

УДК 681.50

С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина

НАСТРОЙКА ПИД-РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ МАКСИМИЗАЦИИ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Гайворонский Сергей Анатольевич, кандидат технических наук, доцент, окончил факультет автоматизации и вычислительной техники Томского ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. С.М. Кирова. Заместитель проректора-директора по учебной работе института кибернетики Томского политехнического университета, доцент Томского Политехнического университета. Имеет статьи, монографии, изобретения в области робастного анализа и синтеза систем автоматического управления. [e-mail: saga@tpu.ru].

Езангина Татьяна Александровна, окончила институт кибернетики Томского политехнического университета, аспирант Томского политехнического университета. Имеет статьи, свидетельства о регистрации программ для ЭВМ в области робастного анализа и синтеза систем автоматического управления. [e-mail: eza-tanya@yandex.ru].

Аннотация

Рассматривается система автоматического управления (САУ), содержащая пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД-регулятор) и интервальный объект управления. Используя корневые оценки показателей качества системы, разработана методика синтеза параметров регулятора, гарантирующего в системе максимальную степень устойчивости и допустимую степень колебательности. В основу методики положен коэффициентный анализ показателей качества и точности с применением интервального анализа. Работоспособность разработанной методики подтверждается результатами числового примера.

Ключевые слова: интервальный полином, максимальная степень устойчивости, синтез регулятора.

Gaivoronsky Sergey Anatolievich, Candidate of Engineering, Associate Professor, graduated from the Faculty of Automation and Computer Engineering at Tomsk Order of the October Revolution and the Order of the Red Banner Polytechnic Institute named after S.M. Kirov; Vice-Rector for Academic Affairs, Director of the Institute of Cybernetics of the Tomsk Polytechnic University, Associate Professor of Tomsk Polytechnic University; author of articles, monographs, and patents in the field of analysis and synthesis of robust control systems. e-mail: saga@tpu.ru.

Ezangina Tatiana Alexanderovna, Post-graduate student of the Tomsk Polytechnic University; graduated from the Institute of Cybernetics at the Tomsk Polytechnic University, author of articles, deposit-receipts for software in the field of robust analysis and and synthesis of automatic control systems. e-mail: eza-tanya@yandex.ru.

Abstract

The article deals with automatic control systems containing a proportional-integrated-differential controller and an interval control object. A method for synthesis of the controller parameters that ensures maximum stability degree and acceptable variability for the system is developed by using the root estimation of system quality parameters. Ratio analysis of quality parameters and accuracy by using the interval analysis is based on the method. The numerical example illustrated the capability of developed method is given.

Key words: interval polynomial, synthesis of controller, maximum stability degree.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на развитие современных средств регулирования, подавляющее большинство промышленных САУ основаны на регуляторах первого и второго порядка. Эти регуляторы во многих случаях могут обеспечить приемлемое качество управления и легко настраиваются. Одним из таких регуляторов является ПИД-регулятор.

Задача синтеза линейной САУ с максимальной степенью устойчивости решена в работах [1–2]. Предложен-

ные там методы основаны на использовании нормированных полиномов и применении к ним достаточных условий максимальной степени устойчивости. При этом разработанные подходы приемлемы только для САУ низких порядков.

На практике параметры реальных САУ могут изменяться в процессе эксплуатации или быть неточно известными. Если заданы диапазоны возможных значений неизвестных параметров или пределы изменения нестабильных параметров, то говорят об их параметрической

интервальности. Системы, имеющие интервальные параметры, получили название интервальных систем.

Для оценки работоспособности САУ желательно определить ее наихудшее качество и сравнить его с допустимым. При этом наихудшее качество называют робастным и определяют при наихудших сочетаниях интервальных коэффициентов характеристического полинома [3].

При проектировании САУ, согласно [1–2], желательно обеспечить в ней максимальную степень устойчивости, ограничив при этом степень колебательности САУ. Поэтому представляется интерес задача обеспечения в интервальной системе таких корневых оценок показателей качества, которые удовлетворяли бы указанным выше требованиям к проектируемой САУ.

Для задания желаемого качества системы, соответствующего этим корневым показателям, может быть использована ломаная линия $ABCD$ (рис. 1), задающая границу области Γ локализации корней характеристического полинома.

