

УДК 621.9-5,539.31

Н.Ю. Санкин

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТОКАРНЫХ СТАНКОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОЦЕССА РЕЗАНИЯ

*Санкин Николай Юрьевич, кандидат технических наук, окончил электромеханический факультет Ленинградского политехнического института, доцент кафедры «Информационные технологии» Ульяновского государственного университета. Имеет монографию и статьи в области динамики станков. [e-mail: sankin66@mail.ru].*

### Аннотация

Работа посвящена решению задачи, заключающейся в определении границ устойчивого резания на токарных станках. Предложен частотный критерий устойчивости нелинейной замкнутой системы, включающей вязко-упругое звено с распределенными параметрами.

Ключевые слова: динамика станков, амплитудно-фазовая частотная характеристика, динамическая характеристика станка.

*Yury Nikolaevich Sankin, Doctor of Engineering, Professor; graduated from the Faculty of Electromechanics at Leningrad Polytechnic Institute; Professor of the 'Theoretical and Applied Mechanics' Chair at Ulyanovsk State Technical University; author of monograph and articles in the field of machine tool dynamics. e-mail: sankin66@mail.ru.*

### Abstract

The article deals with an issue of maximum turning machines' stability at cutting. It offers a frequency criterion of stability for a nonlinear closed loop system composed of a viscous-elastic linkage with distributed constants.

Key words: machine tool dynamics, amplitude-phase-frequency characteristic, machine tool dynamic characteristic.

Технологические процессы обработки изделий резанием занимают и будут занимать важнейшее место в машиностроении. Срок службы, надежность, более высокое качество машин, механизмов, приборных устройств зависят от качества их обработки. Повышение технического уровня и эффективности технологических процессов невозможно без глубокого и всестороннего их изучения. Высокая эффективность технологических процессов, таких, как обработка резанием, достигается при максимальном использовании технологических возможностей станков.

При обработке деталей на токарных станках при некоторых условиях возникает нарушение устойчивого движения суппорта, которое выражается в появлении вибраций технологической упругой системы станка при резании. Вибрации негативно влияют на качество обрабатываемой поверхности. Высокочастотные колебания приводят к ухудшению поверхности обработки, низкочастотные – к отклонению формы детали от заданной чертежом. На обработанной поверхности появляются волны, «муар» и т. п., при этом понижается стойкость инструмента, ухудшаются точность станка, его надежность и в конечном итоге долговечность.

Особенно сильно проявляются вышеперечисленные явления при точении заготовок из труднообрабатываемых материалов, таких как некоторые конструкционные стали и титановые сплавы.

Задача динамики станка [1] при резании представляет собой неконсервативную задачу. Решение подобной задачи основано на общих положениях механики, теории автоматического регулирования, в частности на теории устойчивости движения. При определении динамических характеристик эквивалентной упругой системы используются общие положения теории упругости, теории колебаний, современные математические методы. Кроме того, существует ряд станочных проблем, таких как учет контактной жесткости станков [2], специфики трения в направляющих скольжения [3], процесса резания металла [4–8] и методов испытаний [9].

Предложенная работа посвящена методам оценки устойчивости токарных станков. При этом рассматриваются режимы резания при не вполне определенной динамической характеристике резания, которая имеет место, например, при обработке хрупких материалов, таких как чугун, бронза, пластмасса, дерево. Рассматриваются и черновые режимы обработки при наличии стружки скола, суставчатой или надлома, а также при наличии стружколома, которым снабжаются станки с программным управлением.

Применение частотных методов определения границ устойчивого резания предполагает знание амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) линейной части упругой системы токарного станка. Динамические

характеристики станка с одинаковой точностью во всем частотном диапазоне экспериментально определить не удается [10]. Возможны ситуации, когда АФЧХ по перемещению определить затруднительно, например, на движущихся объектах, таких как суппорт токарного, стол фрезерного станка, то есть имеющих постоянную составляющую перемещения. В этих случаях целесообразно в качестве кинематического параметра снимать скорость перемещения, то есть регистрировать АФЧХ по скорости.

