

УДК 004.942

В.К. Манжосов, И.А. Новикова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ НА ГРАНИЦЕ СОПРЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Манжосов Владимир Кузьмич, доктор технических наук, профессор, окончил машиностроительный факультет Фрунзенского политехнического института, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета. Имеет статьи, монографии, изобретения в области динамики машин и механизмов, моделирования процессов удара. [e-mail: tpm@ulstu.ru].

Новикова Ирина Александровна, окончила факультет информационных систем и технологий Ульяновского государственного технического университета, старший преподаватель кафедры «Измерительно-вычислительные комплексы» УлГТУ. Имеет статьи в области анализа волновых процессов в стержневых системах. [e-mail: nia@ulstu.ru].

Аннотация

Рассмотрен процесс преобразования продольной волны деформации на границе разнородных стержней с линейным упругим элементом. Изложена процедура численного расчета и моделирования процесса преобразования волны деформации в стержневой системе. Результаты моделирования сопоставлены с аналитическим решением для тестовой задачи.

Ключевые слова: волна деформации, трансформация волны деформации, сопряжение стержней с упругим элементом, стержневая система, моделирование.

Vladimir Kuzmich Manzhosov, Doctor of Engineering, Professor; graduated from the Faculty of Machine-Building at Frunze Polytechnical Institute; holds the Chair 'Theoretical and Applied Mechanics' at Ulyanovsk State Technical University; author of articles, monographs, inventions in the field of dynamics of machines and mechanisms, modeling of shock processes. e-mail: tpm@ulstu.ru.

Irina Alexanderovna Novikova, graduated from the Faculty of Information Systems and Technology of Ulyanovsk State Technical University; senior lecturer at the Chair 'Measuring and Computing Systems' of Ulyanovsk State Technical University; author of articles in the field of analysis of wave processes in bar systems. e-mail: nia@ulstu.ru.

Abstract

The article deals with transformation process of longitudinal wave of strain at the boundary of heterogeneous bars and linear resilient element, and sets forth a procedure of calculation and simulation of transformation process of strain wave in bar system. It also compares the simulation results and an analytical solution of test task.

Key words: strain wave, transformation of strain wave, interface of bars to resilient element, bar system, simulation.

Постановка задачи

При нанесении продольного удара по стержневой системе в последней формируется волна деформации, распространяющаяся к технологическому объекту или среде [1–3]. Если в стержневой системе имеются сопряжения разнородных участков, то на границе сопряжения возникают процессы, связанные с отражением и трансформацией волн. Наиболее изучены эти процессы для идеальных границ, когда сопряженные сечения участков имеют одинаковые перемещения и скорости [1, 4], а трансформация волн связана лишь с разной площадью поперечных сечений сопрягаемых участков и различием физико-механических свойств материалов этих участков.

Менее изучены процессы преобразования волн деформаций в стержневой системе, имеющей такие сопряжения, когда перемещения сопряженных сечений различны из-за наличия между ними промежуточных деформируемых тел. Из известных работ можно отметить исследования Алпеевой В.А. [2], Саруева Л.А., Шадринной А.В. [5, 6], Слестина А.П. [7].

В данной работе представлены результаты моделирования процесса преобразования продольной волны деформации с убывающей интенсивностью на границе разнородных стержней с линейным упругим элементом. Схема стержневой системы изображена на рисунке 1.