1 Постановка задачи

Рассмотрим САУ со структурой, которая приведена на рисунке 2.

В качестве интервального объекта управления выберем объект управления 3-го порядка, имеющий передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{b}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \quad (1)$$

где b и $a_i, i = \overline{0, 3}$ – коэффициенты передаточной функции, \underline{a}_i – нижний предел, \overline{a}_i – верхний предел, s – оператор Лапласа. В качестве линейного регулятора будем

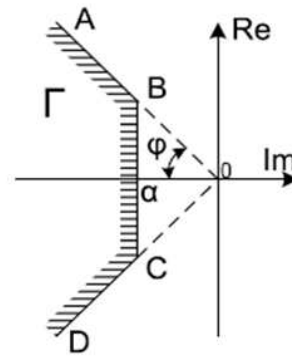


Рис. 1. Область желаемого расположения корней

использовать ПИД-регулятор с передаточной функцией:

$$W_p = \frac{k_1s + k_0 + k_2s^2}{s}, \quad (2)$$

где k_0, k_1, k_2 – параметры регулятора.

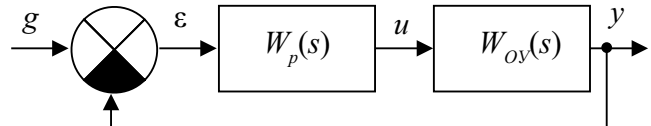


Рис. 2. Структура САУ

Для дальнейшего синтеза ПИД-регулятора получен интервальный характеристический полином:

$$D(s) = d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0. \quad (3)$$

Заметим, что коэффициенты d_i в (3) включают в себя

параметры регулятора и параметры интервального объекта. Область возможных значений интервальных параметров системы (многогранник P_m , являющийся прямоугольным гиперпараллелепипедом) отображается на комплексную плоскость корней в виде областей их локализации и отрезков вещественной оси, где локализуются вещественные корни (рис. 3).

Необходимо определить настройки ПИД-регулятора, обеспечивающие на комплексной плоскости корней максимальное расстояние от мнимой оси до ближайшего корня и расположение корней в заданном секторе.

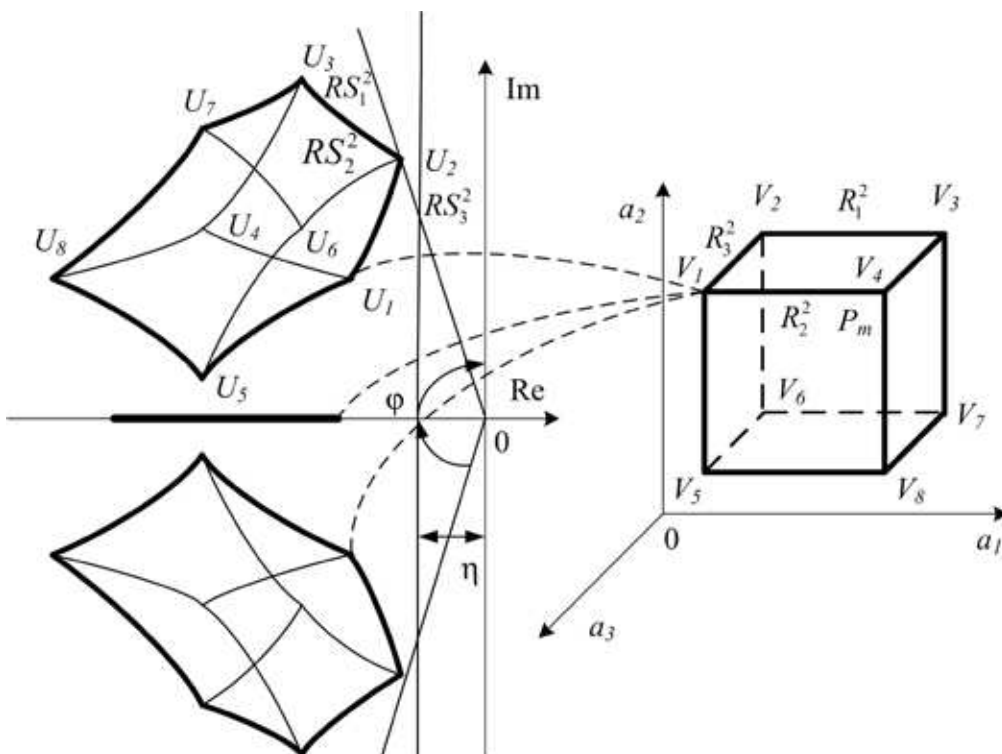


Рис. 3. Корневое отображение параметрического многогранника САУ

2 ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА И ТОЧНОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Для определения точности САУ в установившемся режиме необходимо воспользоваться выражением установившейся ошибки САУ [1]:

$$\varepsilon_{uw}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{dA(s)}{s(sA(s) + k_p b)} = \frac{d}{k_p},$$