При помощи АФЧХ по перемещению достаточно точно определяются низкочастотные витки (0–200 Гц) и витки среднего диапазона (200–1000 Гц). При помощи АФЧХ по скорости хорошо идентифицируются среднечастотные витки. Посредством АФЧХ по ускорению – высокочастотные витки (свыше 1000 Гц). Формулы для обработки АФЧХ

по перемещению даны в работе [11]. Формулы для идентификации АФЧХ по скорости и ускорению до настоящего времени отсутствовали. В связи с этим возникла необходимость разработать метод идентификации экспериментальных и расчетных АФЧХ металлорежущих станков по скорости и ускорению.

В данной статье для оценки режимов резания, когда характеристика резания не вполне определенная [12, 13], используется частотный вариант решения задачи.

Пусть  $P(e)$  – нелинейная сила резания, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} P(e) &= 0, \quad e = 0; \\ \int_0^e P(z) dz &> 0; \quad P(e) \leq M > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

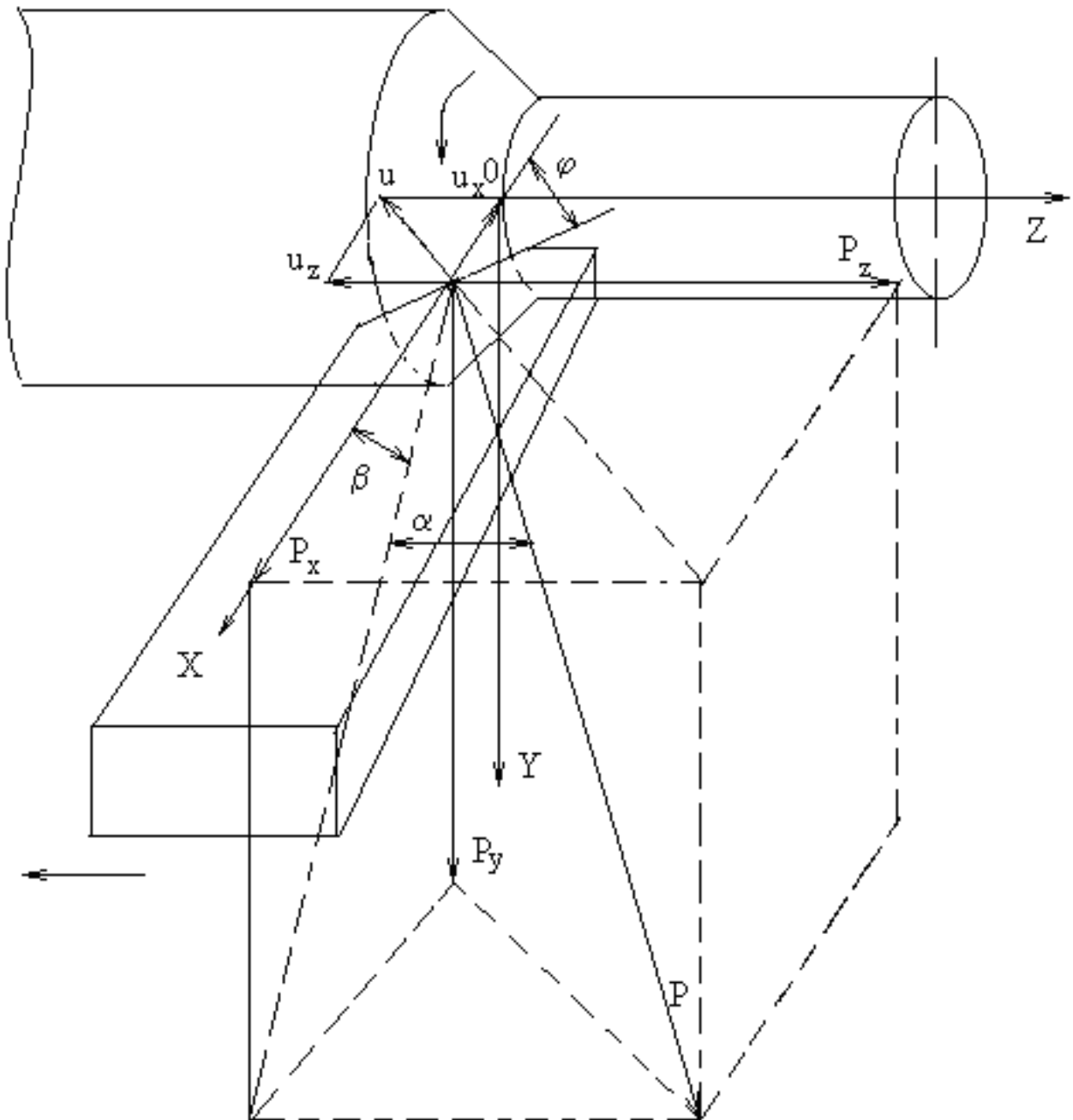


Рис. 1. Составляющие  $P_x, P_y, P_z$  силы  $P$  резания и составляющие  $u_x$  и  $u_z$  относительного перемещения  $u$  резца и заготовки

где параметр  $e$  – толщина срезаемой стружки, которая связана с толщиной среза зависимостью  $e = \xi\delta$ , где  $\xi$  – усадка стружки;  $\delta$  – толщина среза;  $M$  – положительно определенная величина.

В линейной теории устойчивости процесса резания часто применяют зависимость [13]:

$$T_p \dot{P} + P = -\kappa_p [u_n(t) - \chi u_n(t - \tau)], \quad (2)$$

где  $P$  – приращение силы резания, Н;

$T_p$  – постоянная времени стружкообразования, которая является постоянной времени формирования силы резания, с;

$\kappa_p$  – коэффициент резания, Н/м;

$u_n(t)$  – проекция относительного перемещения между резцом и заготовкой на нормаль к поверхности обработки, м;

$\chi$  – коэффициент перекрытия;

$\chi u_n(t - \tau)$  – запаздывающее воздействие следов обработки;

$t$  – время, с;

$\tau$  – время запаздывания, с.