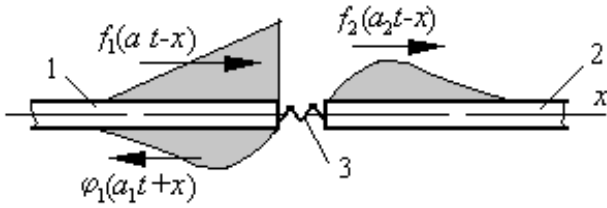


Рис. 1. Схема стержневой системы при падающей волне деформации:

1, 2 – стержни системы; 3 – упругий элемент

Предполагается, что два разнородных стержня в сечении $x = 0$ разделены упругим элементом с жесткостью k . На границу $x = 0$ со стороны стержня 1 падает прямая волна, описываемая функцией $f_1 = (a_1 t - x)$, где a_1 – скорость распространения волны в стержне 1. Параметры падающей волны считаются известными. Требуется определить формируемую в сечении $x = 0$ прямую волну $f_2 = (a_2 t - x)$, распространяющуюся в направлении оси x по стержню 2 (a_2 – скорость распространения волны в стержне 2), и обратную волну $\varphi_1(a_1 t + x)$, распространяющуюся по стержню 1 в другом направлении.

Волновая модель процесса

Полагаем, что на процесс прохождения волны через упругий элемент граничные условия на левом конце первого стержня и на правом конце второго стержня не оказывают влияния, т. е. стержни являются полуограниченными. Начало координат совмещено с положением упругого элемента.

Движение поперечных сечений рассматриваемой динамической системы описывается волновыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ – перемещения сечений соответственно 1-го и 2-го стержней;

a_1 , a_2 – скорости распространения волн деформаций в стержнях.

Начальное состояние системы описывается равенствами: при $t = 0$

$$u_1(x, 0) = u_1(x), \quad u_2(x, 0) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = V(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Граничные условия рассматриваемой динамической системы имеют вид: для $x = 0$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x}, \tag{5}$$

$$E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -k [u_1(0, t) - u_2(0, t)], \tag{6}$$

для $x = -\infty$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(-\infty, t)}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

для $x = \infty$

$$E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\infty, t)}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

где k – жесткость упругого элемента;

E_1, E_2 – модули упругости материалов стержней;
 A_1, A_2 – площади поперечных сечений стержней.

Продольная деформация в сечении $x = 0$

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = -f_1'(a_1 t - 0) + \varphi_1'(a_1 t + 0), \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -f_2'(a_2 t - 0). \tag{10}$$

Используя (9) и (10) в граничных условиях (5) и (6) и полагая, что при $t = 0$ перемещения сечений $x = 0$ в стержнях равны нулю, получим

$$\varphi_1'(a_1 t + 0) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f_2'(a_2 t - 0) + f_1'(a_1 t - 0), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f_2'(a_2 t - 0) + \frac{k(r+1)}{E_2 A_2 \cdot r} f_2(a_2 t - 0) = \\ = \frac{2k}{E_2 A_2} f_1(a_1 t - 0), \end{aligned} \tag{12}$$

где $r = \frac{E_1 A_1}{a_2} \frac{a_1}{E_2 A_2}$ – отношение волновых сопротивлений стержня 1 и стержня 2.

Из (12) при дифференцировании по t имеем

$$\begin{aligned} f_2''(a_2 t - 0) = -\frac{k(r+1)}{E_2 A_2 \cdot r} f_2'(a_2 t - 0) + \\ + \frac{2k}{E_2 A_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} f_1'(a_1 t - 0). \end{aligned} \tag{13}$$

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение дифференциального уравнения (13) строится методом последовательных приближений. Учитывая, что

$$a_2 f_2'(a_2 t - 0) = a_2 f_{2,0}'(a_2 t - 0) + \int_{t_0}^t a_2^2 f_2''(a_2 t - 0) dt,$$

а также выражение (13) для $f_2''(a_2 t)$, получим для i -го приближения (в дальнейших выражениях для упрощения опущены аргументы функций):

$$f_{2,i}' = f_{2,0}' + a_2 \int_{t_0}^t \frac{k}{E_2 A_2} \left[2 \frac{a_1}{a_2} f_1' - \left(1 + \frac{1}{r} \right) f_{2,i-1}' \right] dt,$$

где $f_{2,0}'$ – значение функции $f_2'(a_2 t)$ при $t = t_0$, $i = 1, 2, 3, \dots$ – число последовательных приближений.

