

УДК 681.324

Р.А. Штыков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООВОГО И ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТЕЙ

Штыков Роман Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика и прикладная математика» Муромского института (филиала) Владимирского государственного университета. Специалист в области информационных систем. Имеет статьи, монографии, изобретения в области автоматизированных систем управления инженерными коммуникациями. [e-mail: ipmrroman@yandex.ru].

Аннотация

В статье рассматривается новая концепция проведения гидравлических расчетов для инженерных коммуникаций большой размерности на основе объединенных методов гидравлического и теплового расчета. Показана необходимость введения поправочного коэффициента при расчете параметров сети и раскрыт способ нахождения матрицы контуров на основе матрицы соединений.

Ключевые слова: гидравлическая сеть, стационарное потокораспределение, гидравлический расчет, алгоритм Краскала, матрица соединений, матрица контуров.

Roman Alexanderovich Shtykov, Candidate of Engineering, Associate Professor of the Chair 'Physics and Applied Mathematics' at Murom Institute (Branch) of Vladimir State University; specialist in information systems; author of articles, monographs, inventions in the field of computer-aided systems for control of engineering services. e-mail: ipmrroman@yandex.ru.

Abstract

The article considers a new concept of hydraulic design for large-scale engineering services on basis of integrated hydraulic and thermal-design methods. It also shows a necessity of correction factor for calculation of network parameters and reveals a method to find outline matrix on basis of matrix of coupling.

Key words: hydraulic network, stationary flux-distribution, hydraulic design, Kruskal's algorithm, matrix of coupling, outline matrix.

ВВЕДЕНИЕ

Гидравлические расчеты лежат в основе анализа режимов тепловых, газовых, водопроводных и напорных канализационных сетей. Любые информационные системы по инженерным сетям, не предусматривающие проведения гидравлических расчетов, имеют крайне ограниченные возможности применения и потому вряд ли могут рассматриваться всерьез.

Результатом любого гидравлического расчета всегда является потокораспределение – по каждому участку сети находится расход транспортируемого продукта, а по каждому узлу сети – давление. В то же время способы задания исходных данных могут довольно сильно отличаться между собой. Если сеть не содержит регуляторов (давления, расхода или температуры), то задача гидравлического расчета сводится к системе нелинейных уравнений большой размерности. В свою очередь, линеаризация этой системы приводит к разреженной системе линейных уравнений со специфической структурой. Регуляторы значительно усложняют задачу, поскольку в этом случае к системе уравнений добавляются еще и неравенства.

Методов решения задач гидравлического расчета вполне счетное количество, и они также хорошо известны, но проблема состоит в его более или менее приличном из-

готовлении. Поэтому на первый план выступает качество и алгоритмов, и программной реализации гидравлического расчета.

РАБОЧИЕ ПАРАМЕТРЫ

В результате расчетов гидравлической сети будут определены:

- расход воды и потери напора в трубопроводах сети;
- температура теплоносителя в трубопроводах сети;
- нормативные тепловые потери в трубопроводе сети;
- фактические тепловые потери в трубопроводе сети;
- потери тепловой энергии с утечками из сети и систем теплоснабжения;
- необходимый напор на источнике.

Полученные в результате расчетов данные позволят производить:

- равномерное распределение теплоносителя и воды между всеми подключенными системами в соответствии с расчетной нагрузкой;
- получение расчетной циркуляции воды в сетях;
- получение расчетной температуры теплоносителя.

Управляемыми переменными моделирования будут:

- давление на источнике и давление у потребителей;
- расход на источнике и расход у потребителей;
- температура на источнике и температура у потребителей.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим схему с установившимся движением жидкости, состоящую из u участков, z узлов и k линейно независимых контуров $k = u - z + 1$.

Разработку линейно независимых циклов для выполнения расчета потокораспределения в гидравлических сетях можно осуществить при помощи основного дерева графа гидравлической системы для определения матриц соединений и матриц контуров. Построение основного дерева выполняется с помощью алгоритма Краскала [1].

