}$
B_{112}	$P_{112\ 111}$	$P_{112\ 112}$	…	$P_{112\ 11m}$
…	…	…	…	…
B_{11m}	$P_{11m\ 111}$	$P_{11m\ 112}$	…	$P_{11m\ 11m}$.

$P_{11u\ 11v}$ – вероятность достижения цели при действии на $11v$-й объект среды $11u$-го объекта управления.

$$P_{1111}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{11u11v}P_{11u11v}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{11u11v}=1;\quad\sum_{v=1}^{m}X_{11u11v}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{1m1}	A_{1m2}	…	A_{1mm}
B_{111}	$P_{111\ 1m1}$	$P_{111\ 1m2}$	…	$P_{111\ 1mm}$
B_{112}	$P_{112\ 1m1}$	$P_{112\ 1m2}$	…	$P_{112\ 1mm}$
…	…	…	…	…
B_{11m}	$P_{11m\ 1m1}$	$P_{11m\ 1m2}$	…	$P_{11m\ 1mm}$.

$P_{11u\ 1mv}$ – вероятность достижения цели при действии на $1mv$-й объект среды $11u$-го объекта управления.

$$P_{111m}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{11u1mv}P_{11u1mv}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{11u1mv}=1;\quad\sum_{v=1}^{m}X_{11u1mv}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{111}	A_{112}	…	A_{11m}
B_{1m1}	$P_{1m1\ 111}$	$P_{1m1\ 112}$	…	$P_{1m1\ 11m}$
B_{1m2}	$P_{1m2\ 111}$	$P_{1m2\ 112}$	…	$P_{1m2\ 11m}$
…	…	…	…	…
B_{1mm}	$P_{1mm\ 111}$	$P_{1mm\ 112}$	…	$P_{1mm\ 11m}$.

$P_{1mu\ 11v}$ – вероятность достижения цели при действии на $11v$-й объект среды $1mu$-го объекта управления.

$$P_{1m11}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{1mu11v}P_{1mu11v}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{1mu11v}=1;\quad\sum_{v=1}^{m}X_{1mu11v}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{1m1}	A_{1m2}	…	A_{1mm}
B_{1m1}	$P_{1m1\,1m1}$	$P_{1m1\,1m2}$	…	$P_{1m1\,1mm}$
B_{1m2}	$P_{1m2\,1m1}$	$P_{1m2\,1m2}$	…	$P_{1m2\,1mm}$
…	…	…	…	…
B_{1mm}	$P_{1mm\,1m1}$	$P_{1mm\,1m2}$	…	$P_{1mm\,1mm}$.

P_{1mu1mv} – вероятность достижения цели при действии на $1mv$-й объект среды $1mu$-го объекта управления.

$$P_{1m1m}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{1mu1mv}P_{1mu1mv}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{1mu1mv}=1;\quad \sum_{v=1}^{m}X_{1mu1mv}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{111}	A_{112}	…	A_{11m}
B_{n11}	$P_{n11\,111}$	$P_{n11\,112}$	…	$P_{n11\,11m}$
B_{n12}	$P_{n12\,111}$	$P_{n12\,112}$	…	$P_{n12\,11m}$
…	…	…	…	…
B_{n1m}	$P_{n1m\,111}$	$P_{n1m\,112}$	…	$P_{n1m\,11m}$.

P_{n1u11v} – вероятность достижения цели при действии на $11v$-й объект среды $n1u$-го объекта управления.

$$P_{n111}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{n1u11v}P_{n1u11v}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{n1u11v}=1;\quad \sum_{v=1}^{m}X_{n1u11v}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{1m1}	A_{1m2}	…	A_{1mm}
B_{n11}	$P_{n11\,1m1}$	$P_{n11\,1m2}$	…	$P_{n11\,1mm}$
B_{n12}	$P_{n12\,1m1}$	$P_{n12\,1m2}$	…	$P_{n12\,1mm}$
…	…	…	…	…
B_{n1m}	$P_{n1m\,1m1}$	$P_{n1m\,1m2}$	…	$P_{n1m\,1mm}$.

