

УДК 004.942; 539.3

С.Ю. Волынщиков, В.К. Манжосов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДВИЖЕНИИ УПРУГО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ И ЖЕСТКОГО ТЕЛА

Волынщиков Сергей Юрьевич, аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета, окончил строительный факультет УлГТУ. Имеет статьи в области динамики ударных механизмов. [e-mail: tpm@ulstu.ru].

Манжосов Владимир Кузьмич, доктор технических наук, профессор, окончил машиностроительный факультет Фрунзенского политехнического института, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» УлГТУ. Имеет статьи и монографии в области динамики машин, моделирования процессов удара. [e-mail: tpm@ulstu.ru; v.manjosov@ulstu.ru].

Аннотация

Представлена волновая модель процесса движения упруго сжатого стержня и жесткого тела, взаимодействующего со стержнем, с учетом неустойчивой связи между ними. Построены характеристики формируемых на границах прямых и обратных волн, образующих поле волновых состояний. Разработана процедура численного расчета, положенная в основу вычислительного алгоритма. Предложена схема контроля вычислительного процесса.

Ключевые слова: упругий стержень, волновые процессы, взаимодействие стержня и жесткого тела, продольная волна деформации, скорость поперечных сечений стержня, потенциальная энергия стержня, кинетическая энергия стержня, контроль вычислительного процесса.

Sergey Yurievich Volynshchikov, Post-graduate student of the 'Theoretical and Applied Mechanics' Chair at Ulyanovsk State Technical University, graduated from the Faculty of Building of Ulyanovsk State Technical University; author of articles in the field of dynamics of shock mechanisms. e-mail: tpm@ulstu.ru.

Vladimir Kuzmich Manzhosov, Doctor of Engineering, Professor, graduated from the Faculty of Machine-Building of Frunze Polytechnic Institute, holds the 'Theoretical and Applied Mechanics' Chair at Ulyanovsk State Technical University; author of articles and monographs in the field of dynamics of machines, modeling of shock processes. e-mail: tpm@ulstu.ru; v.manjosov@ulstu.ru.

Abstract

The article presents the model of wave motion of elastic compression rod and rigid body interacting with the rod, with regard to the unilateral constraint between them. Characteristics of direct and backward waves constituted on the boundary are built. They generate the field of wave states. A method of numerical calculation taken as a basis for a computational algorithm is developed. A scheme of checking of the computational process is recommended.

Key words: elastic rod, wave processes, interaction of a rod and a rigid body, dilatation wave of deformation, speed of rod cross-sections, rod potential energy, rod kinetic energy, checking of the computational process.

Постановка задачи

Динамика процесса взаимодействия стержня как механической системы с распределенными параметрами и жесткого тела рассматривается во многих работах, связанных с задачами продольного удара [1–5], движения жесткого тела за счет потенциальной энергии сжатого стержня [6], свободными и вынужденными колебаниями стержней [7]. Движение поперечных сечений стержня вдоль продольной оси описывается, как правило, волновыми уравнениями. Движение сосредоточенной массы (жесткого тела) описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка, представляющим одно из граничных условий рассматриваемой механической системы.

При постановке исследования движения жесткого тела за счет потенциальной энергии упруго сжатого стержня ставится задача, связанная с анализом эффективности преобразования потенциальной энергии в кинетическую энергию движения жесткого тела. Точные решения такой задачи для произвольно заданного интервала времени отсутствуют.

Одно из возможных направлений в решении таких задач может быть связано с моделированием волновых процессов при взаимодействии упруго сжатого стержня с жестким телом, анализом напряженно-деформированного состояния стержня при этом движении и оценкой эффективности преобразования потенциальной энергии.

Цель данной работы заключается в построении волновой модели взаимодействия упруго сжатого стержня с жестким телом при неудерживающей связи между ними и вычислительной схемы расчета волновых процессов с обеспечением контроля вычислительного процесса на основе использования закона сохранения энергии.

ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ С ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ ПРИ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗИ

Однородный стержень 1 длиной l одним концом неподвижно закреплен, а другим взаимодействует с абсолютно твердым телом 2 массой m_2 . Расчетная схема взаимодействия упруго сжатого стержня с жестким телом представлена на рисунке 1.