Зависимость (2) является одной из наиболее простых, причем в работе [12] учитывать запаздывающее воздействие рекомендуется, а в работе [14] – не рекомендуется.

Предположим,  $T_p$  – примерно одинакова как для толщины срезаемой стружки, так и для силы резания, при этом

$$\frac{P}{e} = \frac{1}{\xi} \kappa_p,$$

где  $e$  – толщина срезаемой стружки, м;

$\xi$  – усадка стружки, м.

Тогда зависимость (2) можно переписать в виде:

$$\text{где } \dot{e} = C_1 [u_n(t) - \chi u_n(t - \tau)] - hP, \quad (3)$$

$$C_1 = -\frac{\xi}{T_p}; \quad h = \frac{\xi}{T_p \kappa_p}.$$

Далее предположим, что общий характер зависимости (3) справедлив и для больших отклонений, причем нелинейность и неопределенность силы резания  $P$  отнесем к последнему слагаемому, то есть положим  $P = P(e)$ .

Известно, что нелинейные силы резания  $P$  имеют запаздывающий характер [14], их величина определяется проекцией относительного перемещения между резцом и заготовкой на нормаль к поверхности резания  $u_n(t)$  и параллельной обратной связью, учитывающей наличие следов обработки от предыдущего прохода  $\chi u_n(t - \tau)$  (рис. 1):

$$P_n [e(t + T_p)] = -\kappa_p [u_n(t) - \chi u_n(t - \tau)], \quad (4)$$

где  $\tau_p$  – время формирования силы резания.

Заменим выражение  $P_n [e(t + T_p)]$  некоторой осредненной непрерывной за время  $T_p$  зависимостью

$P [e(t + T_p)]$  и представим ее в виде ряда:

$$P [e(t + T_p)] = P [e(t)] + P' [e(t)] \dot{e}(t) T_p + \dots \quad (5)$$

После чего зависимость (3) переписывается так

$$\dot{e} = C_1 [u_n(t) - \chi u_n(t - \tau)] - hP(e), \quad (6)$$

где

$$C_1 = -\kappa_p / P' T_p = -1 / T_p;$$

$$h = 1 / P' T_p = 1 / T_p \kappa_p;$$

$$P' / \kappa_p = 1.$$

Для установившейся силы резания  $P_0(e_0)$  обычно принимают эмпирическую зависимость [14]:

$$P_0 = \kappa_0 B \left( \frac{e_0}{\xi} \right)^\varepsilon, \quad (7)$$

где  $\kappa_0$  – некоторый коэффициент;  $B$  – ширина стружки, м;

$e_0$  – установившееся значение толщины стружки,  $e_0 > 0$ ;

$\varepsilon$  – показатель степени,  $\varepsilon > 0$ .

