

УДК 519.711:681.5

И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Семушин Иннокентий Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные технологии» Ульяновского государственного университета. Имеет научные публикации, монографии, патенты на изобретения. Область научных интересов: диагностика, фильтрация и управление в стохастических системах в условиях неопределенности. [kentvsem@yandex.ru].

Цыганова Юлия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информационные технологии» УлГУ. Имеет научные публикации, монографию, учебные и учебно-методические пособия. Область научных интересов: параметрическая идентификация стохастических систем, адаптивная фильтрация, разработка численно эффективных алгоритмов идентификации и адаптации в стохастических системах. [tsyganovajv@mail.ru].

Аннотация

В работе рассматривается решение задачи параметрической идентификации одной модели погрешностей инерциальной навигационной системы (ИНС) методом вспомогательного функционала качества (ВФК). Сравниваются два подхода к построению ВФК: идентификация параметров стационарного фильтра и идентификация параметров модели системы с учетом динамики уравнений Риккати в фильтре Калмана. Приводятся сравнительные характеристики двух подходов и результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, адаптивная фильтрация, вспомогательный функционал качества, фильтр Калмана.

Innokenty Vasilyevich Semushin, Doctor of Engineering, Professor at the Chair 'Information Technology' of Ulyanovsk State University; author of papers, monographs; holds patents for inventions; is interested in diagnostics, filtering and control in stochastic systems under uncertain conditions. e-mail: kentvsem@yandex.ru.

Yulia Vladimirovna Tsyganova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the Chair 'Information Technology' of Ulyanovsk State University; author of papers, a monograph, text-books and tutorials; is interested in parametric identification of stochastic systems, adaptive filtering, development of numerically efficient algorithms of identification and adaptation in stochastic systems. e-mail: tsyganovajv@mail.ru.

Abstract

The paper deals with a solution to the problem of parametric identification for an error model of inertial navigation system (INS) using the Auxiliary Performance Index (API) method. It compares the two approaches to the API building: identification of steady-state filter parameters and identification of system-model parameters taking into account the dynamics of Riccati equations in Kalman filter. The authors also give comparison characteristics of the two approaches and results of the computational experiments.

Key words: parametric identification, adaptive filtering, auxiliary performance index (API), Kalman filter.

ВВЕДЕНИЕ

Со времени появления инерциальных навигационных систем учеными разных стран постоянно совершенствовались методы инерциальной навигации, что стало одним из условий, сделавших возможными беспосадочные авиаперелеты, полеты в космос, длительные походы подводных лодок. В настоящее время ИНС – это неотъемлемая часть системы управления самолетом, вертолетом, морским судном или ракетой.

Основными достоинствами ИНС по сравнению с другими информационными системами являются: автономность работы, помехозащищенность от внешних факторов, всепогодность и возможность применения в любое время суток, относительно небольшой вес и габариты, высокая информативность. Являясь основным источником информации о движении, ИНС должна обеспечить требуемую точность счисления координат и ориентации положения объектов в пространстве.

Точностные параметры ИНС в основном зависят от погрешностей датчиков первичной информации: гироскопов и акселерометров. В настоящее время разработан широкий спектр инерциальных датчиков требуемого класса точности, позволяющий обеспечить разработку ИНС. Следует отметить, что вопрос алгоритмического учета погрешностей датчиков в системе является очень актуальным, поскольку от него во многом зависит точность ИНС.

Обработка измерительной информации в навигационных комплексах опирается на развитый аппарат теории оптимальной фильтрации и идентификации моделей систем. Зарубежные материалы и отечественная литература дают широкое представление об этих методах. Важное место занимают адаптивные методы, поскольку их применение является вынужденным из-за априорной неопределенности, и им посвящено большое число работ.

В данной работе рассматривается практическое применение метода вспомогательного функционала качества для решения задачи параметрической идентификации одной модели погрешностей ИНС. Сравниваются два подхода к использованию ВФК:

1) идентификация параметров стационарного фильтра Калмана;

2) идентификация параметров модели системы с учетом динамики уравнений Риккати в фильтре Калмана.

Теоретические основы первого подхода содержатся в [1–4]. Второй, *новый* подход к построению ВФК, был предложен авторами в [5–7]. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, которые подтверждают работоспособность предложенных методов параметрической идентификации.

1 Постановка задачи

Инструментальные погрешности ИНС в основном определяются дрейфами нуля акселерометров и гироскопов, а также нелинейностью характеристик акселерометров и датчиков момента. Подробное описание модели инструментальных погрешностей ИНС приведено в [8]. Рассмотрим упрощенную модель ошибок одного горизонтально-го канала ИНС полуаналитического типа:

$$\begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \beta \\ m_{Ax} \\ n_{Gy} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tau g & \tau & 0 \\ \tau/a & 1 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \beta \\ m_{Ax} \\ n_{Gy} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix} w_t, \quad z_t = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x_t + v_t, \quad (1)$$

где $a_1 = H_1 \sqrt{1 - b_1^2} \approx H_1 \sqrt{2\gamma_1 \tau}$;

$$b_1 = \exp(-\gamma_1 \tau) \approx 1 - \gamma_1 \tau ;$$

$x = [\Delta v_x, \beta, m_{Ax}, n_{Gy}]^T$ – вектор-столбец состояния, в котором Δv_x – ошибка определения скорости вдоль оси Oх гироскопа,

β – угловая ошибка определения вертикали места,

m_{Ax} – случайный дрейф показаний акселерометра,

n_{Gy} – постоянный дрейф гироскопа.