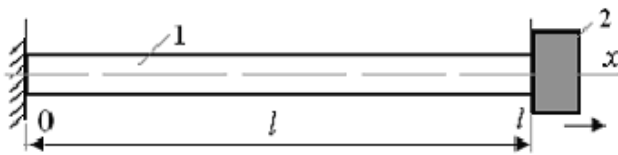


Рис. 1. Расчетная схема взаимодействия упруго сжатого стержня с жестким телом

В начальный момент времени стержень упруго сжат, его сечения неподвижны. Смещения сечений при $t = 0$ определяются как

$$u(x, 0) = -\frac{P_0}{EA} \cdot x, \tag{1}$$

где P_0 – усилие сжатия стержня,

E – модуль упругости материала стержня,

A – площадь поперечного сечения стержня.

Если исчезнет усилие P_0 , удерживающее стержень в сжатом состоянии, то стержень начнет перемещать тело 2. Движение поперечных сечений стержня опишем волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

при соответствующих начальных и граничных условиях:

$$u(x, 0) = -\frac{P_0}{EA} \cdot x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = 0, \quad m_2 \cdot \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} = -EA \cdot \frac{\partial u(l, t)}{\partial x},$$

если $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} < 0$;

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \geq 0, \tag{4}$$

где $u(x, t)$ – перемещение поперечного сечения стержня, положение которого определяется координатой x ;

a – скорость распространения звука в материале стержня.

Условие $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$, если $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \geq 0$, означает, что связь между стержнем 1 и жестким телом 2 неудерживающая и имеет место, если $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} < 0$.

Решение уравнения (2) по методу бегущих волн представляется в виде суммы двух неизвестных функций [1]:

$$u(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x), \tag{5}$$

где $f(at - x)$ – функция, описывающая параметры волны, распространяющейся по направлению оси x (назовем ее прямой волной);

$\varphi(at + x)$ – функция, описывающая параметры волны, распространяющейся в обратном направлении (назовем ее обратной волной).

Определяя значения прямых и обратных волн на участках стержня с соответствующими аргументами, можно производить расчет напряженно-деформированного состояния поперечных сечений, скорости поперечных сечений.

Скорость поперечных сечений $v(x, t)$ и продольная деформация $\varepsilon(x, t)$ определяется из зависимостей:

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = af'(at - x) + a\varphi'(at + x),$$

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -f'(at - x) + \varphi'(at + x). \tag{6}$$

Из уравнений (6) и начальных условий (3) определим функции прямой и обратной волн в начальный момент времени $t_0 = 0$ (обозначим эти функции как $f_0(at_0 - x)$ и $\varphi_0(at_0 + x)$):

$$f_0(at_0 - x) + \varphi_0(at_0 + x) = -\frac{P_0}{EA} \cdot x,$$

$$a \cdot f'_0(at_0 - x) + a \cdot \varphi'_0(at_0 + x) = 0. \tag{7}$$

Дифференцируя по x первое равенство (7), получим

$$-f'_0(at_0 - x) + \varphi'_0(at_0 + x) = -\frac{P_0}{EA}. \tag{8}$$

Из второго равенства (7) следует, что $f'_0(at_0 - x) = -\varphi'_0(at_0 + x)$. Подставив в (8), получим

$$\varphi'_0(at_0 + x) = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{EA}, \quad f'_0(at_0 - x) = \frac{1}{2} \frac{P_0}{EA}. \tag{9}$$

Дальнейшие значения прямых и обратных волн определяются из условий преобразования этих волн на границах стержневой системы.

Важно отметить следующее свойство функций $f(at - x)$ и $\varphi(at + x)$. Предположим, что t и x получили приращение Δt и Δx . Тогда, если $\Delta x = a\Delta t$, то будут иметь место равенства:

$$f[a(t + \Delta t) - (x + \Delta x)] = f(at - x), \quad \Delta t = \Delta x/a,$$

$$\varphi[a(t + \Delta t) + (x - \Delta x)] = \varphi(at + x), \quad \Delta x = a\Delta t,$$

т. е. параметры волны деформаций $f(at-x)$ и $\varphi(at+x)$, распространяющихся по однородному участку стержня со скоростью a , не изменяются.

Это свойство удобно использовать при расчете волновых состояний, так как, определив значение функции $f(at-x)$ в сечении x для времени t , можно использовать это значение для сечения $(x + \Delta x)$ в момент времени $(t + \Delta t)$. Определив значение функции $\varphi(at+x)$ в сечении x для времени t , можно использовать его для сечения $(x - \Delta x)$ в момент времени $(t + \Delta t)$.

Волновые состояния механической системы

Рассмотрим построение поля волновых состояний при взаимодействии однородного стержня с жестким телом (рис. 2).