Аппроксимируем падающую волну f'_1 ступенчатыми участками постоянной интенсивности. Тогда на рассматриваемом малом интервале времени $t_0 \leq t_0 + \Delta t$ $f'_1 = const$. В результате приходим к выражению:

$$f'_{2,i} = f'_{2,0} + \frac{k}{E_2 A_2} a_2 \left[2 \frac{a_1}{a_2} f'_1 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) f'_{2,i-1} \right] \Delta t, \quad (14)$$

где $\Delta t = t - t_0$.

Число последовательных приближений $i = 1, 2, 3, \dots$ стремится к тому значению, пока не будет обеспечено неравенство:

$$\frac{f'_{2,i} - f'_{2,i-1}}{f'_{2,i}} \leq \Delta \tilde{f},$$

где $\Delta \tilde{f}$ – относительная малая величина, характеризующая степень приближения.

После того, как будет найдено значение f'_2 , используя (11), находим

$$\varphi'_1(a_1 t + 0) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f'_2(a_2 t - 0) + f'_1(a_1 t - 0).$$

Рассмотрен случай, когда изменение падающей волны $f'_1(a_1 t - 0)$ описывается линейной функцией с отрицательным угловым коэффициентом (волна имеет треугольную форму):

$$f'_1(a_1 t - 0) = \begin{cases} \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{T} \cdot t, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

$$\tilde{f}'_1(a_1 t - 0) = \frac{f'_1(a_1 t - 0)}{\varepsilon_0} \begin{cases} 1 - \frac{t}{T}, & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ 0, & \frac{t}{T} > 1, \end{cases}$$

где ε_0 – максимальное значение модуля деформации в падающей волне;

T – длительность действия падающей волны $f'_1(a_1 t - 0)$;
 t – время.

Формулу (14) представим в безразмерных параметрах:

$$\tilde{f}'_{2,i} = \tilde{f}'_{2,0} + \frac{k}{E_2 A_2} a_2 \left[2 \frac{a_1}{a_2} \tilde{f}'_1 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) \tilde{f}'_{2,i-1} \right] \Delta \tilde{t},$$

$$\tilde{f}'_{2,i} = \frac{f'_{2,i}}{\varepsilon_0}, \tilde{f}'_{2,0} = \frac{f'_{2,0}}{\varepsilon_0}, \tilde{f}'_{2,i-1} = \frac{f'_{2,i-1}}{\varepsilon_0}.$$

Преобразуем отношение $\frac{k}{E_2 A_2} a_2 \cdot \Delta t = \tilde{k} \cdot \tilde{T} \cdot \Delta \tilde{t}$,

$$\tilde{k} = \frac{k \cdot \Delta l}{E_2 A_2}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\Delta T}, \quad \Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t}{T},$$

где Δl – единица длины стержня 2;

$\Delta T = \Delta l / a_2$ – время, в течение которого волна

$f'_2(a_2 t - x)$ пройдет расстояние Δl ;

\tilde{k} – отношение жесткости упругого элемента к продольной жесткости стержня 2 длиной Δl .

Тогда имеем

$$\tilde{f}'_{2,i} = \tilde{f}'_{2,0} + \tilde{k} \cdot \tilde{T} \cdot \left[2 \frac{a_1}{a_2} \tilde{f}'_1 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) \tilde{f}'_{2,i-1} \right] \Delta \tilde{t}. \quad (15)$$

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Осуществлена реализация предложенного алгоритма при моделировании процесса преобразования продольной волны на границе разнородных участков стержней, разделенных линейным упругим элементом.

При моделировании на экране монитора воспроизводится панель управления процессом (рис. 2). На панели имеются окна для ввода исходных данных, определяющих соотношение волновых сопротивлений r сопряженных стержней, относительную жесткость упругого элемента \tilde{k} , относительное максимальное значение модуля деформации в падающей волне $\tilde{f}'_1(a_1 t - 0)$, относительную длительность действия падающей волны $\tilde{T} = 1$.