Постоянные величины τ, g, a соответственно равны темпу поступления данных и обработки, ускорению свободного падения, большой полуоси Земли. Постоянные величины H_1 и γ_1 являются элементами принятой модели корреляционной функции:

$$R_{m_{Ax}} = H_1^2 \exp(-\gamma_1 |t|). \quad (2)$$

Числовые значения параметров модели приведены в таблице 1.

Таблица 1
Числовые значения параметров модели (1)

Параметр	Значение
τ	1 с
g	9,81 м/с ²
a	0,6378245·107 м
b_1	$\exp(-\gamma_1 \tau) \approx 1 - \gamma_1 \tau$
a_1	$H_1 \sqrt{1 - b_1^2} \approx H_1 \sqrt{2\gamma_1 \tau}$
n_{Gy}	0,48·10 ⁻⁶ рад/с
H_1	0,10·10 ⁻³ м/с ²
γ_1	0,20·10 ⁻³ с ⁻¹
v_t	$\sigma \xi_t, \xi_t \in N(0,1)$
σ	0,1 м/с
w_t	$w_t \in N(0,1)$

Уравнения (1) соответствуют общей модели вида:

$$x_t = \Phi(\theta)x_{t-1} + \Gamma(\theta)w_{t-1}, \quad (3)$$

$$z_t = H(\theta)x_t + v_t, \quad t \geq 1, \quad (4)$$

с вектором состояния $x_t \in \mathfrak{R}^n$ и вектором измерения

$z_t \in \mathfrak{R}^m$, где $\{w_0, w_1, \dots\}$ и $\{v_1, v_2, \dots\}$ – q -мерная и m -мерная независимые последовательности независимых и одинаково распределенных случайных векторов с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями $Q(\theta)$ и $R(\theta)$ соответственно. Эти последовательности не зависят от случайного начального состояния системы $x_0 \in N(\bar{x}_0(\theta), P_0(\theta))$. Предположим, что описывающие систему (3), (4) матрицы зависят от неизвестного параметра $\theta \in \mathfrak{R}^p$, причем элементы указанных матриц являются дифференцируемыми по θ_i функциями, где θ_i – i -й элемент вектора $\theta, i = 1, \dots, p$

Пусть в рассматриваемой модели (1) параметр γ_1 неизвестен, т. е. $\theta = \gamma_1$. Идентификацию неизвестного параметра системы (1) будем проводить по критерию качества:

$$J_{ИФК} = \frac{1}{2} E \{ \|e_t\|^2 \}. \quad (5)$$

Область определения исходного функционала качества (ИФК) включает в себя все одношаговые оценки предсказания вектора состояния x_t , полученные по доступным

измерениям $Z_i^T = [z_1^T | z_2^T | \dots | z_t^T]^T$, а e_t – ошибка предсказания. Препятствием для идентификации является то, что функционал (5) – теоретический, но не практический: ошибка e_t принципиально не известна, т. е. этот ИФК для численных методов оптимизации не доступен. Поэтому для решения задачи применим метод ВФК, который заключается в построении вспомогательного функционала качества

$$J_{ВФК} = \frac{1}{2} E \{ \|\varepsilon_t\|^2 \}, \quad (6)$$

который зависит только от доступных величин и достигает минимума одновременно с ИФК на множестве значений параметра $\hat{\theta}$ – оценки параметра θ . Здесь ε_t – вспомогательный процесс, доступный наблюдению. Следовательно, для минимизации критерия (6) можно применять различные методы численной оптимизации. Метод ВФК минимизирует среднеквадратическую ошибку (СКО) фильтрации, а не СКО предсказания выхода, и в этом его принципиальное отличие от МРЕ-методов (Minimum Prediction Error) [9, 10].

Подробное описание метода ВФК и методики построения вспомогательного процесса содержится в [1]. В [5] предложен новый подход к решению задачи параметрической идентификации методом ВФК, в соответствии с которым в адаптивном фильтре учитывается динамика уравнений Риккати, а дифференцирование критерия ВФК происходит не по параметрам адаптивного фильтра (АФ), а по параметрам неопределенности в модели поступающей информации.

Следуя результатам указанных работ, рассмотрим на практике два подхода к решению задачи параметрической идентификации неизвестного параметра θ модели инструментальных погрешностей ИНС.