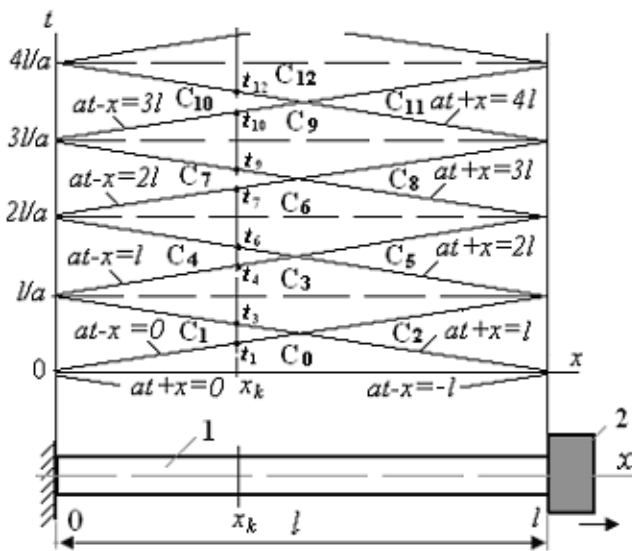


Рис. 2. Схема взаимодействия стержня с жестким телом и поле волновых состояний

Прямые волны в однородном стержне формируются в сечении $x = 0$ и распространяются по стержню по характеристикам $at-x = -l, at-x = 0, at-x = l, at-x = 2l, at-x = 3l$ и так далее (рис. 2). Характеристики представляют собой аргументы функций прямых волн и в системе координат $t-x$ графически (рис. 2) могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом $k_f = m_t/m_x$, где m_t – масштаб изображения времени на координатной оси t ; m_x – масштаб изображения длины на координатной оси x .

Обратные волны в однородном стержне формируются в сечении $x = l$ и распространяются по стержню по характеристикам $at+x = 0, at+x = l, at+x = 2l, at+x = 3l, at+x = 4l$ и так далее. Характеристики представляют собой аргументы функций обратных волн и в системе координат $t-x$ могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом $k_\varphi = -m_t/m_x$ (рис. 2).

Характеристики прямых и обратных волн разбивают координатную плоскость $t-x$ на области волновых состояний $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{11}, C_{12}, \dots$. Область C_0 охвачена начальными прямой и обратной волнами с характеристиками $at-x = -l$ и $at+x = 0$. Область C_1 охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками $at-x = 0$ и $at+x = 0$. Область C_2 охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками $at-x = -l$ и $at+x = l$. Область C_3 охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками $at-x = 0$ и $at+x = l$. Область C_4 охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками $at-x = l$ и $at+x = l$, и так далее.

Если в стержне выделить некоторое произвольное сечение $0 < x_k < l/2$ (рис. 2), то на поле волновых состояний можно определить временные интервалы, для которых данное сечение испытывает действие прямых и обратных волн с теми или иными характеристиками.

Так t_1 – время, когда для сечения x_k заканчивается волновое состояние C_0 и начинается волновое состояние C_1 . Из характеристики $at-x = 0$ (рис. 2) при $x = x_k$ следует, что $t_1 = x_k/a$. Длительность волнового состояния C_0 для сечения x_k равно $\Delta t_0 = t_1 - t_0 = x_k/a$.

Аналогично, t_3 – время, когда для сечения x_k заканчивается волновое состояние C_1 и начинается волновое состояние C_3 . Из характеристики $at+x = l$ (рис. 2) при $x = x_k$ следует, что $t_3 = (l-x_k)/a$. Длительность волнового состояния C_1 для сечения x_k определится как $\Delta t_1 = t_3 - t_1 = (l-2x_k)/a$.

Время, когда для сечения x_k заканчивается волновое состояние C_3 и начинается волновое состояние C_4 , равно t_4 . Из характеристики $at-x = l$ (рис. 2) при $x = x_k$ следует, что $t_4 = (l+x_k)/a$. Длительность волнового состояния C_3 для сечения x_k определится как $\Delta t_3 = t_4 - t_3 = 2x_k/a$.

Аналогично могут быть определены длительность волновых состояний C_4, C_6, C_7 и т. д.

ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ И ЖЕСТКОГО ТЕЛА

Из граничного условия (4) и анализа поля характеристик следует, что на i -м интервале движения (за интервал принимаем время l/a) для сечения $x = 0$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = 0,$$

$$f' [a(t-(i-1)l/a) - 0] + \varphi' [a(t-(i-1)l/a) + 0] = 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$f' [a(t-(i-1)l/a) - 0] = -\varphi' [a(t-(i-1)l/a) + 0],$$

$$i = 1, 2, 3, \dots \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что на любом интервале движения формируемая в сечении $x=0$ прямая волна равна падающей обратной волне, взятой с обратным знаком.

Из анализа поля характеристик (рис. 2) следует, что на i -м интервале движения для сечения $x=l$

$$u(l, t) = f[(at - (i-1)l) - l] + \varphi[(at - (i-1)l) + l], \quad (i-1)l/a \leq t \leq i \cdot l/a. \quad (11)$$

Из граничного условия (4)

$$m_2 \cdot \frac{\partial v(l, t)}{\partial t} = -EA \cdot \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}$$

с учетом (11) следует, что

$$\frac{\partial v(l, t)}{\partial t} = \frac{EA}{m_2} \left[f'[(at - (i-1)l) - l] - \varphi'[(at - (i-1)l) + l] \right],$$

откуда на интервалах $(i-1)l/a \leq t \leq i \cdot l/a, i = 1, 2, 3, \dots$

$$v(l, t) = v(l, t_{0i}) + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{m_2} \left[f'[(at - (i-1)l) - l] - \varphi'[(at - (i-1)l) + l] \right] dt, \quad (12)$$

где $v(l, t_{0i})$ – скорость сечения $x=l$ в начале i -го интервала движения;

$t_{0i} = (i-1)l/a$ – начальное время i -го интервала движения.

Учитывая, что

$$v(l, t) = a \left[f'[(at - (i-1)l) - l] + \varphi'[(at - (i-1)l) + l] \right],$$

и обозначая

$$\varphi'_i(at_i + l) = \varphi'[(at - (i-1)l) + l],$$

$$f'_i(at_i - l) = f'[(at - (i-1)l) - l],$$

$t_i = t - (i-1)l/a$,
находим из (12)

$$\varphi'_i(at_i + l) = v(l, t_{0i}) + \int_0^{t_i} \frac{EA}{m_2 a} \left[f'_i(at_i - l) - \varphi'_i(at_i + l) \right] dt_i - f'_i(at_i - l). \quad (13)$$

Аналитическое решение рассматриваемой задачи даже для однородного стержня становится громоздким уже на первых интервалах движения [5]. В этой связи представляется важным разработка вычислительной схемы расчета волнового процесса на основе численных методов. Известные аналитические решения [5] для однородного стержня на интервалах $0 \leq t \leq \frac{2l}{a}, \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$ могут быть использованы для тестовых оценок.

Рассмотрим процедуру численного расчета процесса взаимодействия упруго сжатого стержня и жесткого тела. Расчетная схема приведена на рисунке 3. Стержень разбит на n -е количество последовательно сопряженных участков, границами которых являются сечения $0, 1, 2, \dots, n-1, n$. Длина участков $\Delta l = l/n$.

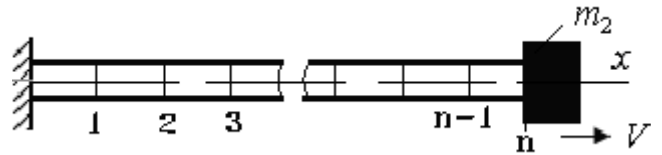


Рис. 3. Расчетная схема стержня с n -м количеством последовательно сопряженных участков

Рассмотрим особенности преобразования волн на границах участков. Выделим наиболее характерные границы – граничное сечение $x=0$ для 1-го участка, произвольное граничное сечение j -го участка и граничное сечение $x=l$ n -го участка.

В сечении $x=0$ первого участка (рис. 4) падающей волной является обратная волна $\varphi_1(at+0)$, а формируемой в этом сечении волной – прямая волна $f_1(at-0)$.