При  $e = 0, P_0 = 0$ . Положим  $e_1 = e_0 + e; u_n = u_{n0} + u_n$ ;  $P_1 = P_0 + P$ , где  $e_0, u_{n0}, P_0$  – установившиеся значения рассматриваемых величин;  $e, u_n, P$  – их малые отклонения от установившихся значений.

Представим  $P_1$  в виде ряда, при условии, что отношение  $e_0 / e_0$  достаточно мало, согласно (7) получаем:

$$P_1 = \frac{\kappa_0 B}{\xi^\varepsilon} (e_0 + e)^\varepsilon = \kappa_0 B \left( \frac{e_0}{\xi} \right)^\varepsilon \left[ 1 + \varepsilon \frac{e}{e_0} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2!} \left( \frac{e}{e_0} \right)^2 + \dots \right].$$

Откуда для величины  $\kappa_p$  в выражении  $h$  получим формулу [14]:

$$\kappa_p = \kappa_0 \varepsilon \delta_0^{\varepsilon-1} B, \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  – показатель степени, определяемый экспериментально;

$\delta_0$  – установившаяся толщина срезаемого слоя, м;

$\delta_0 = e_0 / \xi$ .

Пусть интеграл

$$\int_0^e P(z) dz = \int_0^e [P_1(e_0 + z) - P_0(e_0)] dz = \kappa_0 B \delta_0^\varepsilon e_0 \left[ \frac{\varepsilon}{2!} \left( \frac{e}{e_0} \right)^2 + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3!} \left( \frac{e}{e_0} \right)^3 + \dots \right] > 0,$$

то есть условия (1) для функции  $P(e)$  выполнены. Более того, допустим, что функция  $P(e)$  вообще не является непрерывной и терпит разрывы первого рода (скол стружки, образование порошкообразной стружки), но интеграл

$$\int_0^e P(z) dz > 0,$$

следовательно, для оценки устойчивости рассматриваемой нелинейной системы можно воспользоваться общей формулой, приведенной в работе [12], которая в рассматриваемом случае имеет вид:

$$1 - \frac{1}{h} \operatorname{Re} \left\{ (C_1 + i\omega) (1 - \chi e^{-i\omega\tau}) W_{\text{ЭВС}}(i\omega) \right\} \geq q,$$

$$q > 0, \quad (9)$$

где  $W_{\text{ЭВС}}(i\omega)$  – передаточная функция эквивалентной упругой системы (ЭУС). Постоянную  $q$  на практике можно взять равной нулю. Множитель  $(1 - \chi e^{-i\omega\tau})$  учитывает тот факт, что на вход процесса резания подается сигнал  $u_n(t) - \chi u_n(t - \tau)$ , преобразование по Лапласу которого записывается так:  $(1 - \chi e^{-p\tau}) u_n(p)$ .

Формула (9) является частотным вариантом решения нелинейной задачи и представляет собой достаточное условие устойчивости.

Согласно (8):

$$\frac{C_1}{h} = -\kappa_p = -\kappa_0 \varepsilon \delta_0^{\varepsilon-1} B, \quad \frac{1}{h} = \frac{T_p \kappa_p}{\xi},$$

$$\frac{C_1 + i\omega}{h} = -\kappa_p \left( 1 - \frac{T_p}{\xi} i\omega \right). \quad (10)$$

Обозначим  $T_p / \xi = T_p^0$ .

Известно, что  $\kappa_p = \kappa B$ , где  $\kappa$  – коэффициент удельной силы резания,  $\kappa = \kappa_0 \varepsilon \delta_0^{\varepsilon-1}$  [12].