Справа на панели расположены кнопки, активация одной из которых определяет форму падающей волны: треугольная с убывающей интенсивностью, прямоугольная, полуволна синусоиды, треугольная с возрастающей интенсивностью, экспоненциальная с убывающей интенсивностью, экспоненциальная с возрастающей интенсивностью. В дальнейшем приведены результаты моделирования для треугольной формы волны с убывающей интенсивностью.

После ввода исходных данных и определения формы падающей волны на панели управления активируется кнопка «Старт». Начинается процесс моделирования. На экране монитора в анимационном режиме воспроизводятся диаграммы падающей волны $\tilde{f}'_1(a_1 t - 0)$, формируемой в стержне 2 волны $\tilde{f}'_2(a_2 t - 0)$, и отраженной волны $\tilde{\varphi}'_1(a_1 t + 0)$ (рис. 3).

На панели управления расположены также кнопки «Пауза» для фиксации процесса моделирования в текущий момент времени и кнопка «Стоп» для возврата системы в исходное положение и возобновления при необходимости процесса моделирования с возможностью ввода новых исходных данных.

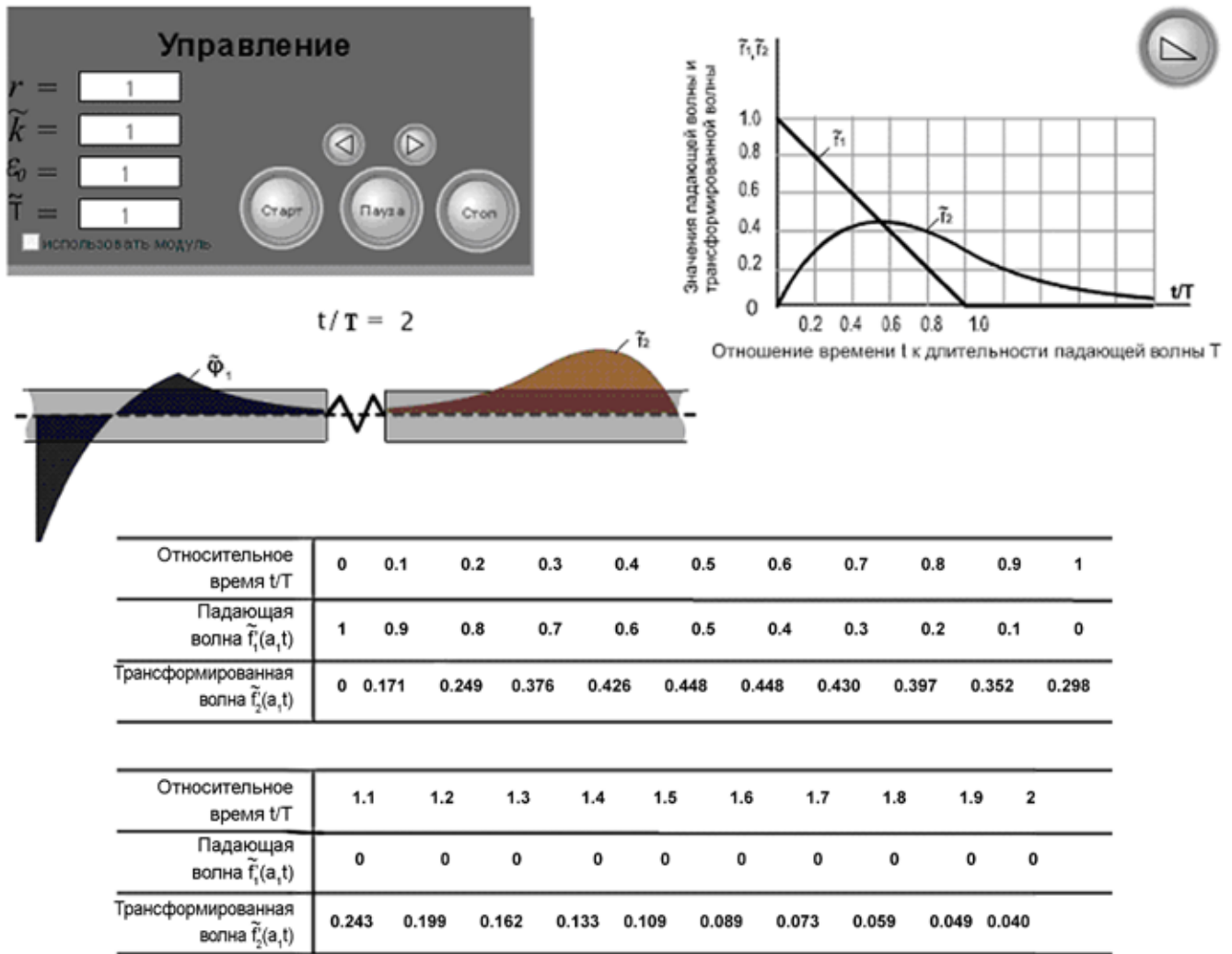


Рис. 2. Панель управления процессом моделирования и воспроизводимые на экране монитора диаграммы волн деформаций (процесс зафиксирован в момент времени $t/T = 2$)

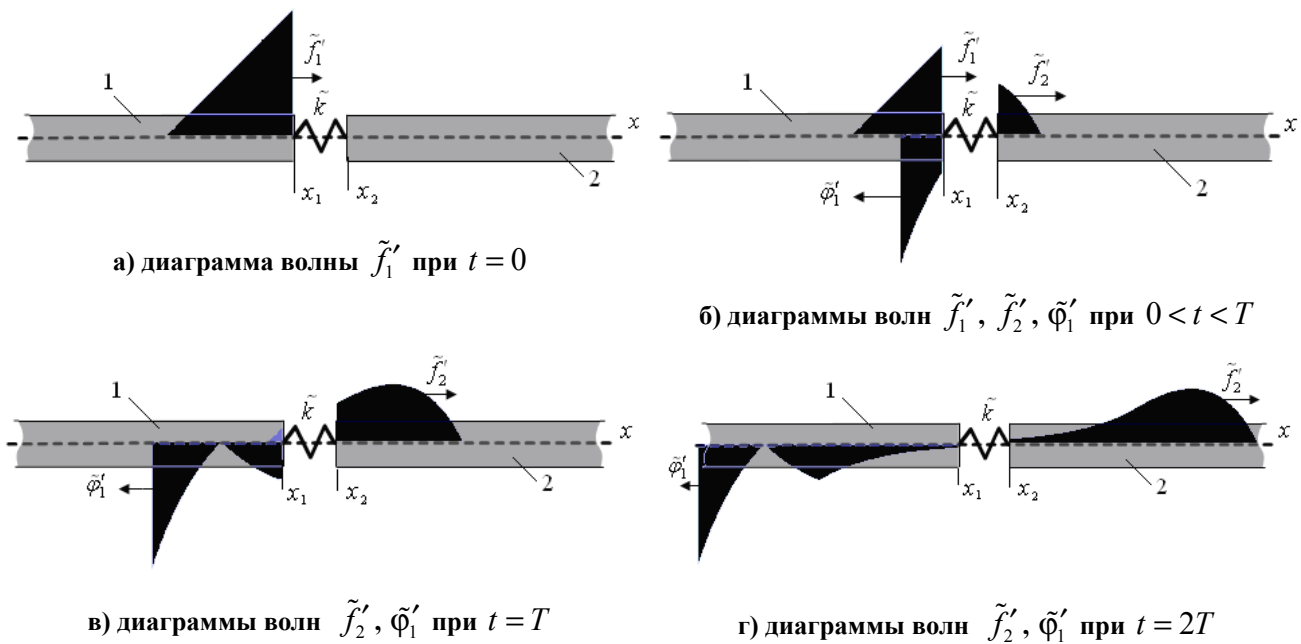


Рис. 3. Диаграммы прямых волн \tilde{f}_1' , \tilde{f}_2' и обратной волны $\tilde{\Phi}_1'$