P_{n1u1mv} – вероятность достижения цели при действии на $1mv$-й объект среды $n1u$-го объекта управления.

$$P_{n11m}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{n1u1mv}P_{n1u1mv}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{n1u1mv}=1;\quad \sum_{v=1}^{m}X_{n1u1mv}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{111}	A_{112}	…	A_{11m}
B_{nm1}	$P_{nm1\,111}$	$P_{nm1\,112}$	…	$P_{nm1\,11m}$
B_{nm2}	$P_{nm2\,111}$	$P_{nm2\,112}$	…	$P_{nm2\,11m}$
…	…	…	…	…
B_{nmm}	$P_{nmm\,111}$	$P_{nmm\,112}$	…	$P_{nmm\,11m}$.

P_{nmu11v} – вероятность достижения цели при действии на $11v$-й объект среды nmu-го объекта управления.

$$P_{nm11}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{nmu11v}P_{nmu11v}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{nmu11v}=1;\quad \sum_{v=1}^{m}X_{nmu11v}=1;$$

……………………………………………………………

	A_{1m1}	A_{1m2}	…	A_{1mm}
B_{nm1}	$P_{nm1\,1m1}$	$P_{nm1\,1m2}$	…	$P_{nm1\,1mm}$
B_{nm2}	$P_{nm2\,1m1}$	$P_{nm2\,1m2}$	…	$P_{nm2\,1mm}$
…	…	…	…	…
B_{nmm}	$P_{nmm\,1m1}$	$P_{nmm\,1m2}$	…	$P_{nmm\,1mm}$.

P_{nmu1mv} – вероятность достижения цели при действии на $1mv$-й объект среды nmu-го объекта управления.

$$P_{nm1m}=\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}X_{nmu1mv}P_{nmu1mv}\to\max;$$
$$\sum_{u=1}^{m}X_{nmu1mv}=1;\quad \sum_{v=1}^{m}X_{nmu1mv}=1.$$

3 Использование аналитических зависимостей

Решение nm задач распределения в каждом органе управления третьего уровня и последующее решение по m задач в органах управления второго уровня может потребовать при большой размерности много времени даже с использованием высокопроизводительных вычислительных средств. В результате разработанный план не будет соответствовать изменившейся обстановке. Сократить время решения таких задач позволяет аналитическая зависимость максимальной суммарной вероятности от исходной матрицы вероятностей, полученная в [1]:

$$\Theta^{(1)}=\overline{P}\cdot n,\quad \overline{P}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_{ij};$$

$$\Theta^{(2)}=\overline{\mathrm{P}}\cdot \mathrm{n}+\overline{\mathrm{P}^{(1)}}\cdot \mathrm{n},\quad \mathrm{P}^{(1)}=\begin{cases}\left(\mathrm{P_{ij}}-\overline{\mathrm{P}}\right),\ \mathrm{P_{ij}}\ge\overline{\mathrm{P}}\\ 0,\ \mathrm{P_{ij}}<\overline{\mathrm{P}}\end{cases};$$

$$\overline{P^{(1)}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{cases}\left(P_{ij}-\overline{P}\right), & P_{ij}\ge\overline{P}\\ 0, & P_{ij}<\overline{P}\end{cases};$$

$$\Theta^{(3)} = \overline{P}\cdot n + \overline{P^{(1)}}\cdot n + \overline{P^{(2)}},\quad P^{(2)} = \begin{cases}\left(P_{ij}^{(1)}-\overline{P^{(1)}}\right), & P_{ij}^{(1)}\ge\overline{P^{(1)}}\\ 0, & P_{ij}^{(1)}<\overline{P^{(1)}}\end{cases};$$

$$\overline{P^{(2)}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{cases}\left(P_{ij}^{(1)}-\overline{P^{(1)}}\right), & P_{ij}^{(1)}\ge\overline{P^{(1)}}\\ 0, & P_{ij}^{(1)}<\overline{P^{(1)}}\end{cases};$$