Тогда для критической ширины срезаемой стружки при условии, что  $P(e)$  не вполне определенная функция, подчиняющаяся лишь условиям (1), получим формулу [12, 13]:

$$B = \frac{1}{\kappa \left\{ -\operatorname{Re}_{\max} \left( (1 - \chi e^{-i\omega\tau}) (1 - T_p^0 i\omega) W_{\text{ЭВС}}(i\omega) \right) \right\}}, \quad (11)$$

где  $T_p^0$  – постоянная времени нелинейного процесса стружкообразования. Формула (11) записана в предположении, что передаточная функция устойчивой линейной части системы дается формулой:

$$W(p) = (1 - \chi e^{-p\tau}) W_{\text{ЭВС}}(p).$$

Ей соответствует следующая формула для критической глубины резания

$$t = \frac{\cos \varphi}{\kappa \left\{ -\operatorname{Re}_{\max} \left( (1 - \chi e^{-i\omega\tau}) (1 - T_p i\omega) W_{\text{ЭВС}}(i\omega) \right) \right\}}. \quad (12)$$

В линейной теории устойчивости используется формула [13]:

$$t = \frac{\cos \varphi}{\kappa \left\{ -\operatorname{Re}_{\max} \frac{(1 - \chi e^{-i\omega\tau}) W_{\text{ЭВС}}(i\omega)}{1 + T_p i\omega} \right\}}. \quad (13)$$

Так как  $\frac{1}{1 + T_p i\omega} = \frac{1 - T_p i\omega}{1 + T_p^2 \omega^2}$ , то формулы (12) и (13)

отличаются членом  $T_p^2 \omega^2$ , что является ценой недостаточной информации о силе резания  $P(e)$ , поэтому если считать по нелинейному критерию линейную задачу, то получится заниженная граница устойчивости.

Вопрос об определении  $T_p$  при наличии, например, дробления стружки (резание хрупких материалов), может быть решен путем осреднения силы резания. Формула (10) может быть получена без усадки стружки  $\xi$ , которая

полагается равной 1. При этом следует иметь в виду, что понятие усадки стружки вообще теряет смысл, например, при образовании порошкообразной стружки.

Рассмотрим нелинейную структурную схему токарного станка при резании. По-прежнему будем считать, что нелинейная сила резания определяется проекцией относительного перемещения  $\tilde{u}$  между резцом и заготовкой на нормаль  $n_u = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi)^T$  к поверхности обработки (рис. 1).

Возникающая при этом сила резания  $P$  воздействует на ЭУС. Упругую систему будем считать линейным вязкоупругим звеном с передаточной функцией [13]

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & W_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & W_{ZZ} \end{bmatrix}.$$

В динамической системе токарного станка, например модели УТ16 с диаметром наибольшей обработки  $D_H = 320$  мм, основную роль играют динамическая податливость шпиндельного узла в горизонтальном направлении, перпендикулярном оси шпинделя (ось OX), и динамическая податливость суппортного узла в том же направлении:

$$W_{XX} = \frac{k_1}{T_{21}^2 p^2 + T_{11} p + 1} + \frac{k_2}{T_{22}^2 p^2 + T_{12} p + 1},$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты усиления, м/Н;  $T_{21}$ ,  $T_{22}$  – постоянные времени, а также динамическая податливость суппортного узла в направлении подачи (ось OZ)  $W_{ZZ}$ , с. Передаточная функция суппортного узла  $W_{ZZ}$  дается формулой:

$$W_{ZZ} = \frac{b_1 p + 1}{b_1 m p^3 + (b_1 b_r + b_1 b_g + m) p^2 + (b_r + b_1 c - b) p + c} \approx \frac{k}{T_2^2 p + T_1 p + 1},$$

где  $m$  – масса суппорта, кг;  $c$  – жесткость его привода, Н/м;  $b$  – переменный угловой коэффициент наклона статической скоростной характеристики трения, Н/м·с;  $b_1$  – постоянная времени всплывания, с;  $b_r$  – коэффициент рассеяния энергии в цепи привода, Н·с;  $b_g$  – коэффициент вязкого (жидкостного) трения, Н/м·с.

Постоянные времени эквивалентного колебательного звена выражения  $W_{ZZ}$  находятся по формулам:

$$k = \frac{b_1}{b_1 c - b - b_g}; \quad T_2 = \frac{1}{\omega_0} = T_{2ZZ};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{b_1 c - (b + b_g)}{b_1 m}}; \quad T_1 = b_3 k;$$

$$b_3 = b_2 + b_g - \frac{b + b_g}{b_1^2 \omega_0^2 + 1},$$

где  $\omega_0$  – собственная круговая частота;  $\omega$  – круговая частота колебательного звена;  $b_3$  – коэффициент демпфирования.