2 Вспомогательный функционал качества и уравнения адаптивного фильтра

Для построения ВФК перейдем от представления системы в виде (1) к стандартной наблюдаемой модели, т. е. выполним соответствующее преобразование базиса в пространстве состояний. Модель

$$x_t^* = \Phi_*(\theta)x_{t-1}^* + \Gamma_*(\theta)w_{t-1}, \quad (7)$$

$$z_t = H_*x_t^* + v_t, \quad t \geq 1, \quad (8)$$

эквивалентна исходной модели (3), (4) и является ее каноническим представлением, где x_t^* – новый вектор состояния; Φ_* , Γ_* , H_* – матрицы следующего вида:

$$\Gamma_* = \tau a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+b_1 \\ 1-\rho+b_1+b_1^2 \end{bmatrix}, \quad H_*^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\rho = \tau^2 g/a,$$

$$\Phi_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\alpha_4 = b_1(1+\rho),$$

$$\alpha_3 = -b_1(3+\rho) - (1+\rho),$$

$$\alpha_2 = 3b_1 + (3+\rho),$$

$$\alpha_1 = -b_1 - 3.$$

Из представления (9), (10) следует, что максимальный индекс наблюдаемости системы $s = 4$.

Используя методику работ [1–5], построим вспомогательный функционал (6), в котором вспомогательный процесс запишем в виде:

$$\varepsilon_t = \varphi(Z_{t+1-s}^t) - \tilde{x}_{t+1-s} = [z_{t-3} \quad z_{t-2} \quad z_{t-1} \quad z_t]^T - \tilde{x}_{t-3}, \quad (11)$$

где преобразование φ определено в [3];

Z_{t+1-s}^t – составной вектор;

s – максимальный из индексов наблюдаемости системы;

\tilde{x}_{t+1-s} – оценка предсказания, полученная от адаптивного фильтра.

В качестве оценки ВФК возьмем величину

$$\hat{J}_{ВФК} = \frac{1}{2N} \sum_{k=t-N+1}^t \varepsilon_k^T \varepsilon_k. \quad (12)$$

Для поиска оптимального значения неизвестного параметра и минимизации ВФК можно применить математический аппарат и средства численной оптимизации. При этом все непоисковые методы требуют вычисления градиента ВФК. Тогда из (12) запишем выражение для вычисления градиента:

$$\frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta_i} = \frac{1}{N} \sum_{k=t-N+1}^t \varepsilon_k^T \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Вычисление частных производных вспомогательного процесса требует записи уравнений дифференцированного фильтра, или так называемых уравнений чувствительности. Различные методы вычисления уравнений чувствительности на основе стандартного фильтра Калмана подробно обсуждаются в работе [11].

Уравнения чувствительности являются составной частью структуры адаптивного фильтра. Рассмотрим и сравним между собой два подхода к построению АФ:

I. Построение АФ в форме установившегося (стационарного) фильтра Калмана, при этом градиент ВФК вычисляется по отношению к параметрам этого АФ (см. [1–4]).

II. Построение АФ в форме фильтра Калмана с учетом динамики уравнений Риккати, при этом критерий ВФК дифференцируется не по параметрам АФ, а по параметрам неопределенности в модели поступающей информации (см. [5–7]).

2.1 УРАВНЕНИЯ АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА I

Запишем уравнения АФ I в форме стационарного фильтра Калмана. В системе (7), (8) неизвестный параметр γ_1 входит в элементы матриц Φ_* и Γ_* и вектора x_0^* . Следовательно, согласно [2] имеем вторую степень априорной неопределенности, при этом

$$\theta = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 k_{11} k_{21} k_{31} k_{41}]^T, \quad p = 8. \quad (13)$$

Идентификация неизвестного параметра θ и оценивание вектора состояния системы (7), (8) по критерию (6) могут быть выполнены одновременно по следующему алгоритму:

Алгоритм 1 (АФ I)

I. Инициализация.

При заданном значении параметра θ вычислить

$$\Phi_* = \Phi_*(\theta), \quad K = K(\theta) \text{ и } \hat{x}_0 = \bar{x}_0^*(\theta), \quad \partial \hat{x}_0 / \partial \theta_i.$$

Положить $\hat{J}_{ВФК} = 0, \partial \hat{J}_{ВФК} / \partial \theta_i = 0 \quad (i = 1, \dots, p)$.

II. Для $k = t - N + 1, \dots, t$ рекуррентно вычислить:

1. Экстраполяция

1.1. Вычислить оценку вектора состояния:

$$\tilde{x}_k = \Phi_* \hat{x}_{k-1}.$$

1.2. Для каждого $\theta_i, \quad i = 1, \dots, p$

$$\text{вычислить: } \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta_i} \hat{x}_{k-1} + \Phi_* \frac{\partial \hat{x}_{k-1}}{\partial \theta_i}.$$

2. Вычисление ВФК и его градиента

2.1. Вычислить вспомогательный процесс (11).

2.2. Вычислить ВФК: $\hat{J}_{ВФК} := \hat{J}_{ВФК} + \frac{1}{2k} \epsilon_k^T \epsilon_k$.