....

$$\Theta^{(k)} = \overline{P}\cdot n + \overline{P^{(1)}}\cdot n + \overline{P^{(2)}} + \ldots + \overline{P^{(k-1)}};$$

$$P^{(k-1)} = \begin{cases}\left(P_{ij}^{(k-2)}-\overline{P^{(k-2)}}\right), P_{ij}^{(k-2)}\ge\overline{P^{(k-2)}}\\ 0, P_{ij}^{(k-2)}<\overline{P^{(k-2)}}\end{cases};$$

$$\overline{P^{(k-1)}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{cases}\left(P_{ij}^{(k-2)}-\overline{P^{(k-2)}}\right), P_{ij}^{(k-2)}\ge\overline{P^{(k-2)}}\\ 0, P_{ij}^{(k-2)}<\overline{P^{(k-2)}}\end{cases};$$

$$P = F\left(\begin{bmatrix}P_{11} & \cdots & P_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{n1} & \cdots & P_{nn}\end{bmatrix}\right)\approx\Theta^{(k)},\quad k=1,2,3,\ldots.$$

Первичными исходными данными для решения задачи распределения на первом уровне управления являются вероятности достижения цели при действии на объекты среды третьего уровня объектов управления этого уровня, т.е. вероятности данного уровня:

$$\left(A_1,\ \ldots,\ A_n\right)\to\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nm}\end{pmatrix}\to$$

$$\to\left\{\begin{pmatrix}A_{111} & \cdots & A_{11m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1m1} & \cdots & A_{1mm}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}A_{n11} & \cdots & A_{n1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{nm1} & \cdots & A_{nmm}\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(B_1,\ \ldots,\ B_n\right)\to\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{n1} & \cdots & B_{nm}\end{pmatrix}\to$$

$$\to\left\{\begin{pmatrix}B_{111} & \cdots & B_{11m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{1m1} & \cdots & B_{1mm}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}B_{n11} & \cdots & B_{n1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{nm1} & \cdots & B_{nmm}\end{pmatrix}\right\};$$

$$\begin{array}{ccc} & & A_{j_1j_2j_3}\\ & & \uparrow\\ B_{i_1i_2i_3} & \to & \left\{P_{i_1i_2i_3j_1j_2j_3}\right\}\end{array},\quad i_1, j_1=\overline{1,n}; i_2, i_3, j_2, j_3=\overline{1,m}.$$

По ним находятся вероятности второго уровня:

$$P_{i_1i_2j_1j_2} = F\left(\begin{bmatrix}P_{i_1i_21j_1j_21} & \cdots & P_{i_1i_21j_1j_2m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{i_1i_2nj_1j_21} & \cdots & P_{i_1i_2nj_1j_2m}\end{bmatrix}\right)\approx\Theta^{(k)}.$$

Вероятности второго уровня позволяют определить вероятности первого уровня:

$$P_{i_1j_1} = F\left(\begin{bmatrix}P_{i_11j_11} & \cdots & P_{i_11j_1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{i_1nj_11} & \cdots & P_{i_1nj_1m}\end{bmatrix}\right)\approx\Theta^{(k)}.$$

Затем на первом уровне решается задача распределения с назначением каждому объекту управления одного объекта среды по критерию максимума суммы вероятностей достижения целей.

По результатам распределения на первом уровне решаются задачи на втором уровне. Окончательный результат получается при решении задач на третьем уровне по разработанным планам второго уровня.

4 Результаты экспериментальных исследований

Для решения задачи оптимального распределения при назначении одному объекту управления одного объекта среды используем последовательный случайный поиск (блок-схема алгоритма приведена на рисунке 1).