На схеме выделяется некоторое дерево, связывающее все z узлов сети. В результате все участки разобьются на $(z - 1)$ участков дерева и u участков, не вошедших в это дерево, которые называются хордами. Каждая хорда замыкает определенную последовательность участков дерева и однозначно определяет контур, который фиксируется соответствующей строкой матрицы контуров.

Определим эти две основополагающие матрицы.

Введем полную матрицу A соединений z узлов и u ветвей сети, однозначно описывающую ее конфигурацию, безотносительно к конкретным длинам ветвей и фактическому месторасположению узлов. В этой матрице на пересечении строки j , соответствующей узлу j , и столбца i , соответствующего ветви i , помещается элемент a_{ij} . Этот элемент принимает следующие значения:

- $a_{ij} = 0$, если ветвь i не соединена с узлом j ;
- $a_{ij} = -1$, если ветвь i исходит из узла j ;
- $a_{ij} = 1$, если узел j является для ветви i конечным.

Таким образом, в каждом столбце матрицы A только два ненулевых элемента – это 1 и -1, поэтому сумма всех ее строк дает нулевую строку, что означает их линейную зависимость. Поэтому ранг матрицы, то есть максимальное число ее линейно независимых строк или столбцов, составит $(z - 1)$. Для расчетов будем использовать усеченную матрицу соединений с размерами $(z - 1) \times u$, имеющую только линейно независимые строки, ее обозначим \bar{A} . Она получается из матрицы A вычеркиванием любой из строк. Как правило, этой строкой является строка z .

Введем полную матрицу B контуров. В матрице контуров на пересечении строки r , соответствующей контуру k , и столбца i стоит элемент b_{ri} . Этот элемент принимает следующие значения:

- $b_{ri} = 0$, если ветвь i не принадлежит контуру r ;
- $b_{ri} = 1$, если ветвь i входит в контур k и ее ориентация совпадает с направлением его обхода;
- $b_{ri} = -1$, если ветвь i входит в контур r , но ее ориентация противоположна направлению его обхода.

Для гидравлических сетей имеет место квадратичный закон гидравлического сопротивления:

$$h_i + H_i = r_i x_i^2, \tag{1}$$

где x_i – неизвестный расход;

r_i – сопротивление участка;

h_i – напор, равный разности пьезометрических отметок на концах участка (линейное падение напора);

H_i – активный (действующий) напор.

Зная длину трубопровода и его внутренний диаметр, данное сопротивление найдем по формуле:

$$r_{i(k)} = \frac{A_s (l_{i(k)} + l_{z_{i(k)}})}{g d_{i(k)}^{5,25}}, \tag{2}$$

где l_j – эквивалентная длина местных участков (сопротивлений);

l – длина участка сети;

d – внутренний диаметр трубопровода;

g – ускорение свободного падения;

A_s – постоянный коэффициент, зависящий от φ_9 .

$$A_s = 0,0894 \varphi_9^{0,25}, \tag{3}$$

где φ_9 – абсолютная эквивалентная шероховатость.

$$l_9 = \frac{\sum \xi d_m}{\lambda}, \tag{4}$$

где $\sum \xi$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений;

d_m – внутренний диаметр местных участков;

λ – коэффициент гидравлического трения.

В случае, когда нет данных о местных сопротивлениях, эквивалентная длина принимается приближенно в долях от линейной длины:

$$l_9 = \alpha l. \tag{5}$$

Поскольку по знаку величины r_i необходимо судить о направлении потока на участке и соответственно о знаке h_i , то (1) можно записать в виде:

$$h_i + H_i = r_i |x_i| x_i. \tag{6}$$

Для любого потокораспределения должны выполняться два сетевых закона Кирхгофа [2, 3]. Во-первых, в каждом узле выполняется материальный баланс:

$$\sum x_i = V_j, j = 1..(z - 1). \tag{7}$$

С использованием матрицы соединений \bar{A} балансы могут быть записаны сразу для всей схемы:

$$\bar{A} x = V.$$

Слева в формуле стоит алгебраическая сумма расходов по всем участкам, имеющим общий узел j , а справа – расход в узле: нагрузка $V_i > 0$ если в узле j находится потребитель; приток $V_i < 0$, если в узле j находится источник; и $V_i = 0$, если узел является точкой разветвления потоков по схеме.