2.3. Для каждого $\theta_i, \quad i = 1, \dots, p$ вычислить

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial \tilde{x}_{k-3}}{\partial \theta_i},$$

$$\frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta_i} + \frac{1}{k} \left(\epsilon_k^T \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \theta_i} \right).$$

3. Фильтрация

3.1. Вычислить оценку вектора состояния:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K v_k,$$

$$\text{где } v_k = z_k - H_* \tilde{x}_k.$$

3.2. Для каждого $\theta_i, \quad i = 1, \dots, p$ вычислить

$$\frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \theta_i} + \frac{\partial K}{\partial \theta_i} v_k + K \frac{\partial v_k}{\partial \theta_i},$$

$$\text{где } \frac{\partial v_k}{\partial \theta_i} = -H_* \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \theta_i}.$$

III. Оценка неизвестного параметра $\theta \in R^p$:

$$\hat{\theta}_{\min} = \arg \min_{\theta \in D(\theta)} \hat{J}_{ВФК}(\theta) \text{ (применяется один из стандартных численных методов).}$$

Замечание 1.

Матрицы частных производных $\frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta_i}$ и $\frac{\partial K}{\partial \theta_i}$

для системы (7), (8) вычисляются как

$$\frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8;$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta_i} \right)_{kj} = \begin{cases} 1, & (k=4) \& (j=i) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (14)$$

$i = 1, 2, 3, 4;$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \theta_i} \right)_{k1} = \begin{cases} 1, & (k = i - 4) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (15)$$

$i = 5, 6, 7, 8.$

Из (14), (15) видно, что матрицы $\frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta_i}$ и $\frac{\partial K}{\partial \theta_i}$ являют-

ся сильно разреженными, и этот фактор может влиять на точность вычисляемых оценок. Здесь также необходимо проверять дополнительное условие устойчивости фильтра: $\rho | \Phi_*(\theta)(I - K(\theta)H_*) | < 1$, где ρ – спектральный радиус матрицы.

Замечание 2.

Для вычисления оценки параметра γ_1 необходимо вы-

полнить алгебраическое преобразование $\hat{\gamma}_1 = f(\hat{\theta})$. Для системы (7), (8)

$$\hat{\gamma}_1 = -\frac{\ln \hat{b}_1}{\tau} \approx \frac{1 - \hat{b}_1}{\tau}, \text{ где } \hat{b}_1 = -\hat{\alpha}_1 - 3.$$

Условия существования алгебраического преобразования f подробно обсуждаются в [12].

2.2 УРАВНЕНИЯ АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА II

Запишем уравнения АФ II в стандартной форме фильтра Калмана с учетом динамики уравнений Риккати. Предположим, что элементы матриц Φ, Γ, Q, H, R и P_0 в системе (1), (2) являются дифференцируемыми функциями по неизвестному параметру $\theta \in \mathfrak{R}^p$. Для системы (7), (8) данное предположение является верным и при этом $\Phi_* = \Phi_*(\theta), \Gamma_* = \Gamma_*(\theta), x_0^* = x_0^*(\theta), P_0^* = P_0^*(\theta)$

$\theta = \gamma_1, p = 1$. Идентификация неизвестного параметра θ и оценивание вектора состояния системы (7), (8) по критерию (6) могут быть выполнены одновременно по следующему алгоритму:

Алгоритм 2 (АФ II)

I. Инициализация

При заданном значении параметра θ вычислить

$$\Phi_* = \Phi_*(\theta), \quad \Gamma_* = \Gamma_*(\theta) \text{ и } \hat{x}_0 = \bar{x}_0^*(\theta), \quad \partial \hat{x}_0 / \partial \theta,$$

$$\hat{P}_0 = P_0^*(\theta), \partial \hat{P}_0 / \partial \theta. \text{ Положить } \hat{J}_{ВФК} = 0, \\ \partial \hat{J}_{ВФК} / \partial \theta = 0.$$

II. Для $k = t - N + 1, \dots, t$ рекуррентно вычислить:

1. Экстраполяция

1.1. Вычислить оценку вектора состояния:

$$\tilde{x}_k = \Phi_* \hat{x}_{k-1}.$$

1.2. Вычислить ковариационную матрицу ошибки

$$\text{оценки: } \tilde{P}_k = \Phi_* \hat{P}_{k-1} \Phi_*^T + \Gamma_* Q \Gamma_*^T.$$

1.3. Для заданного θ вычислить:

$$\frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta} \hat{x}_{k-1} + \Phi_* \frac{\partial \hat{x}_{k-1}}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta} \hat{P}_{k-1} \Phi_*^T + \Phi_* \frac{\partial \hat{P}_{k-1}}{\partial \theta} \Phi_*^T + \\ + \Phi_* \hat{P}_{k-1} \frac{\partial \Phi_*^T}{\partial \theta} + \frac{\partial \Gamma_*}{\partial \theta} Q \Gamma_*^T + \Gamma_* Q \frac{\partial \Gamma_*^T}{\partial \theta}.$$

2. Вычисление ВФК и его градиента

2.1. Вычислить вспомогательный процесс (11).

2.2. Вычислить ВФК: $\hat{J}_{ВФК} := \hat{J}_{ВФК} + \frac{1}{2k} \varepsilon_k^T \varepsilon_k$.