На панели управления расположены кнопки «◀» или «▶», обеспечивающие возможность пошагового через $\Delta t/T$ воспроизведения анимационного процесса моделирования (пошагово вперед или пошагово назад).

Завершает процесс моделирования автоматизированное построение на экране монитора диаграмм падающей волны $\tilde{f}'_1(a_1t-0)$ и сформированной в стержне 2 волны $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$. Кроме этого, на экране монитора воспроизводится таблица значений текущего относительного времени t/T через шаг $\Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t}{T}$, значений для этих моментов времени падающей волны $\tilde{f}'_1(a_1t-0)$ и сформированной в стержне 2 волны $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Результаты численного расчета сопоставлены с результатами расчета по аналитическим зависимостям для $\tilde{f}'_2(a_2t)$, приведенным в [4]:

$$\tilde{f}'_2(a_2t) = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left[\left(1 + \frac{r}{(r+1) \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{k}} \right) \times \left(1 - \exp \left(-\frac{r+1}{r} \cdot \tilde{k} \cdot \tilde{T} \cdot \frac{t}{T} \right) \right) - \frac{t}{T} \right],$$

$$0 \leq \frac{t}{T} \leq 1 \tag{16}$$

$$\tilde{f}'_2(a_2t) = \tilde{f}'_2(a_2T) \cdot \exp \left(-\frac{(r+1) \cdot \tilde{k} \cdot \tilde{T}}{r} \left(\frac{t}{T} - 1 \right) \right),$$

$$\frac{t}{T} \geq 1. \tag{17}$$

В таблице 1 представлены результаты расчета параметров трансформированной волны $\tilde{f}'_2(a_2t)$ на основе численного расчета по формуле (15) и аналитического расчета по формулам (16), (17). Результаты близки и отличаются лишь в третьем знаке после запятой.

Таблица 1

Результаты расчета параметров трансформированной волны $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$

Время, t/T	Падающая волна, $\tilde{f}'_1(a_1t-0)$	Трансформированная волна $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$			
		Расчет по формулам (16), (17)	Моделирование	Расчет по формулам (16), (17)	Моделирование
		$\tilde{k} = 1$		$\tilde{k} = 2$	
0	1,0	0	0	0	0
0,1	0,9	0,172	0,169	0,3120	0,3050
0,2	0,8	0,294	0,290	0,4880	0,4800
0,3	0,7	0,376	0,372	0,5730	0,5650
0,4	0,6	0,426	0,421	0,5970	0,5900
0,5	0,5	0,448	0,443	0,5810	0,5740
0,6	0,4	0,448	0,443	0,5360	0,5310
0,7	0,3	0,430	0,425	0,4740	0,4700
0,8	0,2	0,397	0,392	0,3990	0,3960
0,9	0,1	0,352	0,348	0,3160	0,3140
1,0	0	0,297	0,293	0,2270	0,2250
1,1	0	0,243	0,240	0,1520	0,1520
1,2	0	0,199	0,197	0,1020	0,1020
1,3	0	0,163	0,162	0,0684	0,0694
1,4	0	0,133	0,133	0,0458	0,0469
1,5	0	0,109	0,109	0,0307	0,0317
1,6	0	0,089	0,089	0,0206	0,0214
1,7	0	0,073	0,073	0,0138	0,0144
1,8	0	0,060	0,06	0,0092	0,0097
1,9	0	0,049	0,049	0,0062	0,0066
2,0	0	0,040	0,040	0,0041	0,0044

Моделирование проведено для следующих параметров стержневой системы: падающая волна треугольной формы с убывающей интенсивностью и длительностью $\tilde{T} = 1$; отношение волновых сопротивлений $r = 1$; скорости распространения волн $a_1 = a_2$; отношение жесткости упругого элемента к продольной жесткости единицы длины стержня $2 \tilde{k} \in (1, 2, 4, 5, 6, 8, 10)$.