В таблице 1 приведены время поиска и оптимальное решение задач планирования различной размерности в зависимости от числа случайных перестановок.

Графики, приведенные на рисунках 2 и 3, отражают значительный рост времени расчетов при повышении точности решения за счет большего числа перестановок в алгоритме случайного поиска.

При решении десятков задач распределения в органах управления третьего уровня выигрыш от использования формулы составит несколько десятков часов в зависимости от размерности. Периодическое выполнение распределения в реальной обстановке с изменением состояния объектов накладывает дополнительные ограничения на время решения.

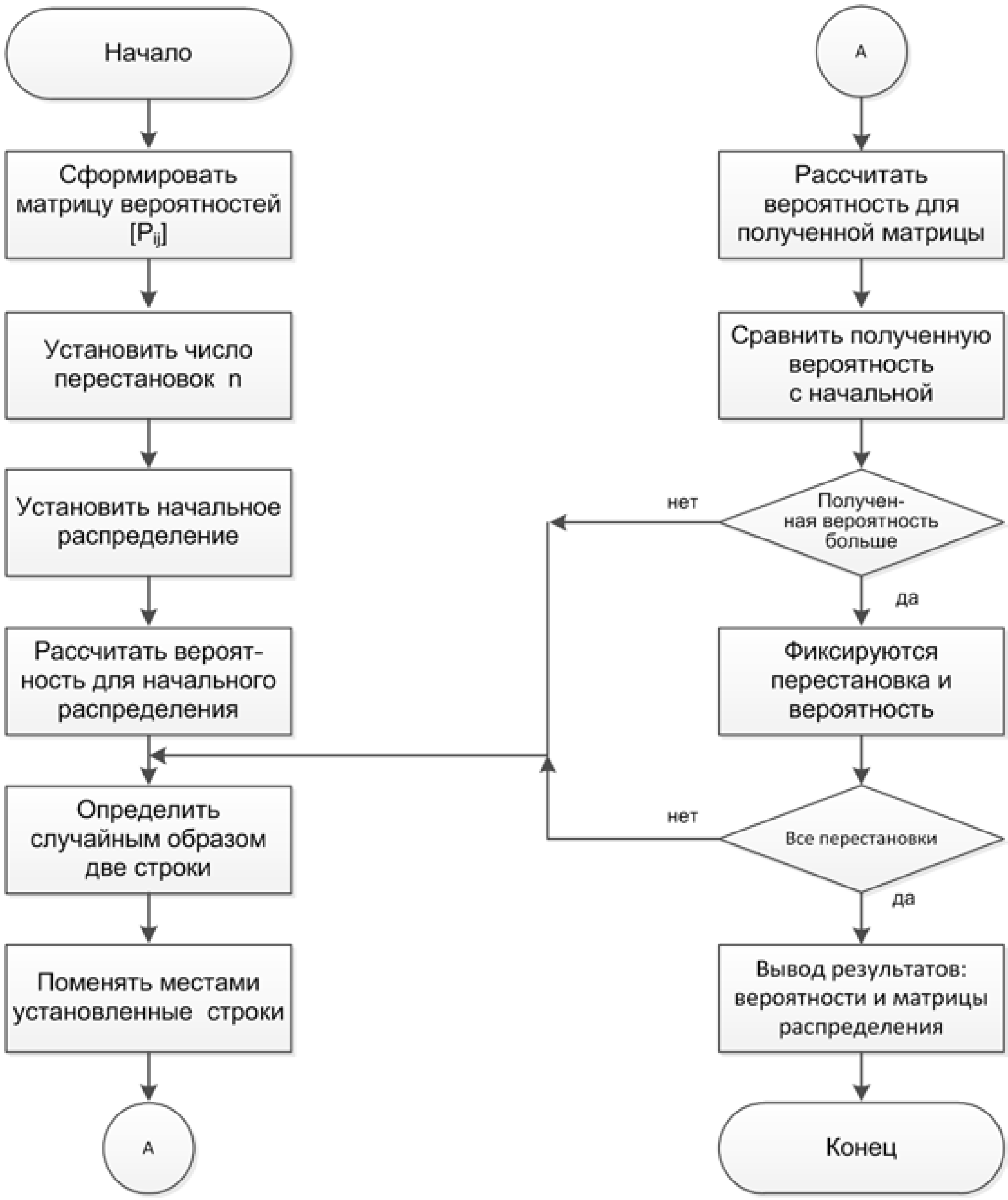

Рис. 1. Блок-схема алгоритма случайного поиска

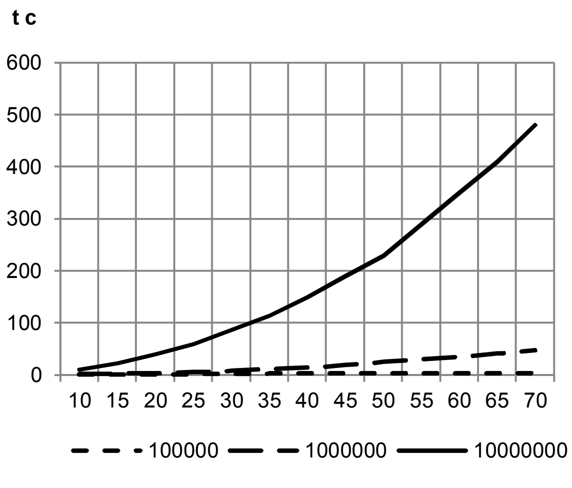

Рис. 2. Зависимость времени решения от размерности задачи ($n = \overline{10, 70}$)

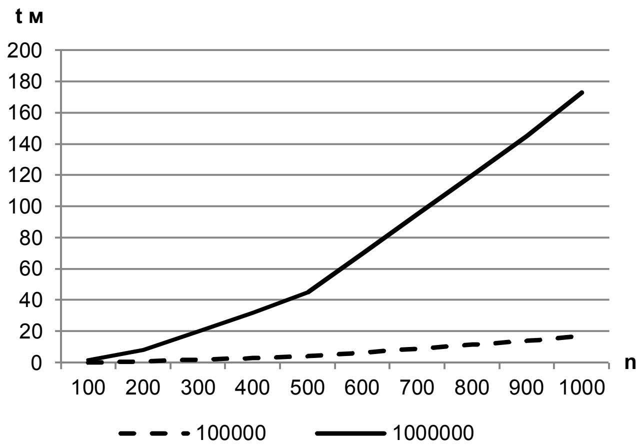

Рис. 3. Зависимость времени решения от размерности задачи ($n = \overline{100, 1000}$)

Таблица 1

Время и точность решения задач планирования