Значение $V_i < 0$ должно быть задано таким образом, чтобы имел место их общий нулевой баланс по всем z узлам схемы:

$$\sum_{j=1}^z V_j = 0, \quad V_z = -\sum_{j=1}^{z-1} V_j. \quad (8)$$

Второй закон Кирхгофа требует суммарного нулевого изменения напоров h_i для любого контура схемы – для этого достаточно, чтобы равенство:

$$\sum h_i = 0. \quad (9)$$

С использованием матрицы контуров B напоры могут быть записаны сразу для всей схемы:

$$Bh = 0.$$

С учетом (9) и (6) уравнения, соответствующие второму закону Кирхгофа, имеют вид:

$$\sum R_i X_i |X_i| = H_k, \quad (10)$$

где R_i , X_i – гидравлическое сопротивление и расходы на всех участках i контура k ;

H_k – алгебраическая сумма действующих напоров на всех участках, входящих в контур k .

Таким образом, математическая модель потокораспределения для гидравлических сетей сводится к системе уравнений, состоящей из $(z - 1)$ линейных уравнений вида (7) и k нелинейных уравнений вида (10):

$$\begin{cases} \sum x_i = V_j, j = 1 \dots (u - 1), \\ \sum R_i X_i |X_i| = H_k. \end{cases} \quad (11)$$

Температура теплоносителя (воды) на участке сети определяется по формуле:

$$t_{yч} = t_1 - (t_1 - t_2), \quad (12)$$

где $t_1 - t_2$ – падение температуры теплоносителя;

t_1 – температура теплоносителя в начале участка.

Рассчитывать падение температуры для участка длиной l можно на основании теплового баланса: потери тепла в окружающую среду равны уменьшению теплосодержания теплоносителя:

$$Vc(t_1 - t_2) = \Theta l, \quad (13)$$

где V – массовый расход теплоносителя;

c – массовая теплоемкость теплоносителя;

Θ – теплопотери.

Подставляя (13) в (12), получим формулу (14) для расчета температуры в трубопроводе, отображающую зависимость температуры от расхода:

$$t_{yч} = t_1 - \frac{\Theta l}{Vc}. \quad (14)$$

То есть температура теплоносителя напрямую зависит от расхода. Чем больше расход, тем больше температура. Данное утверждение выразим в виде соотношения (15), которое будем использовать как основное для проведения расчетов:

$$V_{i(k)} = \gamma t_{i(k)}, \quad (15)$$

где γ – коэффициент, определяемый экспериментально или на основе эмпирических формул и зависящий от параметров этого элемента.

Зная расход в трубопроводе и его диаметр, скорость движения воды на участке трубопровода определяется по формуле:

$$v_{i(k)} = \frac{4V_{i(k)}}{3,6 \cdot 3,14 \cdot d_{i(k)}^2}. \quad (16)$$

Зная расход и скорость в трубопроводе, определим внутренний диаметр трубы при решении задачи «Добавление новой линии» в соответствии с выражением (17). При этом значение скорости принимается такое же, как в трубе, к которой делаем врезку.

$$d_i = \sqrt[2]{\frac{V_{i(k)}}{3,6 \cdot 3,14 \cdot v_{i(k)}}}. \quad (17)$$

Зная внутренний диаметр трубопровода и температуру в каждой ветви, теплопотери можно определить по формулам:

1) при наземной прокладке:

$$\Theta = \frac{t_g - t_n}{\frac{1}{\alpha_g \cdot \pi \cdot d} + \frac{1}{2\pi} \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i(n)}}{d_{i(g)}} + \frac{1}{\alpha_n \cdot \pi \cdot d_n}}, \quad (18)$$

где t_g, t_n – средняя температура теплоносителя и температура окружающей среды;

α_g, α_n – коэффициенты теплоотдачи от теплоносителя к стенке трубопровода и от наружной поверхности изоляции в окружающую среду;

d_n – наружный диаметр изоляционного покрытия;

λ_i – теплопроводность i -го слоя изоляции;

$d_{i(g)}, d_{i(n)}$ – наружный и внутренний диаметры i -го слоя изоляции.