При моделировании воспроизводились диаграммы падающей волны \tilde{f}'_1 , сформированной в сечении $x = 0$

прямой волны \tilde{f}'_2 и обратной волны $\tilde{\Phi}'_1$ (часть диаграмм представлена на рисунке 4).

На рисунке 4 представлены воспроизводимые при моделировании диаграммы падающей \tilde{f}'_1 и трансформированной \tilde{f}'_2 волн для различных значений относительной жесткости \tilde{k} . Относительное время $\tilde{t} = t/T$.

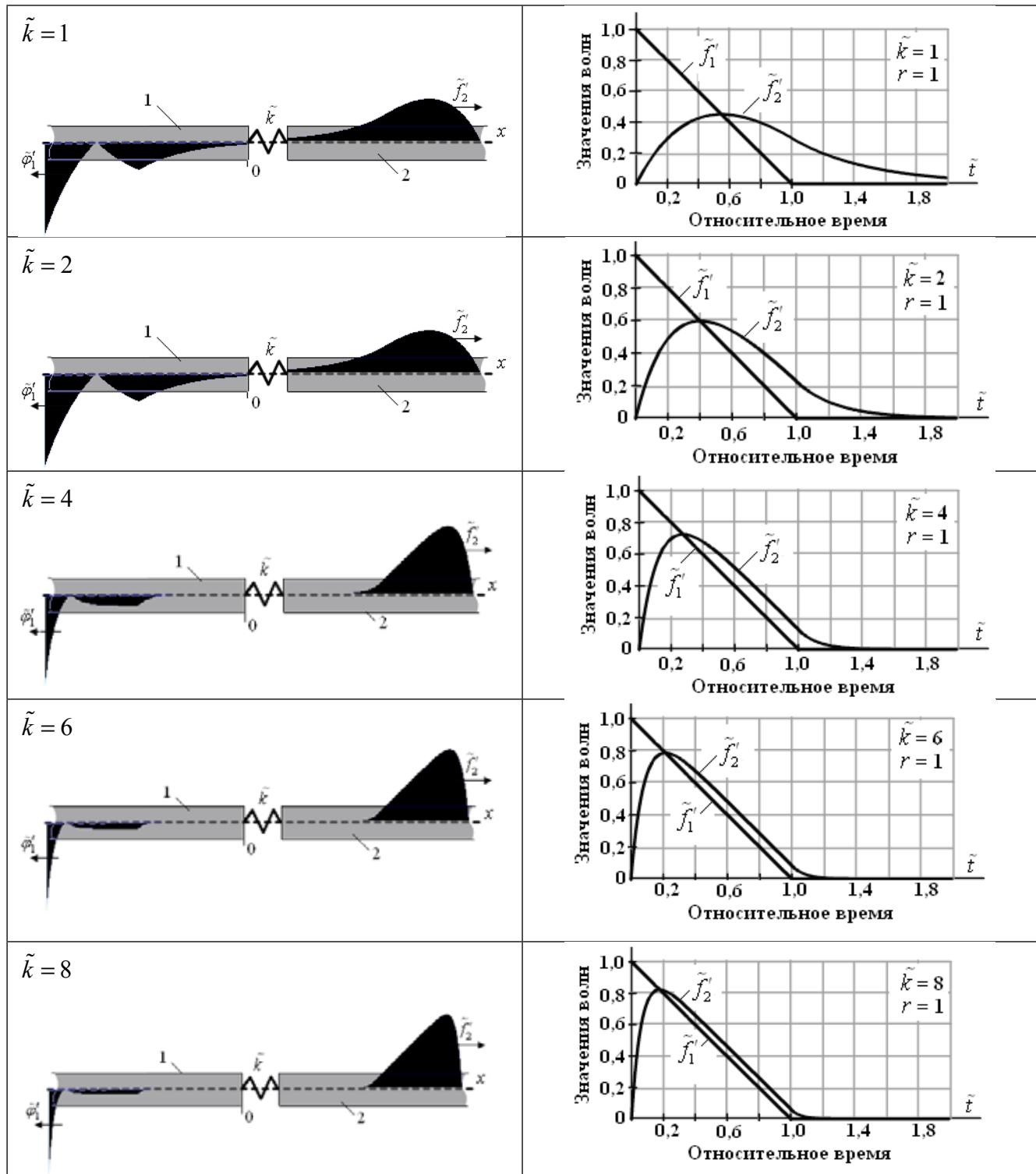


Рис. 4. Диаграммы волн \tilde{f}'_1 и \tilde{f}'_2 для различных значений жесткости \tilde{k}

Выводы

Анализируя результаты, заметим, что трансформация волны более существенна при меньших значениях жесткости упругого элемента \tilde{k} .

При $\tilde{k} \rightarrow \infty$ в формулах (16) и (17) слагаемые $\frac{r}{(r+1) \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{k}} \rightarrow 0$ и $\exp\left(-\frac{r+1}{r} \cdot \tilde{k} \cdot \tilde{T} \cdot \frac{t}{T}\right) \rightarrow 0$.

Формулы для расчета $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$ принимают вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_2(a_2t-0) &\rightarrow \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1; \\ \tilde{f}'_2(a_2t-0) &\rightarrow 0, \quad \frac{t}{T} \geq 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Формулы (18) описывают формируемую в стержне 2 волну деформации в случае идеального сопряжения стержней без упругого элемента в сопряжении. Если стержни из одного материала ($a_1 = a_2$) и имеют равные волновые сопротивления, то при $\tilde{k} \rightarrow \infty$