Размерность	Количество перестановок в алгоритме случайного поиска					
	0	100000	1000000	10000000	50000000	100000000
10	P=0.57 t= 0	P=0.84 t=1 с	P=0.85 t=2 с	P=0.86 t=11 с	P=0.87 t=55 с	P=0.88 t=110 с
15	P=0.50 t=0	P=0.81 t=1 с	P=0.83 t=3 с	P=0.86 t=23 с	P=0.88 t=114 с	P=0.91 t=229 с
20	P=0.47 t=0	P=0.85 t=1 с	P=0.86 t=4 с	P=0.88 t=40 с	P=0.89 t=200 с	P=0.90 t=8 мин
25	P=0.48 t=0	P=0.83 t=2 с	P=0.87 t=6 с	P=0.88 t=60 с	P=0.89 t=320 с	P=0.89 t=11 мин
30	P=0.41 t=0	P=0.87 t=2 с	P=0.91 t=8 с	P=0.92 t=87 с	P=0.93 t=8 мин	P=0.94 t=15 мин
35	P=0.61 t=0	P=0.86 t=3 с	P=0.90 t=12 с	P=0.91 t=114 с	P=0.92 t=10 мин	P=0.93 t=21 мин
40	P=0.47 t=0	P=0.89 t=3 с	P=0.90 t=15 с	P=0.92 t=150 с	P=0.92 t=13 мин	
50	P=0.46 t=0	P=0.87 t=3с	P=0.89 t=25 с	P=0.90 t=230 с	P=0.91 t=21 мин	
70	P=0.51 t=0	P=0.94 t=5 с	P=0.95 t=48 с	P=0.96 t=8 мин		
100	P=0.48 t=0	P=0.94 t=10 с	P=0.95 t=95 с	P=0.96 t=16 мин		
200	P=0.50 t=0	P=0.96 t=44 с	P=0.96 t=8 мин	P=0.96 t=77 мин		
500	P=0.49 t=0	P=0.94 t=257 с	P=0.96 t=45 мин			
1000	P=0.50 t=0	P=0.95 t=17 мин	P=0.95 t=3 час			