2) при подземной прокладке:

$$\Theta = \frac{t_g - t_n}{\sum Rt_i} (1 + \beta), \quad (19)$$

где β – коэффициент теплоотдачи;

Rt_i – термическое сопротивление.

$$\sum Rt_i = Rt_{уз} + Rt_n + Rt_{ок} + Rt_{к} + Rt_{зп}, \quad (20)$$

где $Rt_{уз}$ – термическое сопротивление изоляции;

Rt_n – теплоотдача от изоляции к воздуху канала;

$Rt_{ок}$ – теплоотдачи от воздуха канала к его стенке;

$Rt_{к}$ – сопротивление стенок канала;

$Rt_{зп}$ – сопротивление грунта.

Анализ рассмотренного метода и подтверждения его практической применимости отображены в работе [4].

2.1 Расчет стационарного потокораспределения в многокольцевых гидравлических сетях

Решение задачи потокораспределения сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений вида (11). Данную систему можно решать, используя итерационные методы с определением итерационных расходов по формуле Андрияшева-Лобачева-Кросса [5, 6] или метод Ньютона-Рафсона [3]. Эти методы выгодны с точки зрения вычислительных затрат, но на реальных системах со слож-

ной топологией и сопротивлениями участков контура, отличающимися на несколько порядков, во многих случаях не обеспечивают требуемой сходимости итерационного процесса, особенно для сетей с регуляторами расхода и давлений (завдвижки, регулировочные шайбы).

Как показала практика расчетов больших гидросистем (крупных городов или мегаполисов), для систем уравнений с матрицами, размерность которых превосходит 500–700, начальное приближение должно лежать настолько близко к решению, что практическая ценность вышеуказанных алгоритмов теряется – технические требования к точности решения на порядки слабее, чем требования уязочных методов к начальному приближению.

В качестве расчетного мы используем метод, предложенный Файзулиным, Денисовым и Меренковым, – метод последовательных приближений, который обеспечивает сходимость на системах с числом неизвестных до 10000 при небольшом числе итераций [1, 3].

Рассмотрим метод последовательных приближений применительно к системе (11):

$$\begin{cases} \sum x_i = V_j, j = 1..(u-1), \\ \sum R_i X_i |X_i| = H_k, \end{cases}$$

где X_i – расходы в узле j ;

V_i – утечки ($V_i > 0$) или притоки ($V_i < 0$) в узле j .

Значение V_i должно быть задано таким образом, чтобы имел место их общий нулевой баланс по всем z узлам схемы.

Будем решать полученную систему уравнений методом последовательных приближений. На каждой итерации решается система линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \sum a_i x_i = V_j, \\ \sum b_i X_i = H_{k(j)}, \end{cases} \quad (21)$$

где a_i – коэффициент линейной части системы ($a_i = 1$, если энергоресурс в трубопроводе входит в узел; $a_i = -1$, если энергоресурс в трубопроводе выходит из узла; и $a_i = 0$, если участок i инцидентен узлу);

b_i – коэффициент, соответствующий нелинейной части системы, получаемый следующим образом:

$$b_i = R_i \left| \alpha_e \cdot X_i^N + \beta_e \cdot X_i^{N-1} \right|, \quad (22)$$

где N – номер текущей итерации,

α_e, β_e – коэффициенты, которые находятся экспериментальным путем, их сумма должна быть равна 1.

В работах Файзулина, Денисова и Меренкова показано, что в качестве начального приближения целесообразно принять $X_i^0 = 1, (i = 1, 2 .. n)$, а коэффициенты – $\alpha = 0,3, \beta = 0,7$, итерации продолжаются до тех пор, пока величина невязки между левой и правой частью уравнений нелинейной части не будет меньше заданной величины. Данный метод обеспечит сходимость с числом неизвестных до 10000, при этом число итераций не превысит 50.