$$\tilde{f}'_2(a_2t-0) \rightarrow \left(1 - \frac{t}{T}\right) = \tilde{f}'_1(a_1t-0),$$

$$0 \leq \frac{t}{T} \leq 1;$$

$$\tilde{f}'_2(a_2t-0) \rightarrow 0, \quad \frac{t}{T} \geq 1.$$

Это означает, что при $\tilde{k} \rightarrow \infty$ формируемая в стержне 2 волна деформации $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$ стремится полностью воспроизвести падающую волну $\tilde{f}'_1(a_1t-0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Распространение волн деформаций в ударных системах. – М.: Наука, 1985. – 354 с.
2. Алпеева В.А. Возбуждение и преобразование волн деформаций в ударных системах машин для испытаний изделий: дисс. ... канд. техн. наук. – Фрунзе: ФПИ, 1990. – 281 с.
3. Еремьянц В.Э., Невенчаный Ю.В., Писаренко Н.Г. Ударное нагружение оснащенных стержней. – Фрунзе: Илим, 1987. – 165 с.
4. Манжосов В.К. Продольный удар. – Ульяновск, 2006. – 358 с.
5. Саруев Л.А., Шадрин А.В. Распространение силовых импульсов по буровым штангам постоянного сечения // Динамика и прочность горных машин: сб. тр. 2-й межд. конф., Новосибирск 12–14 мая 2003 г. – Новосибирск, 2003. – С. 64–69.
6. Шадрин А.В. Исследование закономерностей распространения силовых импульсов по колонне труб при бурении скважин: автореф. дисс. канд. техн. наук. – Томск, 2007. – 21 с.
7. Слистин А.П. Расчет параметров процесса передачи продольного ударного воздействия по стержням: автореф. дисс. канд. техн. наук. – Томск, 1990. – 18 с.