где $k_p = D_w$ – передаточный коэффициент разомкнутой системы, называемый добротностью по скорости.

Рассмотрим параметр, характеризующий в САУ скорость затухания колебаний – колебательность $\mu = tg(\varphi)$. В связи с тем, что в данной работе рассматриваются нестабильные параметры системы, представляет интерес задача определения по коэффициентам интервального характеристического полинома, углового сектора расположения областей локализации его корней.

Согласно выражению для определения показателей колебательности δ_i , $i = 1, n-1$ стационарной системы [3], можно записать выражения δ_i для системы с интервальными параметрами:

$$\delta_i = \frac{d_i^2}{d_{i-1} d_{i+1}} > \delta_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4)$$

где δ_0 – допустимый показатель колебательности, определяемый из рисунка 4.

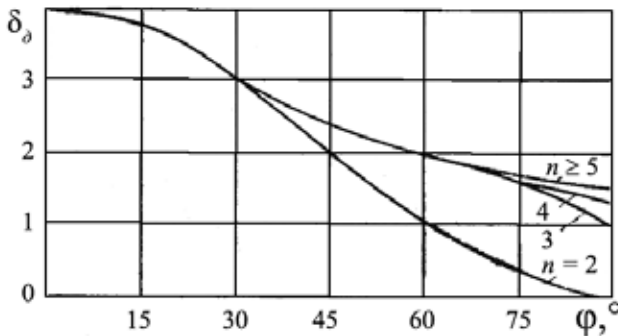


Рис. 4. Допустимый показатель колебательности

Доказательство. Пусть $d_i^2 = m$, а $n = d_{i-1} d_{i+1}$. Согласно [3], для оценки колебательности системы с переменными параметрами желательно определить ее наихудшее качество в наихудшем режиме. В данном случае система обладает наихудшим качеством, если

$$\delta_i \rightarrow \min. \quad (5)$$

Для выполнения условия (4) необходимо, чтобы

$$m \rightarrow \min, \quad n \rightarrow \max. \quad (6)$$

Очевидно, что (6) достигается при выборе следующих значений: $m = d_i$, $n = d_{i-1} d_{i+1}$. Если условие (5) выполняется для указанных пределов интервальных коэффициентов, то они выполняются и для всех других их значений из заданных интервалов.

Другим, не менее важным корневым показателем качества системы является степень устойчивости – расстояние от мнимой оси до ближайшего корня. Ее знание позволяет дать оценку времени затухания переходного процесса в

САУ. Для стационарной системы на основе достаточного условия заданной степени устойчивости η согласно [3] можно записать достаточные условия максимальной робастной степени устойчивости для интервальной системы через показатели устойчивости λ_i , $i = 1, n-2$:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\overline{d_{i-1}} \overline{d_{i+2}}}{(\underline{d_i} - \overline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta)(\overline{d_{i+1}} - \underline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta)} = \\ &= 0,465, \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \lambda_j &< 0,465, \quad j = \overline{1, n-2}, \quad j \neq i, \\ f_0 &\geq 0, \\ f_l &\geq 0, \quad l = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\text{где } f_0 = \underline{d_0} - \overline{d_1}\eta + 2\underline{d_2} \frac{\eta^2}{3},$$

$$f_l = \underline{d_l} - \overline{d_{l+1}}(n-l-1)\eta,$$

$$l = \overline{1, n-1}.$$

Доказательство. Очевидно, что увеличивать значение η в системе (7), меняя параметры регулятора, можно до тех пор, пока $\lambda_i < 0,465$ для любого $i = 1, n-2$. При $\lambda_i = 0,465$ получаем максимальное значение показателя устойчивости λ_i , соответствующее наибольшей степени устойчивости САУ.