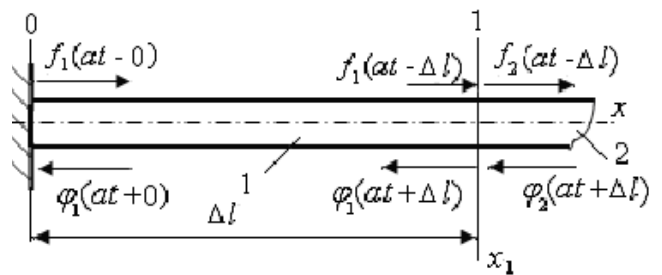


Рис. 4. Схема формирования прямой волны на границе $x=0$

Считаем, что параметры падающей волны известны. В начальный момент времени параметры падающей волны для любого сечения могут быть определены из начальных условий и соответствующих равенств (9). А последующие значения обратной волны $\varphi_1(at+0)$ через шаг вычисления Δt могут быть определены из условия, что

$$\varphi_1(at+0) = \varphi_1[a(t - \Delta t) + \Delta l], \Delta l = a \cdot \Delta t,$$

то есть для определения $\varphi_1(at+0)$ используется значение $\varphi_1[a(t - \Delta t) + \Delta l]$, вычисленное в сечении $x_1 = \Delta l$ на предыдущем шаге.

Из равенства (10) следует, что на любом интервале движения формируемая в сечении $x=0$ первого участка прямая волна равна

$$f_1(at-0) = -\varphi_1(at+0).$$

Рассмотрим, как преобразуются прямые и обратные волны в произвольном j -м сечении (рис. 5), где сопряжены j -й и $(j+1)$ -й участки стержня (предполагаем, что в общем случае это могут быть разнородные участки).

Падающими на сечение j волнами являются прямая волна $f'_j(a_j t - x_j)$ со стороны j -го участка и обратная волна $\varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j)$ со стороны $(j+1)$ -го участка.

Формируются в сечении j прямая волна $f'_{j+1}(a_{j+1} t - x_j)$ $(j+1)$ -го участка и обратная волна $\varphi'_j(a_j t + x_j)$ j -го участка. Условия сопряжения j -го и $(j+1)$ -го участков описываются условием равенства скоростей сопряженных сечений

$$v_j(x_j, t) = v_{j+1}(x_j, t) \quad (14)$$

и условием равновесия продольных сил

$$-E_j A_j \frac{\partial u_j(x_j, t)}{\partial x} + E_{j+1} A_{j+1} \frac{\partial u_{j+1}(x_j, t)}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

где $v_j(x_j, t)$, $v_{j+1}(x_j, t)$ – скорость сечения j для j -го и $(j+1)$ -го участков;

$$\frac{\partial u_j(x_j, t)}{\partial x}, \frac{\partial u_{j+1}(x_j, t)}{\partial x} \text{ – продольная деформация}$$

в сечении j для j -го и $(j+1)$ -го участков; E_j , E_{j+1} – модуль упругости материала j -го и $(j+1)$ -го участков;

A_j , A_{j+1} – площадь поперечных сечений j -го и $(j+1)$ -го участков.

Из (14) и (15) следует

$$\begin{aligned} & a_j [f'_j(a_j t - x_j) + \varphi'_j(a_j t + x_j)] = \\ & = a_{j+1} [f'_{j+1}(a_{j+1} t - x_j) + \varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j)], \\ & -E_j A_j [-f'_j(a_j t - x_j) + \varphi'_j(a_j t + x_j)] + \\ & + E_{j+1} A_{j+1} [-f'_{j+1}(a_{j+1} t - x_j) + \varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j)] = 0, \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned} f'_{j+1}(a_{j+1} t - x_j) &= Q(j, j+1) f'_j(a_j t - x_j) + \\ & + R(j+1, j) \varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j), \quad (16) \\ \varphi'_j(a_j t + x_j) &= R(j, j+1) f'_j(a_j t - x_j) + \\ & + Q(j+1, j) \varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j), \end{aligned}$$

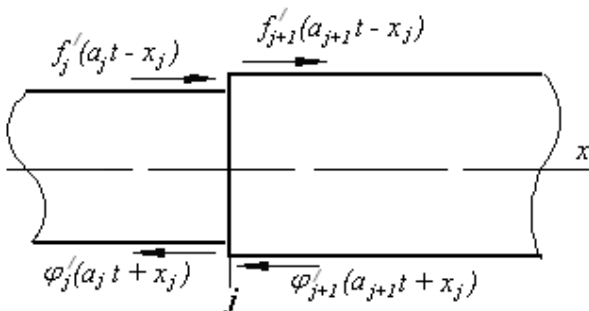


Рис. 5. Схема формирования прямой и обратной волн на границе $x = x_j$

$$\text{где } Q(j, j+1) = \frac{2r_j}{1+r_j} \frac{a_j}{a_{j+1}} \text{ и } Q(j+1, j) = \frac{2}{1+r_j} \frac{a_{j+1}}{a_j}$$