5 Общая задача распределения

Рассмотрим более общую задачу распределения, решаемую на низших уровнях иерархии. Каждый объект управления включает некоторое количество средств, которые может распределять по разным объектам среды. На каждый объект среды могут распределяться средства различных объектов управления. Вероятность достижения цели при действии на объекты среды зависит от количества и типов распределенных на него средств. Необходимо найти распределение, при котором суммарная вероятность достижения цели при действии на все объекты будет максимальной.

Таким образом, математическая модель планирования имеет следующий вид.

Есть n объектов среды $A_1, A_2, \dots, A_n$ и n объектов управления $B_1, B_2, \dots, B_n$ (количество объектов среды и объектов управления в данной задаче может быть различным). Каждый объект B_i включает m_i средств определенного типа. Вероятность достижения цели при действии на j-й объект одним средством i-го типа P_{ij} известна. При выделении j-му объекту среды i-м объектом управления m_{ij} средств вероятность достижения цели равна:

$$P_i^{(j)} = 1 - \left(1 - P_{ij}\right)^{m_{ij}} .$$

Общая вероятность достижения цели при действии на j-й объект среды всеми выделенными средствами равна:

$$P^{(j)} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i^{(j)}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_{ij}\right)^{m_{ij}} .$$

Распределение средств $\{m_{ij}\}$ должно обеспечивать максимум вероятности достижения цели при действии на все объекты среды:

$$P = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P^{(j)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_{ij}\right)^{m_{ij}}\right\};$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = m_i .$$

Для решения задачи можно использовать алгоритм последовательного случайного поиска.

На первом шаге все средства i-го объекта управления B_i назначаются i-му объекту среды A_i:

$$P_i^{(i)} = 1 - \left(1 - P_{ii}\right)^{m_i};$$

$$P^{(i)} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i^{(i)}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i\right)^{m_i};$$

$$P(1) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P^{(j)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i\right)^{m_i}\right\}.$$

На втором шаге производится случайное распределение средств всех объектов управления по всем объектам среды:

m'_{ij} – случайное число,

$$m'_{ij} \le m_i, m_{ij} = \left(m'_{ij} \cdot m_i\right) / \sum_{j=1}^{n} m_{ij};$$

$$P_i^{(j)} = 1 - \left(1 - P_{ij}\right)^{m_{ij}};$$

$$P^{(j)} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i^{(j)}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_{ij}\right)^{m_{ij}};$$

$$P(2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P^{(j)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i\right)^{m_i}\right\}.$$

Если сумма вероятностей достижения цели при действии на все объекты среды больше исходной $P(2) > P(1)$, то случайное распределение фиксируется и выполняется переход к другому шагу. В противном случае остается предыдущее распределение. Поиск останавливается на k-м шаге, когда после заданного числа перестановок не происходит роста оптимизируемого показателя. Решением является матрица распределения средств по объектам среды:

	A_1	A_2	…	A_n
B_1	m_{11}	m_{12}	…	m_{1n}
B_2	m_{21}	m_{22}	…	m_{2n}
…	…	…	…	…
B_n	m_{n1}	m_{n2}	…	m_{nn}.