При этом выбор пределов коэффициентов d_i осуществляется согласно условию:

$$\lambda_i \rightarrow \max, \quad f_l \rightarrow \min. \quad (8)$$

Заметим, что знаменатель выражения λ_i в (7) может принимать минимальное значение как при $\underline{d_{i+1}}$, так и при $\overline{d_{i+1}}$. Введем обозначения $\underline{d_{i-1}} \underline{d_{i+2}} = m$, $(\underline{d_i} - \overline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta)(\overline{d_{i+1}} - \underline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta) = n$. Очевидно, что условие (8) выполняется при

$$m \rightarrow \max \text{ и } n \rightarrow \min \quad (9)$$

На основе интервального анализа установлено, что условия (9) выполняются при $m = \overline{d_{i-1}} \overline{d_{i+2}}$, $n = (\underline{d_i} - \overline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta)(\overline{d_{i+1}} - \underline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta)$. Если условия (8) выполняются для указанных пределов интервальных коэффициентов, то они выполняются и для всех других их значений из заданных интервалов.

3 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ПИД-РЕГУЛЯТОРА

Предположим, что добротность по скорости известна. Тогда на основании (1) и (2) выразим параметр регулятора k_0 через добротность:

$$k_0 = D_w \frac{a_0}{b}. \quad (10)$$

Пусть допустимый показатель колебательности $\delta_0 = 1,6$, что соответствует расположению корней характеристического уравнения в секторе $\varphi = 55^\circ$.

Согласно (4), запишем достаточное условие заданной робастной степени колебательности $\delta_1 = \frac{d_1^2}{d_0 d_2} < 1,6$ и

определим параметр регулятора k_2 через параметр k_1 :

$$k_2 = \frac{(bk_1 + a_0)^2 - 1,6b k_0 a_1}{-1,6b k_0}. \quad (11)$$

Далее получим выражение для параметра k_1 из выражения предельного значения показателя степени устойчивости $\lambda_2 = \frac{d_1 d_4}{(d_2 - d_3 \eta)(d_3)} = 0,465$:

$$k_1 = \frac{(0,465((a_1 + bk_2) - a_3 \eta)(a_3)) - a_0 a_3}{ba_3}. \quad (12)$$

Сформируем систему неравенств на основании выражений (11) и (12), а также достаточного условия заданной степени колебательности (4) и условий (7):

$$\begin{cases} \frac{d_0 d_3}{(d_1 - 2d_2 \eta)(d_2 - \eta d_3)} - 0,465 < 0, \\ d_1 \geq 2d_2 \eta, \\ d_2 \geq \eta d_3, \\ d_0 - d_1 \eta + 2d_2 \frac{\eta^2}{3} \geq 0, \\ \frac{d_1^2}{d_0 d_3} - 1,6 > 0, \\ \frac{d_3^2}{d_2 d_4} - 1,6 > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение данной системы позволяет определить максимальную степень устойчивости САУ при заданной точности управления и ограничении на степень колебательности САУ.

4 ПРИМЕР СИНТЕЗА

Пусть заданы коэффициенты интервального объекта (1), тогда коэффициенты полинома (3) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} d_4 \in [0,05; 0,1], \quad d_3 \in [0,8; 0,9], \quad d_2 \in [2,6+k_2; 3+k_2], \\ d_1 \in [0,5+k_1; 1+k_1], \quad d_0 = bk_0, \quad b = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Требуется обеспечить в САУ максимальную степень устойчивости при заданной добротности по скорости $D_w = 10$ и ограничении степени колебательности значением 1,6.

Подставив в (10) значения коэффициентов (14) и значение добротности по скорости, найдем параметр регулятора k_0 ($k_0 = 10$).