Вектор силы резания  $\bar{P}$  представим как произведение ее модуля  $P$  и единичного орта  $n_p$ , определяющего направление вектора  $\bar{P}$ . Модуль силы резания  $P$ , как было отмечено выше, нелинейная и не вполне определенная функция толщины стружки (среза), причем то же самое можно сказать и в отношении углов  $\alpha$  и  $\beta$ , которые в дальнейшем считаются фиксированными.

На рисунке 2 изображена структурная схема нелинейной динамической системы станка без учета процессов в электроприводе, полагая, что сила резания удовлетворяет формуле (4). На вход звена, изображающего процесс резания, подается сигнал  $u_n(t) - \chi u_n(t - \tau)$ , обусловленный воздействием следов обработки. На выходе звена, изображающего процесс резания, получаем модуль силы резания  $P(e)$ . Умножение  $P(e)$  на вектор  $n_p$  – орт силы резания, превращает  $P(e)$  в векторную величину  $\bar{P}(e)$ . Произведение  $W(p) \bar{P}(e)$  порождает вектор перемещения  $\bar{u}$  на выходе упругой системы.

Скалярное умножение  $\bar{u}$  на  $n_u$ , то есть произведение векторов  $n_u^T \bar{u}$  дает проекцию относительного перемещения в зоне резания на нормаль к поверхности резания.

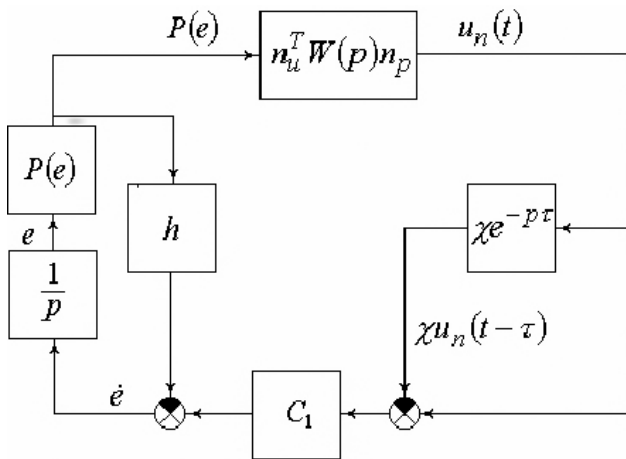


Рис. 2. Эквивалентная одномерная структурная схема нелинейной динамической системы станка при резании

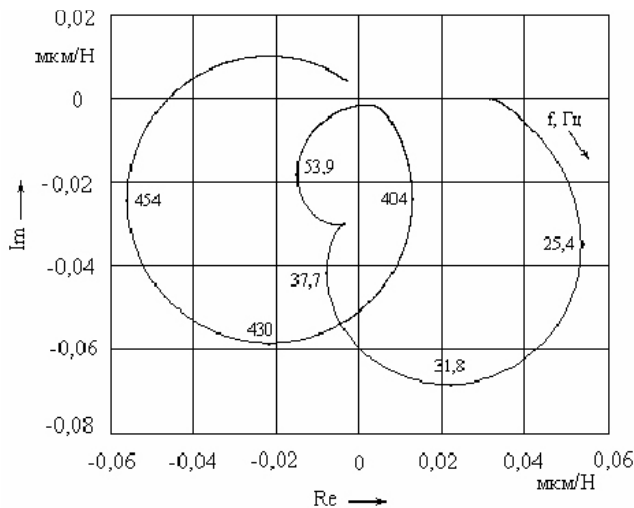


Рис. 3. АФЧХ  $(1 - T_p i \omega) W_{\text{ЭВС}}(i \omega)$

Если вместо  $\bar{u}$  подставить  $W(p) \bar{P}(e) = W(p) n_p P(e)$ , то получим  $n_u^T \bar{u} = n_u^T W(p) n_p P(e)$ . Следовательно, трехмерную структурную схему можно заменить эквивалентной одномерной.