Блок-схема алгоритма приведена на рисунке 4.

Рис. 4. Блок-схема общего алгоритма распределения

Результаты решения общей задачи распределения при следующих количествах средств объектов управления:

m_1=25, m_2=12, m_3=11, m_4=11, m_5=12, m_6=26, m_7=26, m_8=18, m_9=22, m_{10}=19, вероятности которых представлены в таблице 2, приведены в таблице 3.

Таблица 2

Вероятности достижения цели каждого средства объектов управления

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
B_1	0.08	0.05	0.04	0.09	0.09	0.02	0.01	0.01	0.01	0.07
B_2	0.07	0.07	0.06	0.03	0.04	0.09	0.04	0.04	0.07	0.07
B_3	0.10	0.04	0.05	0.03	0.08	0.08	0.06	0.08	0.05	0.06
B_4	0.06	0.09	0.07	0.02	0.05	0.05	0.02	0.01	0.06	0.07
B_5	0.01	0.10	0.09	0.07	0.10	0.03	0.08	0.08	0.05	0.07
B_6	0.02	0.03	0.10	0.04	0.02	0.10	0.04	0.01	0.02	0.09
B_7	0.06	0.07	0.02	0.07	0.01	0.04	0.10	0.06	0.04	0.05
B_8	0.10	0.04	0.04	0.05	0.01	0.09	0.08	0.02	0.10	0.05
B_9	0.02	0.09	0.05	0.03	0.09	0.06	0.02	0.07	0.10	0.06
B_{10}	0.04	0.05	0.03	0.02	0.07	0.10	0.07	0.07	0.06	0.07

Таблица 3

Оптимальное распределение средств объектов управления

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
B_1	4	2	4	6	1	0	1	3	1	3
B_2	0	2	2	0	3	1	2	1	1	0
B_3	3	0	1	0	2	1	2	1	1	0
B_4	1	1	1	0	1	1	3	1	1	1
B_5	2	1	0	0	3	1	3	1	0	1
B_6	1	1	3	4	2	4	3	1	2	5
B_7	2	4	0	6	0	1	5	4	2	2
B_8	1	3	2	0	3	1	3	1	3	1
B_9	0	5	1	1	2	3	0	4	5	1
B_{10}	2	1	1	1	2	4	3	1	3	1

Вероятности достижения цели при действии на каждый объект следующие:

A_1 – 0,65; A_2 – 0,74; A_3 – 0,59; A_4 – 0,70; A_5 – 0,69; A_6 – 0,76; A_7 – 0,81; A_8 – 0,59; A_9 – 0,74; A_{10} – 0,59;

Время решения общих задач распределения незначительно больше, но для них неизвестна аналитическая зависимость оптимального результата от исходных данных, и сократить время планирования до требуемого значения можно путем уменьшения числа перестановок в алгоритме поиска оптимального распределения и снижением точности результатов.

Заключение

Оптимальное планирование применения объектов управления в иерархической системе связано с решением большого числа задач распределения на всех уровнях иерархии для формирования исходных данных математических моделей. Как показывают экспериментальные исследования, время решения отдельных задач может быть значительным, что не позволит выполнить все расчеты в соответствии с динамикой изменения обстановки. Существенное уменьшение времени планирования достигается при использовании аналитической зависимости оптимального критерия от исходных данных. Решение общей задачи распределения требует поиска такой зависимости или снижения точности вследствие меньшего числа перестановок в алгоритме случайного поиска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.К. Аппроксимация зависимостей функциями многих переменных в задачах разработки АСУ // Известия Академии наук. Теория и системы управления. – 1999. – № 3. – С. 60–67.

2. Иванов А.К. Математическое моделирование процессов управления. – Ульяновск : УлГТУ, 2002. – 172 с.