С целью обеспечения более быстрого затухания колебаний невязки и уменьшения числа итераций нами была проверена и предложена следующая модификация: после первой итерации применить поправочный коэффициент $\omega = 0,48$.

$$X_i = \text{sign}(X_i) R_i \omega |X_i|. \quad (23)$$

Это позволит приблизить порядок получения вектора X к решению, сократив число итераций, и колебания невязки быстро затухают. В качестве примера рассмотрим гидравлическую сеть, состоящую из 1000 ребер графа и 960 узлов (см. рис. 1, 2):

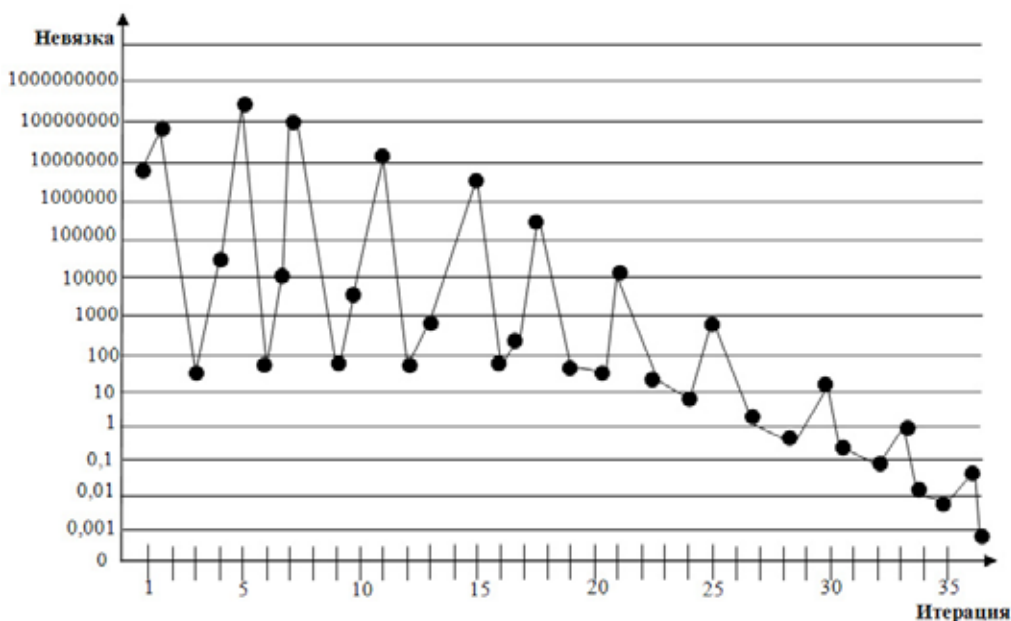


Рис. 1. Пример расчета стандартным методом последовательных приближений

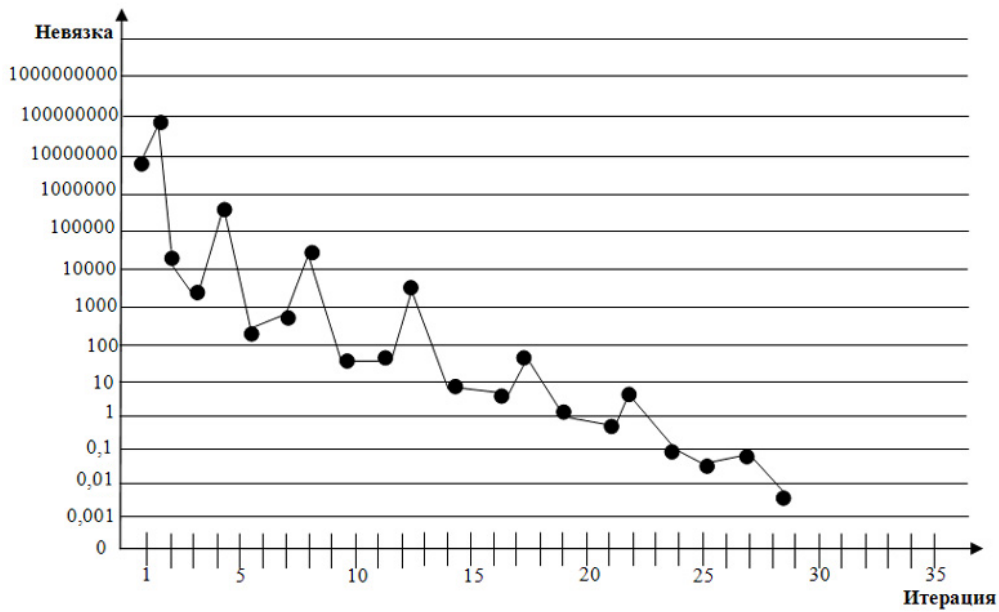


Рис. 2. Пример расчета модифицированным методом последовательных приближений

2.2 Однозначное определение матрицы контуров

Докажем, что матрица соединений \bar{A} и выбранное на схеме цепи дерево однозначно определяют матрицу контуров B , что может быть использовано для ее автоматического построения при расчетах на компьютере.

Перенумеруем переменные x_i таким образом, чтобы расходы оказались в конце матрицы, то есть $x_i = (x_D, x_K)$,

где $x_D = (x_1 \dots x_{z-1})$ – расходы на участках дерева,

$x_K = (x_z \dots x_u)$ – расходы на хордах.

Если за направления обхода взять направление хорды и учесть, что каждая хорда входит только в один цикл, матрицу контуров B можно записать в следующем виде:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1(z-1)} & 1 \\ \dots & \dots & 1 \\ b_{(u-z+1)1} & b_{(u-z+1)(z-1)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Следовательно, матрицы A и B приобретут следующий вид (см. рис. 3).

То есть $B = (B_D, E_K)$, $A = (\bar{A}_D, \bar{A}_K)$,

где E – единичная матрица.

Таким образом,

$$\bar{A}_D x_D + \bar{A}_K x_K = V. \tag{25}$$

Следовательно,

$$x_D = \bar{A}_D^{-1} (V - \bar{A}_K x_K). \tag{26}$$