2.3. Вычислить градиент ВФК:

$$\frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{J}_{ВФК}}{\partial \theta} + \frac{1}{k} \left(\varepsilon_k^T \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta} \right), \text{ где } \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta} = -\frac{\partial \tilde{x}_{k-3}}{\partial \theta}.$$

3. Фильтрация

3.1. Вычислить матрицу Калмана и ковариационную матрицу ошибки оценки:

$$K = \tilde{P}_k H_*^T (H_* \tilde{P}_k H_*^T + R)^{-1}; \hat{P}_k = \tilde{P}_k - K H_* \tilde{P}_k.$$

3.2. Вычислить оценку вектора состояния:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K v_k, \text{ где } v_k = z_k - H_* \tilde{x}_k.$$

3.3. Для заданного θ вычислить:

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial \theta} H_*^T (H_* \tilde{P}_k H_*^T + R)^{-1} - \\ - \tilde{P}_k H_*^T (H_* \tilde{P}_k H_*^T + R)^{-1} \times \\ \times H_* \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial \theta} H_*^T (H_* \tilde{P}_k H_*^T + R)^{-1};$$

$$\frac{\partial \hat{P}_k}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial \theta} - \frac{\partial K}{\partial \theta} H_* \tilde{P}_k - K H_* \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \theta_i} + \frac{\partial K}{\partial \theta_i} v_k + K \frac{\partial v_k}{\partial \theta_i},$$

$$\text{где } \frac{\partial v_k}{\partial \theta_i} = -H_* \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \theta_i}.$$

III. Оценка неизвестного параметра $\theta \in R^p$:

$$\hat{\theta}_{\min} = \arg \min_{\theta \in D(\theta)} \hat{J}_{ВФК}(\theta) \text{ (применяется один из стандартных численных методов).}$$

Замечание 3.

Матрицы частных производных $\frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \Gamma_*}{\partial \theta}$ для системы (7), (8) вычисляются как

$$\frac{\partial \Phi_*}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau(1+\rho)b_1 & -\tau(3+\rho)b_1 & 3\tau b_1 & -\tau b_1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \Gamma_*}{\partial \theta} = \frac{\tau^2 H_1^2}{a_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3b_1 - 1 \\ 9b_1 - 6 - \rho + 5\gamma_1^2 \tau^2 \end{pmatrix}$$

при $a_1 \approx H_1 \sqrt{2\gamma_1 \tau}$ и $b_1 \approx 1 - \gamma_1 \tau$.

Замечание 4.

Для идентификации неизвестного параметра θ не требуется стационарный режим работы системы (7), (8). Оценка $\hat{\gamma}_1$ вычисляется непосредственно в алгоритме идентификации.

3 ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ И СРАВНЕНИЕ АФ I и АФ II в задаче ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНС

Рассмотрим вопросы практического применения построенных алгоритмов АФ I и АФ II. Рассмотрим уравнения модели (7)–(10). В АФ I необходимо идентифицировать восемь параметров, в то время как в АФ II только один параметр. Очевидно, что чем больше параметров необходимо идентифицировать, тем ниже качество идентификации при прочих равных условиях. Оценим вычислительные затраты и качество идентификации по алгоритмам АФ I и АФ II. Проведем вычислительные эксперименты. В качестве инструментального средства будем использовать язык научных расчетов MatLab. Реализации выходного сигнала получим компьютерным моделированием по уравнениям (7)–(10) при истинном значении параметра $\gamma_1^* = 0,0002$. Дополнительно для оценки качества идентификации по алгоритму АФ I определим истинные значения для элементов матрицы Калмана и для элементов матрицы Φ_* . Используя выражение (10), запишем:

$$\alpha_1^* = -3,9998; \alpha_2^* = 5,9994;$$

$$\alpha_3^* = -3,9994; \alpha_4^* = 0,9998.$$

Для вычисления истинных значений элементов матрицы Калмана найдем численное решение уравнений Риккати. Примем: $k_{11}^* = 0,0215$; $k_{21}^* = 0,0217$; $k_{31}^* = 0,0219$; $k_{41}^* = 0,0222$.

Далее приведем результаты вычислительных экспериментов.

На рисунке 1 приведены графики изменения элементов матрицы Калмана.

По рисунку 1 видно, что фильтр достигает стационарного режима работы, следовательно, для идентификации неизвестного параметра возможно применение первого подхода и АФ I.

На рисунке 2 изображены графики значений ИФК и ВФК при реализации АФ II. По рисунку 2 видно, что исходный и вспомогательный функционалы качества имеют одну и ту же точку минимума, и при этом ее значение совпадает с истинным значением параметра. Значения функционалов в точке минимума $\hat{J}_{ИФК} = 0,0012$ и $\hat{J}_{ВФК} = 0,0351$.

На рисунке 3 изображен график значений градиента ВФК при реализации АФ II. По рисунку 3 видно, что градиент меняет знак в точке минимума.