коэффициенты прохождения прямой волны из j -го в $(j+1)$ -й участок и обратной волны из $(j+1)$ -го участка в j -й участок;

$$r_j = \frac{E_j A_j}{E_{j+1} A_{j+1}} \frac{a_{j+1}}{a_j} \text{ – отношение волновых сопротивлений сопряженных участков;}$$

$R(j, j+1) = \frac{1-r_j}{1+r_j}$ – коэффициент отражения об-

$$R(j+1, j) = \frac{r_j-1}{r_j+1} \text{ – коэффициент отражения}$$

радной волны $(j+1)$ -го участка от j -го сечения;

$$R(j+1, j) = \frac{r_j-1}{r_j+1} \text{ – коэффициент отражения}$$

прямой волны j -го участка от j -го сечения.

Если стержень однородный и имеет равную по длине площадь поперечных сечений, то скорости распространения волн на участках и волновые сопротивления сопряженных участков равны, а их отношение $r_j = 1$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n-1$). В этом случае коэффициенты отражения $R(j, j+1)$ и $R(j+1, j)$ равны нулю, а коэффициенты прохождения волн $Q(j, j+1)$ и $Q(j+1, j)$ равны единице.

В сечении $x = l$ n -го участка (рис. 6) падающей волной является прямая волна $f'_n(at-l)$, а формируемой в этом сечении волной – обратная волна $\varphi'_n(at+l)$.

В начальный момент времени параметры падающей волны могут быть определены из начальных условий и соответствующих равенств (9). А последующие значения прямой волны $f'_n(at-l)$ через шаг вычисления Δt могут быть определены из условия, что

$$f'_n(at-l) = f'_{n-1}[a(t-\Delta t) - (l-\Delta l)],$$

$$\Delta l = a \cdot \Delta t,$$

то есть для определения $f'_n(at-l)$ используется значение $f'_{n-1}[a(t-\Delta t) - (l-\Delta l)]$, вычисленное в сечении $x_{n-1} = l - \Delta l$ на предыдущем шаге.

На формирование обратной волны $\varphi'_n(at+l)$ оказывает влияние падающая на границу прямая волна $f'_n(at-l)$. Причем в соответствии с уравнением (13) на любом интервале движения, пока есть взаимодействие стержня и жесткого тела,

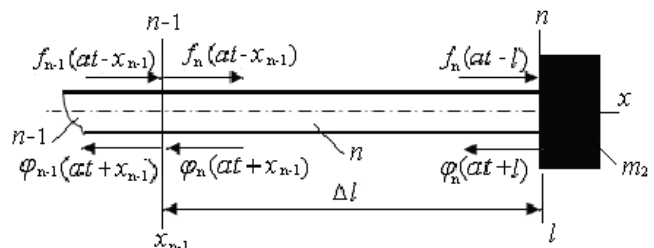


Рис. 6. Схема формирования обратной волны на границе $x = l$

$$\varphi'_n(at+l) = v(l, t_{0i}) + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{m_2 a} [f'_n(at-l) - \varphi'_n(at+l)] dt - f'_n(at-l). \quad (17)$$

Процедура численного решения может быть основана на методе последовательных приближений. Первое приближение можно представить как

$$\varphi'_{n,1}(at+l) = v(l, t_{0i}) + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{m_2 a} [f'_n(at-l) - \varphi'_{n,0}(at+l)] dt - f'_n(at-l), \quad (18)$$

где в подынтегральное выражение вместо $\varphi'_n(at+l)$ подставлено начальное значение $\varphi'_{n,0}(at+l)$. Далее, подставляя в подынтегральное выражение (18) вместо $\varphi'_{n,0}(at+l)$ найденное первое приближение $\varphi'_{n,1}(at+l)$, будем иметь второе приближение

$$\varphi'_{n,2}(at+l) = v(l, t_{0i}) + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{m_2 a} [f'_n(at-l) - \varphi'_{n,1}(at+l)] dt - f'_n(at-l).$$

Дальнейшие приближения строятся по формуле:

$$\varphi'_{n,p}(at+l) = v(l, t_{0i}) + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{m_2 a} [f'_n(at-l) - \varphi'_{n,p-1}(at+l)] dt - f'_n(at-l), \quad (19)$$

где p – число приближений.