Матрица \bar{A}_D^{-1} , обратная к \bar{A}_D , здесь всегда существует, поскольку в случае графа дерева его матрица соединений (без последней строки) будет иметь определитель, отличный от нуля, – матрица не особенная.

Выявим связь между матрицами соединений и контуров, то есть \bar{A} и B . Рассмотрим однородную систему уравнений первого закона Кирхгофа:

$$\bar{A}x = 0,$$

и покажем, что любая строка матрицы B является ее решением. Действительно, пусть $a_j^T = (a_{j1} \dots a_{jm})$ – j -я строка A ($j = 1 \dots z-1$), а $b_r^T = (b_{r1} \dots b_{rn})$ – r -я строка B ($r = 1 \dots k$), где элементы a_{ji} и b_{ri} ($i = 1 \dots u$) принимают значения 0, 1 или -1.

В случае, когда контур r не проходит через узел j , ненулевые элементы a_{ji} и b_{ri} имеют обязательно различные номера i , и поэтому скалярное произведение $a_j^T b_r = 0$. Если же простой контур r проходит через узел j , то ему могут принадлежать лишь две ветви i_1, i_2 , инцидентные данному узлу, и только для них одновременно не равны нулю соответствующие элементы a_{ji} и b_{ri} , так что скалярное произведение фактически будет сводиться к сумме двух слагаемых:

$$a_j^T b_r = a_{j(i_1)} b_{r(i_1)} + a_{j(i_2)} b_{r(i_2)}. \tag{27}$$

Как видно из рисунка 4, в любом случае прохождения контура через узел j произведение в правой части равенства (27) обязательно имеет разные знаки, так что их сумма равна 0, и поэтому всегда $a_j^T b_r = 0$.

Так как это справедливо для любых j и r , то:

$$\bar{A}b_r = 0, (r = 1..k). \tag{28}$$

То есть любая строка матрицы B (берущая здесь как вектор столбец) удовлетворяет системе (24). Это может быть записано сразу для всех строк, что приведет к следующему произведению матриц:

$$\bar{A}B^T = 0. \tag{29}$$

Таким образом, если рассматривать матрицы блочной структуры, то:

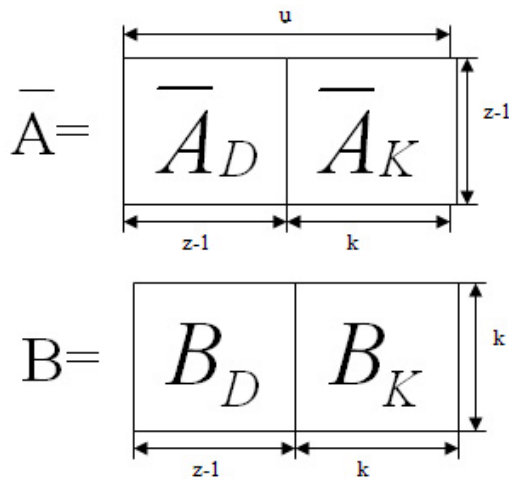


Рис. 3. Вид матрицы

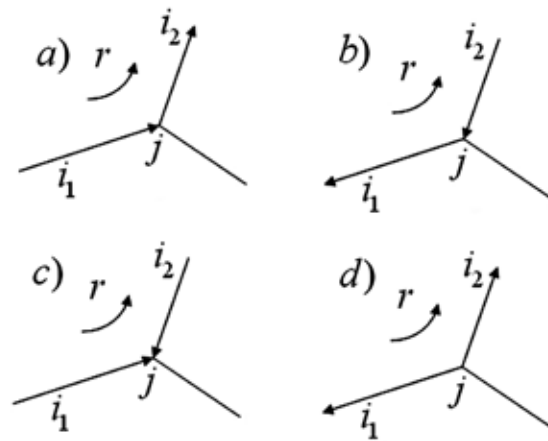


Рис. 4. Варианты прохождения контура r через узел j

$$\begin{aligned} \bar{A}B^T &= [\bar{A}_D \bar{A}_K] \cdot [B_D B_K]^T = \\ &= [\bar{A}_D \bar{A}_K] \cdot [B_D E_K]^T = \\ &= \bar{A}_D B_D^T + \bar{A}_K E_K^T = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

то есть:

$$\bar{A}_D B_D^T + \bar{A}_K = 0. \quad (31)$$

Отсюда следует, что:

$$B_D^T = -\bar{A}_D^{-1} \bar{A}_K. \quad (32)$$

Это выражение связывает матрицы $B_D, \bar{A}_D, \bar{A}_K$ и отражает тот факт, что матрица соединений \bar{A} и выбранное на схеме цепи дерево однозначно определяют матрицу контуров B .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве базовых методов построения математической модели сети теплоснабжения использовались теория графов и теория множеств.

Указанные действия позволили определить следующие данные:

1) методику гидравлического и теплового расчета инженерных коммуникаций, позволяющую произвести расчет дополнительных параметров (температура, скорость) в рамках гидравлического расчета, что не требует проведения теплового и конструкторско-гидравлического расчета и экономит время и ресурсы;

2) при расчете стационарного потокораспределения в многокольцевых гидравлических сетях для обеспечения более быстрого затухания колебаний невязки и уменьшения числа итераций учесть поправочный коэффициент $\omega = 0,48$;

3) выражение $B_D^T = -\bar{A}_D^{-1} \bar{A}_K$, связывающее матрицы $B_D, \bar{A}_D, \bar{A}_K$ и отражающее тот факт, что матрица соединений \bar{A} и выбранное на схеме цепи дерево однозначно определяют матрицу контуров B .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов Е.Е. Математическое моделирование динамики жидкости с использованием теории графов // Математическое моделирование. – 1996. – № 2. – С. 91–105.
2. Бакластов А.М., Бродянский В.М., Голубев Б.Н. Промышленная теплоэнергетика и теплотехника: Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 551 с.
3. Меренков А.П. Дифференциация методов расчета гидравлических систем // Вычислительная математика и математическая физика. – 1973. – № 5. – С. 1237–1248.
4. Штыков Р.А. Анализ алгоритма расчета тепловой сети промышленного предприятия // Промышленная энергетика. – 2007. – № 7. – С. 34–37.
5. Андрияшев В.В. Техника расчета водопроводной сети. – М.: ОГИЗ – Советское издательство, 1932. – 62 с.
6. Лобачев В.Г. Новый метод увязки колец при расчете водопроводных сетей // Санитарная техника. – 1934. – № 2. – С. 8–12.