Согласно (12), получим выражение параметра k_2 через параметр k_1 :

$$k_2(k_1) = \frac{(k_1^2 + k_1 - 47,75)}{16}. \quad (15)$$

Подставив в (13) выражения (12), (14) и (15), получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{9}{((k_1(\eta) + 0,5) - 2\eta(3 + k_2(k_1(\eta))))((3 + k_2(k_1(\eta))) - 0,9\eta)} - 0,465 < 0, \\ (k_1(\eta) + 0,5) \geq 2\eta(3 + k_2(k_1(\eta))), \\ (3 + k_2(k_1(\eta))) \geq 0,9\eta, \\ 10 - (k_1(\eta) + 1)\eta + (3 + k_2(k_1(\eta)))\frac{\eta^2}{3} \geq 0, \\ \frac{(2,6 + k_2(k_1(\eta)))^2}{0,9(k_1(\eta) + 1)} - 1,6 > 0, \\ \frac{0,64}{0,1(3 + k_2(k_1(\eta)))} - 1,6 > 0. \end{cases}$$

Графическое решение данной системы неравенств показано на рисунке 5.

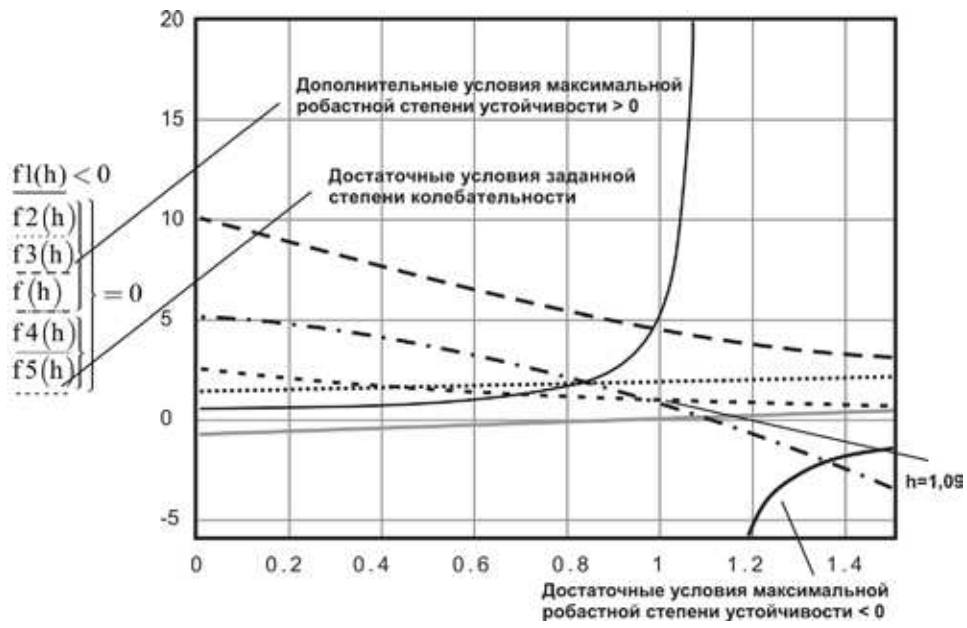


Рис. 5. Графическое решение системы неравенств

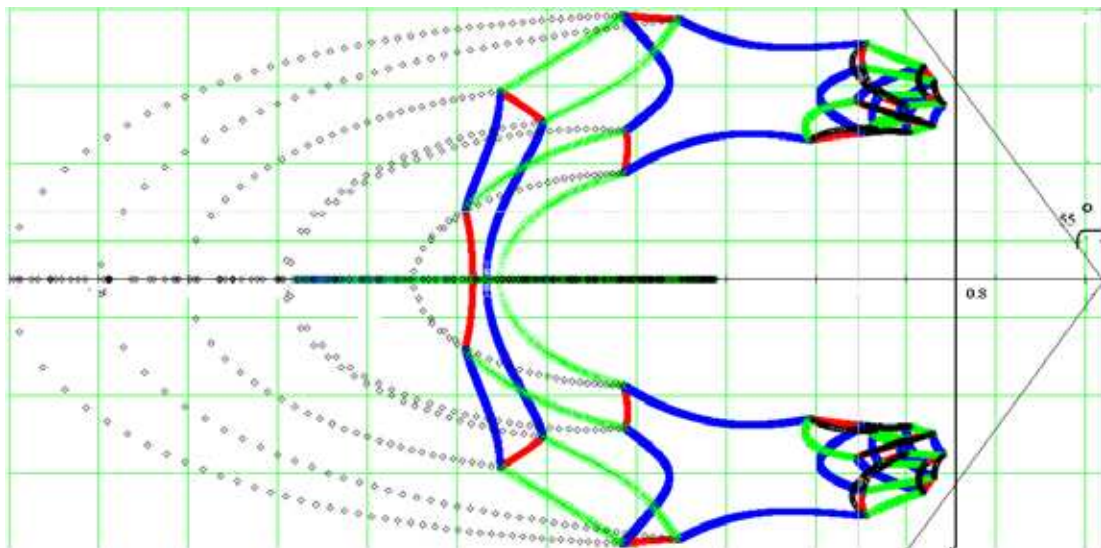


Рис. 6. Области локализации полюсов САУ с синтезированным регулятором

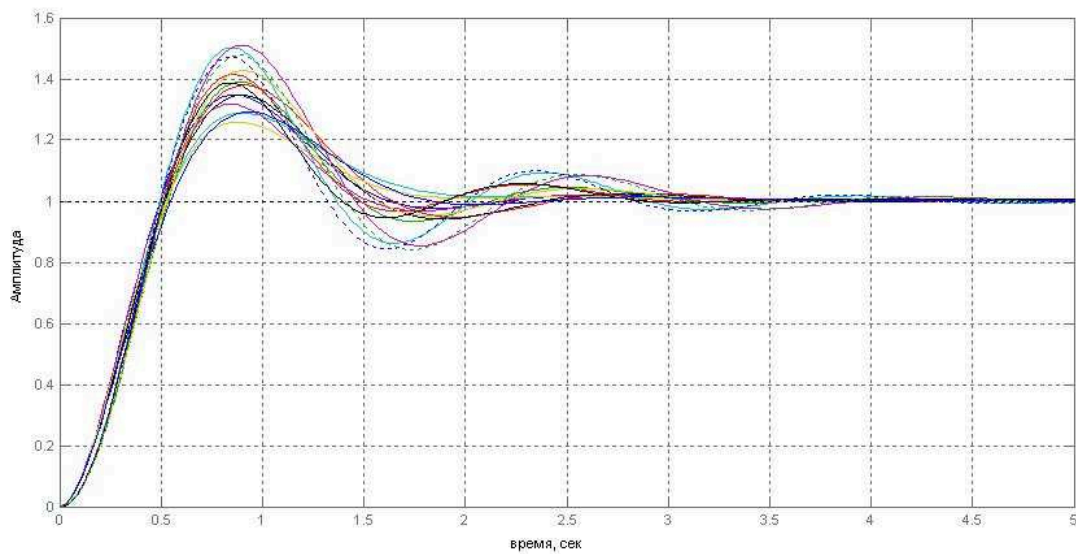


Рис. 7. Переходная характеристика САУ

Из рисунка 5 видно, что максимальная степень устойчивости $\eta = 1,09$. Тогда на основании выражений для параметров k_1, k_2 определим $k_1 = 0,14, k_2 = 6,3$.

Области локализации полюсов САУ с найденными настройками ПИД-регулятора имеют вид, показанный на рисунке 6, из которого видно, что предъявленные к САУ требования выполняются, а именно: у интервальной САУ реальная максимальная робастная степень устойчивости $\eta = 0,8$ и степень колебательности не превышает $\mu = \operatorname{tg}(55^\circ) = 1,6$.

При полученных настройках ПИД-регулятора на рисунке 7 построены переходные характеристики системы.

Из рисунка 7 видно, что минимальное время переходного процесса $t_n = 2,75$ с, что соответствует полученной максимальной степени устойчивости САУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложена методика параметрического синтеза ПИД-регулятора, обеспечивающего максимальную степень устойчивости САУ при ограничении на ее степень колебательности.

2. Разработанный алгоритм синтеза ПИД-регулятора использует коэффициентные оценки показателей качества САУ, определяемые на основе коэффициентов интервального характеристического полинома.

3. Рассмотренный численный пример подтверждает работоспособность разработанной методики параметрического синтеза ПИД-регулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шубладзе А.М. Способы синтеза систем управления максимальной степенью устойчивости // АиТ. – 1980. – № 1. – С. 28–37.

2. Ким Д.П. Синтез регулятора максимальной степени устойчивости // Приводная техника. – 2003. – № 4. – С. 52–57.

3. Петров Б.Н., Соколов Н.И., Липатов А.В. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами. Инженерные методы анализа и синтеза. – М. : Машиностроение, 1986. – 256 с.