Число приближений должно быть ограничено числом s , когда последующее приближение отличается от предыдущего на малую величину $\Delta\varphi^*$. Причем

$$\left(\frac{\varphi'_{n,p}(at+l) - \varphi'_{n,p-1}(at+l)}{\varphi'_{n,p}(at+l)} \right) \leq \Delta\varphi^*. \quad (20)$$

В пределах малого интервала времени $\Delta t = t - t_{0i}$, допуская, что в пределах этого интервала времени подынтегральные функции сохраняют постоянные значения, т. е.

$$f'_n(at-l) = const, \quad \varphi'_{n,p-1}(at+l) = const,$$

от интегрального выражения (19) можем перейти к алгебраическому в виде:

$$\varphi'_{n,p}(at+l) = v(l, t_{0i}) + \frac{EA}{m_2 a} [f'_n(at-l) - \varphi'_{n,p-1}(at+l)] \cdot \Delta t - f'_n(at-l).$$

Если учесть, что

$$\frac{EA}{m_2 a} = \frac{a^2 \rho Al}{m_2 a l} = \frac{a \cdot m_1}{m_2 l},$$

$a\Delta t = \Delta l$, $l / \Delta l = n$ (где n – число участков, ρ – плотность материала стержня), то

$$\varphi'_{n,p}(at+l) = v(l, t_{0i}) + \frac{m_1}{m_2 \cdot n} [f'_n(at-l) - \varphi'_{n,p-1}(at+l)] - f'_n(at-l),$$

$$p = 1, 2, 3, \dots, s, \quad (21)$$

где s – число приближений, когда удовлетворяется неравенство (20).

Если стержень разбит на достаточно малые участки длиной Δl , то в качестве малого интервала времени Δt может быть взято время, в течение которого волна деформации распространяется от одного граничного сечения участка до другого. Это тем более удобно, что волны, сформированные на границах однородных участков, достигают противоположных границ без искажения, т. е. описываются теми же функциями, но с запаздыванием на величину $\Delta t = \Delta l / a$.

Так как связь между стержнем и жестким телом неупругая, то в процессе вычислений необходимо контролировать условие неупругости связи:

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -f'_n(at-l) + \varphi'_n(at+l) = 0,$$

если $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \geq 0$. (22)

В случае разрыва связи формируемая в сечении $x = l$ обратная волна $\varphi'_n(at+l)$ определяется из равенства (22) как

$$\varphi'_n(at+l) = f'_n(at-l). \quad (23)$$

Вычислительный процесс можно контролировать, используя закон сохранения энергии в консервативной механической системе. В начальный момент времени при $t = 0$ в упруго сжатом стержне накоплена потенциальная энергия упругой деформации

$$U_0 = EA \varepsilon_0^2 l / 2 = a^2 \rho Al \varepsilon_0^2 / 2 = a^2 m_1 \varepsilon_0^2 / 2, \quad (24)$$

где $\varepsilon_0 = P_0 / EA$ – модуль продольной деформации в поперечных сечениях стержня при $t = 0$.

При движении механической системы в процессе взаимодействия сжатого стержня и жесткого тела энергия механической системы E_{sm} складывается из кинетической энергии жесткого тела T_m , кинетической энергии движения элементарных участков стержня T_s и потенциальной энергии продольной деформации элементарных участков стержня U_s :

$$E_{sm} = T_m + T_s + U_s,$$

$$T_m = \frac{1}{2} m_2 v^2(l, t) =$$

$$= \frac{1}{2} m_2 a^2 [f'_n(at-l) + \varphi'_n(at+l)]^2,$$

$$T_s = \frac{1}{2} \sum_j^n \Delta m_j v_j^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \Delta l a^2 \sum_j^n [f'_j(at-x_j) + \varphi'_j(at+x_j)]^2,$$

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_j^n EA \varepsilon_j^2 \Delta l = \frac{1}{2} a^2 \rho A \Delta l \sum_j^n \left[-f'_j(at - x_j) + \varphi'_j(at + x_j) \right]^2$$

Если вычислительный процесс не содержит ошибки, то для рассматриваемой механической системы из закона сохранения энергии следует

$$\begin{aligned} |(U_0 - E_{sm}) / U_0| &\leq \delta_{sm} \approx 0, \\ |[U_0 - (T_m + T_s + U_s)] / U_0| &\leq \delta_{sm} \approx 0, \\ |1 - (T_m / U_0 + T_s / U_0 + U_s / U_0)| &\leq \delta_{sm} \approx 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где δ_{sm} – относительная малая величина (в вычислительном процессе эту величину можно ограничить значением $\delta_{sm} = 0,01$).