На рисунке 4 представлены графики значений ИФК и ВФК в зависимости от параметров фильтра k_{11} и α_1 при реализации АФ I. Аналогичные результаты получаются и при остальных параметрах фильтра, входящих в вектор параметров θ . По рисунку 4 видно, что ИФК и ВФК имеют одну и ту же точку минимума, и при этом ее значение совпадает с расчетными значениями параметров.

На рисунке 5 изображены графики значений градиента ВФК по параметрам фильтра k_{11} и α_1 при реализации АФ I. Аналогичные результаты получаются и при остальных параметрах фильтра, входящих в вектор параметров θ . По рисунку 5 видно, что градиент меняет знак в точке минимума.

По результатам вычислительных экспериментов можно сделать вывод о том, что оба алгоритма АФ I и АФ II являются работоспособными, однако для данной конкретной задачи характер графиков ВФК и его градиента, полученных с помощью АФ II, является более приемлемым для численной оптимизации.

Теперь рассмотрим применение на практике АФ II для идентификации неизвестного параметра γ_1 . Смоделируем последовательность выходных сигналов Z_1^{200} и $\gamma_1^* = 0,0002$. Для минимизации критерия $J_{ВФК}$ воспользуемся функцией *fminunc* пакета Matlab R2010a, которая реализует градиентный метод оптимизации и требует знания значений целевой функции и ее градиента в зависимости от параметра оптимизации. Выберем критерии остановки алгоритма: $epsf=10^{-6}$, $epsx=10^{-6}$ и начальное значение $\hat{\gamma}_0 = 0,001$. Запрограммируем алгоритм АФ II в виде Matlab-функции, которая вычисляет значение ВФК и его градиента для входного значения параметра.

В результате проведения численного эксперимента получены следующие данные:

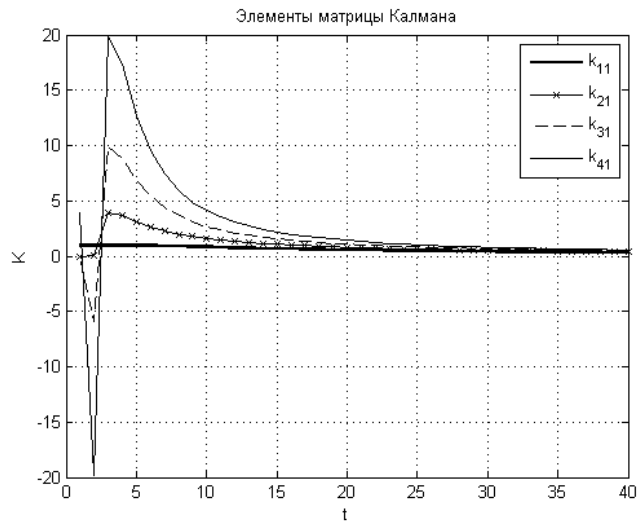


Рис. 1. Элементы матрицы Калмана при истинном значении параметра $\gamma_1^* = 0,0002$

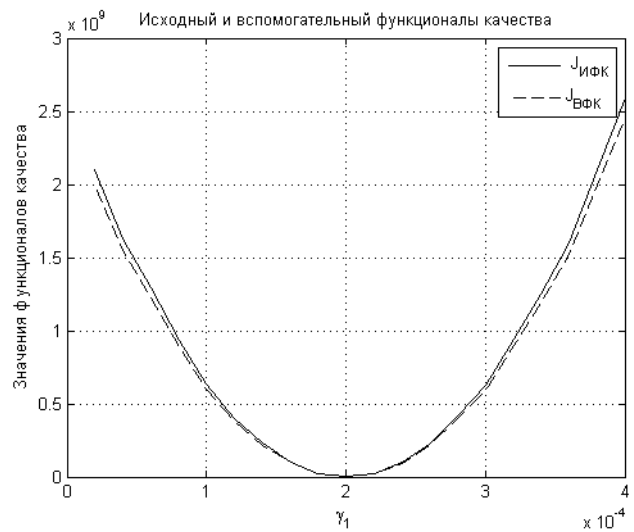


Рис. 2. Значения исходного и вспомогательного функционалов качества в зависимости от параметра γ_1 при реализации АФ II