Выражение  $W_{\text{ЭВС}}(p) = n_u^T W(p) n_p = tr WR$

представляет собой передаточную функцию ЭВС. Параллельное запаздывающее воздействие следов обработки от предыдущего прохода резца приводит к тому, что на вход звеньев, изображающих процесс резания, поступает воздействие  $u_n(t) - \chi u_n(t - \tau)$ , следовательно, умножается на величину  $(1 - \chi e^{-p\tau})$  не передаточная функция процесса резания  $W_p(p)$ , а передаточная функция  $W_{\text{ЭВС}}(p)$ , хотя с формальной точки зрения при рассмотрении линейной задачи это безразлично (рис. 2).

На рисунке 3 показана АФЧХ

$(1 - T_p i \omega) W_{\text{ЭВС}}(i \omega)$ , (14)

позволяющая оценить влияние постоянной времени стружкообразования на устойчивость станка при резании, происходящем с нарушением непрерывности образования стружки, то есть при появлении сколов, надломов и т. д., когда  $W_{xx}(i \omega)$  и  $W_{zz}(i \omega)$  рассчитываются по формулам, рассмотренным в [13], с использованием данных  $n = 500$  об/мин,  $\tau = 0,12$  с,  $T_p = 0,3$  мс,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\alpha = 16^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\chi = 0$ . Критическая глубина резания  $t$ , подсчитанная по формуле:

$t = \frac{0,5 \cos \varphi}{k \left\{ -\text{Re}_{\max} (1 - T_p i \omega) W_{\text{ЭВС}}(i \omega) \right\}}$ , (15)

при  $\text{Re}_{\max} (1 - T_p i \omega) W_{\text{ЭВС}}(i \omega) = 5,5 \cdot 10^{-8}$  м/Н, коэффициенте удельной силы резания  $k = 2 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, равна 2,3 мм,  $B = 4,6$  мм.

На рисунке 4 показана АФЧХ

$(1 - \chi e^{-i \omega \tau}) (1 - T_p i \omega) W_{\text{ЭВС}}(i \omega)$ , (16)

которая показывает влияние коэффициента перекрытия  $\chi$  на устойчивость процесса резания, когда  $W_{\text{ЭВС}}(i \omega)$  берется с использованием тех же данных, что и в (14), при  $\chi = 1$ .

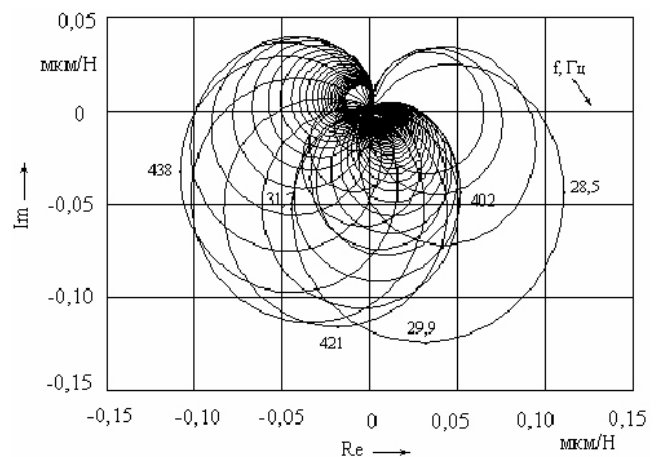


Рис. 4. АФЧХ  $(1 - \chi e^{-i \omega \tau}) (1 - T_p i \omega) W_{\text{ЭВС}}(i \omega)$

Величина критической ширины резания определяется по точке пересечения этой АФЧХ с вещественной осью

$\operatorname{Re}_{\max} \left( (1 - \chi e^{-i\omega\tau}) (1 - T_p i\omega) W_{\text{ЭВС}}(i\omega) \right) = 10 \cdot 10^{-8} \text{ м/Н}$ .  
Критическая глубина резания  $t$ , подсчитанная по формуле:

$$t = \frac{\cos \varphi}{k \left\{ -\operatorname{Re}_{\max} \left( (1 - \chi e^{-i\omega\tau}) (1 - T_p i\omega) W_{\text{ЭВС}}(i\omega) \right) \right\}},$$

равна 2,5 мм,  $B = 5,0$  мм.

При определении критической глубины резания с коэффициентом перекрытия  $\chi = 1$  при подсчете по формулам (15) и (16) получается примерно одинаковый результат.