Доля кинетической энергии жесткого тела $\tilde{T}_m = T_m / U_0$ определится как

$$\begin{aligned} \tilde{T}_m = T_m / U_0 &= \frac{\frac{1}{2} m_2 a^2 [f'_n(at - l) + \varphi'_n(at + l)]^2}{a^2 m_1 \varepsilon_0^2 / 2} = \\ &= \frac{m_2}{m_1} \left[\tilde{f}'_n(at - l) + \tilde{\varphi}'_n(at + l) \right]^2, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\tilde{f}'_n(at - l) = f'_n(at - l) / \varepsilon_0,$$

$$\tilde{\varphi}'_n(at + l) = \varphi'_n(at + l) / \varepsilon_0.$$

Доля кинетической энергии движения элементарных участков стержня $\tilde{T}_s = T_s / U_0$ равна

$$\begin{aligned} \tilde{T}_s = T_s / U_0 &= \frac{\frac{1}{2} \rho A \Delta l a^2 \sum_j^n \left[f'_j(at - x_j) + \varphi'_j(at + x_j) \right]^2}{a^2 m_1 \varepsilon_0^2 / 2} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_j^n \left[\tilde{f}'_j(at - x_j) + \tilde{\varphi}'_j(at + x_j) \right]^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Доля потенциальной энергии продольной деформации элементарных участков стержня $\tilde{U}_s = U_s / U_0$ равна

$$\begin{aligned} \tilde{U}_s = U_s / U_0 &= \frac{\frac{1}{2} a^2 \rho A \Delta l \sum_j^n \left[-f'_j(at - x_j) + \varphi'_j(at + x_j) \right]^2}{a^2 m_1 \varepsilon_0^2 / 2} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_j^n \left[-\tilde{f}'_j(at - x_j) + \tilde{\varphi}'_j(at + x_j) \right]^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Для контроля вычислительного процесса используем неравенство (25), из которого

$$\begin{aligned} |1 - (T_m / U_0 + T_s / U_0 + U_s / U_0)| &\leq \delta_{sm}, \\ \delta_{sm} &= 0,01. \end{aligned} \quad (29)$$

Равенства (10)–(29) положены в основу вычислительного алгоритма для анализа волновых процессов взаимодействия упруго сжатого стержня с жестким телом. Его

реализация показала практическую приемлемость предложенной вычислительной схемы. При представлении стержня в виде множества последовательно сопряженных участков ($n = 100$) неравенство (29), контролирующее вычислительный процесс, обеспечивается при $\delta_{sm} \approx 0,002$.

Выводы

Построена волновая модель процесса движения упруго сжатого стержня и жесткого тела, взаимодействующего со стержнем, с учетом неударивающей связи между ними.

Характеристики формируемых на границах прямых и обратных волн образуют поле волновых состояний рассматриваемой механической системы. Поле волновых состояний позволяет оценивать характер и длительность волнового состояния, которое испытывает произвольное сечение стержня на любом интервале движения.

Вычислительная схема решения задачи взаимодействия упруго сжатого стержня и жесткого тела обеспечивает расчет процесса их движения вплоть до разрыва связи между ними.

Вычислительная схема базируется на представлении стержня в виде множества последовательно сопряженных участков, на схеме формирования прямой волны в сечении жесткой заделки, на схеме формирования прямой и обратной волн на границе сопряженных участков, на схеме формирования обратной волны на границе «торец стержня – жесткое тело», на свойстве функций прямых и обратных волн сохранять свои параметры при распространении по однородному участку со скоростью звука.

Приведены расчетные зависимости, определяющие кинетическую энергию жесткого тела T_m , кинетическую энергию движения элементарных участков стержня T_s , потенциальную энергию продольной деформации элементарных участков стержня U_s , полную энергию рассматриваемой механической системы E_{sm} . Их расчет обеспечивает возможность контроля вычислительного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. – М.: Наука, 1985. – 354 с.
2. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев: Наукова думка, 1976. – 320 с.
3. Еремьянц В.Э. Ударное нагружение оснащенных стержней. – Фрунзе: Илим, 1987. – 165 с.
4. Hu B., Schiehlen W. and Eberhard P. Comparison of Analytical and Experimental Results for Longitudinal Impacts on Elastic Rods // Journal of Vibration and Control, 2003, 9, pp. 157–174.
5. Манжосов В.К. Продольный удар. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 358 с.
6. Манжосов В.К. Динамика и синтез кулачковых ударных механизмов. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 218 с.
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.