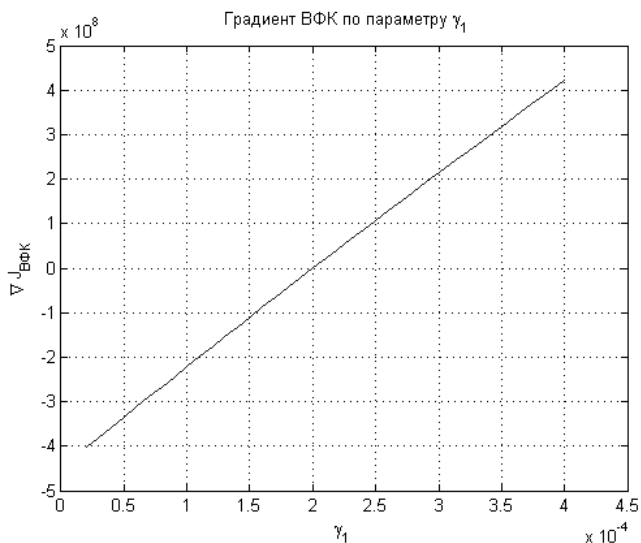
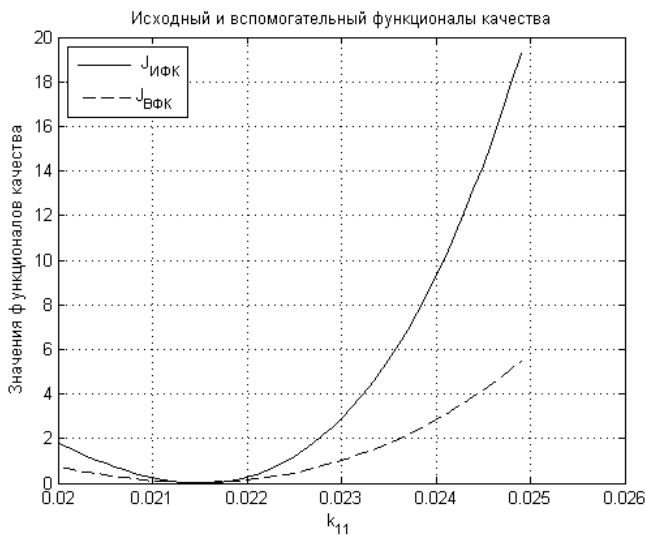
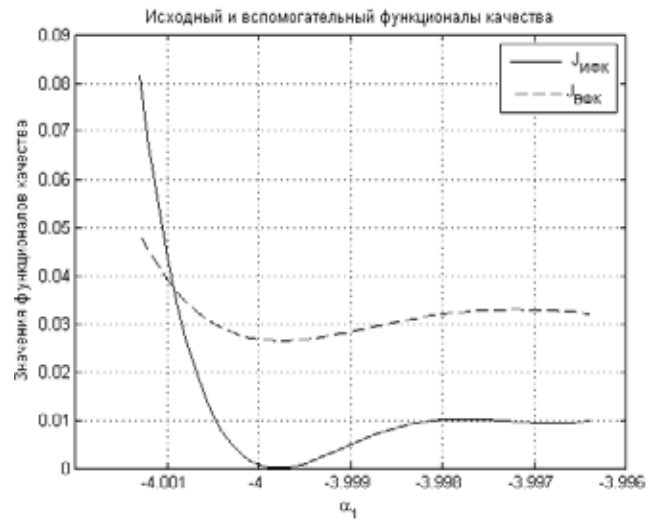


Рис. 3. Значения градиента ВФК по параметру γ_1 при реализации АФ II

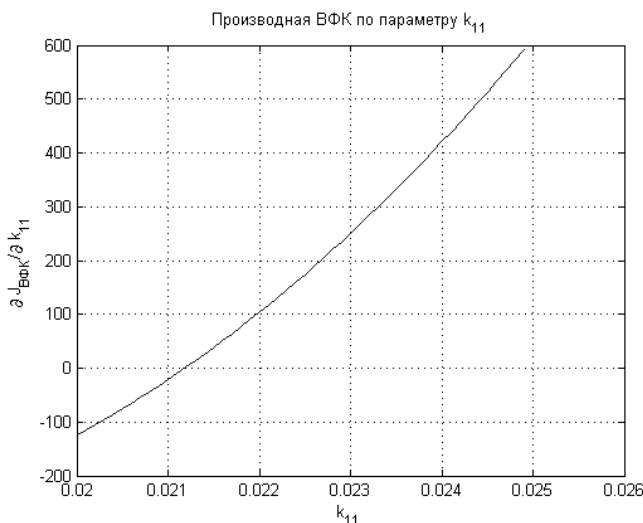


а)

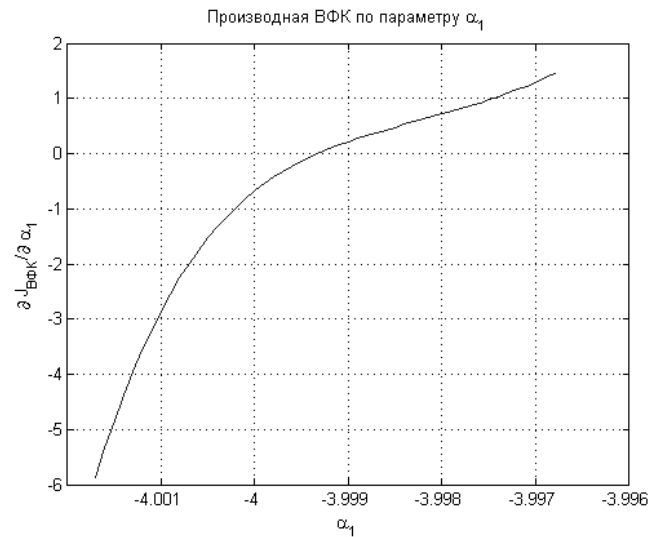


б)

Рис. 4. Значения исходного и вспомогательного функционалов качества в зависимости от параметров фильтра k_{11} и α_1 при реализации АФ I.