Таблица

Постоянные времени стружкообразования  $T_p$

$d \cdot n$ , м·об/мин	Подача $s$ , мм/об			
	0,04	0,09	0,14	0,18
	Постоянные времени стружкообразования $T_p$			
0,04·500	1,15	1,19	1,24	1,28
0,04·800	0,72	0,75	0,78	0,81
0,04·1000	0,57	0,59	0,62	0,64
0,04·1250	0,46	0,48	0,49	0,52

где  $d = 0,04$  м – диаметр заготовки,  $n$  – частота вращения заготовки, об/мин.

Расчетные значения постоянных времени стружкообразования для стали 45 при негладком процессе резания приведены в таблице. Таблица составлена по данным работы [14].

Таким образом, решение проблемы оценки устойчивости станка при негладком стружкообразовании оказалось возможным на основе использования вышеописанной математической модели относительного перемещения резца и заготовки. При этом потребовалась предварительная отработка линейной задачи.

В работе получены следующие новые результаты:

1. На основе теоретических исследований предложен частотный критерий устойчивости нелинейной замкнутой системы, включающий вязкоупругое звено с распределенными параметрами при распределенном воздействии.

2. Разработана методика определения границ устойчивого резания на токарных станках при сливном стружкообразовании, с помощью которой проверена математическая модель упругой системы станка, выявлено влияние геометрии инструмента и запаздывающего воздействия следов обработки от предыдущего прохода резца.

3. Предложена математическая модель нелинейного процесса резания с негладким стружкообразованием и

использованием стандартных характеристик механических свойств материалов заготовки и инструмента, позволяющая устранить неясности и противоречия, имеющиеся в известных публикациях.

4. Разработана методика определения границ устойчивого резания на токарных станках при нелинейном процессе стружкообразования, который имеет место при наличии стружколомов, при предварительных режимах обработки, резании с образованием стружки надлома и т.п., то есть когда динамическая характеристика резания за счет существенной нелинейности оказывается не вполне определенной. Предложенная математическая модель негладкого стружкообразования позволила устранить неясности и противоречия, имеющиеся в существующих работах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудинов В.А. Динамика станков. – М. : Машиностроение, 1967. – 359 с.
2. Грановский Г.И. Резание металлов. – М. : Высшая школа, 1985. – 304 с.
3. Зорев Н.Н. Вопросы механики процесса резания металлов. – М. : Машгиз, 1956. – 367 с.
4. Каминская В.В., Кушнир Э.Ф. Динамическая характеристика процесса резания при сливном стружкообразовании // Станки и инструмент. – 1979. – № 5. – С. 27–30.
5. Клушин М.И. Резание металлов. – М. : Машгиз, 1958. – 454 с.
6. Степанов А.А. Обработка резанием высокопрочных композиционных полимерных материалов. – М. : Машиностроение, 1987. – 176 с.
7. Эльясберг М.Е. Автоколебания металлорежущих станков. – СПб. : Издание ОКБС, 1993. – 180 с.
8. Климовский В.В., Гришандин В.Ф. Исследование виброустойчивости тяжелых вертикально-фрезерных станков // Станки и инструмент. – 1977. – № 5. – С. 12–13.
9. Санкин Ю.Н. Динамика несущих систем металлорежущих станков – М. : Машиностроение, 1986. – 96 с.
10. Санкин Ю.Н. Частотный метод оценки устойчивости металлорежущих станков при нелинейной характеристике процесса резания // Тр. Средневолжского математического общества. – Саранск : СВМО, 2004. Т.6, № 1. – С. 306–321.
11. Санкин Ю.Н., Санкин Н.Ю. Повышение устойчивости черновой обработки на токарных станках // Вестник машиностроения. – 1998. – № 10. – С. 43–47.
12. Кудинов В.А. Динамические расчеты станков (основные положения) // СТИН. – 1995. – № 8. – С. 3–13.
13. Санкин Ю.Н., Санкин Н.Ю. Устойчивость токарных станков при нелинейной характеристике процесса резания – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 138 с.
14. Эльясберг М.Е. К теории и расчету устойчивости процесса резания металла на станках // Станки и инструмент. – 1971. – № 11. – С. 6–11; № 12. – С. 1–6; 1972. – № 1. – С. 3–7.