а)



б)

Рис. 5. Значения градиента ВФК по параметрам фильтра k_{11} и α_1 при реализации АФ I

Таблица 2

Результаты идентификации параметра γ_1 при реализации АФ II

Значение параметра $\hat{\gamma}_1^*$	$1,9999 \cdot 10^{-4}$
Значение ВФК в точке $\hat{\gamma}_1^*$	0,0196
Относительная ошибка оценивания $\ \gamma_1^* - \hat{\gamma}_1^*\ / \ \gamma_1^*\ $	$7,8174 \cdot 10^{-6}$
Количество итераций метода оптимизации	12

Таким образом, результаты численных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного подхода при решении задачи параметрической идентификации модели погрешностей ИНС.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вопросы практического применения двух подходов к построению ВФК, который может быть использован для решения задачи параметрической идентификации инструментальных погрешностей модели ИНС.

Отличительными особенностями первого подхода являются (достоинства (+) и недостатки (-)):

- простая структура адаптивного фильтра (+);
- требование стационарности режима работы системы (-);
- возможность применения АФ I для систем общего вида, поскольку в качестве неизвестных параметров рассматриваются матрицы, входящие в уравнения адаптивного фильтра (+);
- достаточно большое количество идентифицируемых параметров (-);

- сильная разреженность матриц частных производных (-);
- необходимость перехода от параметров адаптивного фильтра к параметрам исходной системы (-);
- необходимость проверки условия экспоненциальной устойчивости фильтра в алгоритме идентификации (-).

Отличительными особенностями второго подхода являются достоинства (+) и недостатки (-):

- более сложная структура адаптивного фильтра (-);
- не требуется стационарность режима работы системы (+);
- возможность применения АФ I для непосредственной идентификации неизвестных параметров систем, которые могут присутствовать в элементах матриц в различных комбинациях (+);
- количество идентифицируемых параметров равно количеству неизвестных параметров системы (+);
- прямая идентификация неизвестных параметров (+);
- нет необходимости проверять условие экспоненциальной устойчивости фильтра в алгоритме идентификации (+);
- возможность применения вместо АФ II численно устойчивых модификаций фильтра Калмана, см. напр. [5–7] (+).

Дальнейшие исследования будут направлены на развитие метода ВФК для нестационарных стохастических систем с учетом динамики уравнений Риккати в адаптивном фильтре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения / под ред. проф. И.В. Семушина. – Ульяновск : УлГУ, 2011. – 298 с.
2. Semoushin I.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems – Survey and New Results II // Int. J. Communications, Network and System Sciences, 2011, Vol. 4, No. 4, pp. 266–285.
3. Семушин И.В. Адаптивное управление стохастическим линейным объектом в условиях неопределенности // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление: сб. тр. Вып. 2. – М. : ИСА РАН, 1994. – С. 104–110.
4. Semoushin I.V., Tsyganova J.V. Auxiliary Performance Functional Approach to Adaptive and Learning Filtering and Control // Conference Proceedings of European Control Conference ECC'99. Karlsruhe. Germany. 31 August – 3 September 1999.
5. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. Адаптивный квадратно-корневой ковариационный алгоритм фильтрации // Автоматизация процессов управления. – 2011. – № 1 (23). – С. 83–87.
6. Цыганова Ю.В. Адаптивный квадратно-корневой информационный алгоритм обработки измерительных данных // Проведение научных исследований в области обработки, передачи и защиты информации : сб. науч. тр. всерос. конф., 1–5 декабря 2009 г., Ульяновск. В 4 т. Т. 4. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – С. 189–196.
7. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. Адаптивный квадратно-корневой ковариационный алгоритм фильтрации для навигационных комплексов // Перспективные информационные технологии для авиации и космоса (ПИТ-2010) : тр. межд. конф. с элементами науч. школы для молодежи. – Самара, 2010. – С. 118–122.
8. Semushin I.V. Identifying Parameters of Linear Stochastic Differential Equations from Incomplete Noisy Measurements // Recent Developments in Theories & Numerics – International Conference on Inverse Problems, Hong Kong, China, Jan. 2002. World Scientific, 2003, pp. 281–290.
9. Ljung L. Convergence Analysis of Parameter Identification Methods // IEEE Trans. On Automat. Contr., 1978, Vol. AC-23, No. 5, pp. 770–783.
10. Caines Peter E. Linear Stochastic Systems. New York, John Wiley&Sons, 1988. – 874 p.
11. Gupta N.K., Mehra R.K. Computational Aspects of Maximum Likelihood Estimation and Reduction in Sensitivity Function Calculations // IEEE Trans. On Automat. Contr., 1974, V. AC-19, No. 6, pp. 774–783.
12. Семушин И.В. Построение активных схем адаптации управления с приложением к инерциальным навигационным системам // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление : сб. тр. Вып. 2. – М. : ИСА РАН, 1994. – С. 110–115.