

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Обоснована возможность повышения эффективности температурной стратификации за счет использования дисперсного рабочего тела и оребрения теплопередающей поверхности в тракте дозвукового течения.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // Доклады академии наук. Энергетика. – 1997. – Т. 354, № 4. – С. 475–477.
2. Пат. № 2106581 Российская Федерация: МПК F25B9/02 Способ температурной стратификации газа и устройство для его осуществления (труба Леонтьева) / Леонтьев А.И.; заявитель и патентообладатель Акционерное общество закрытого типа «Грааль»; Научно-производственное предприятие «Саров» – № 96110458/06; опубл. 10.03.1998.
3. Пат. № 2334178 Российская Федерация: МПК F25B9/02 (2006.01) Сверхзвуковая труба температурной стратификации / Ковальногов Н.Н., Магазинник Л.М., Федоров Р.В.; заявитель и патентообладатель Ульян. гос. тех. ун-т. – №2007108799/06; опубл. 20.09.2008, Бюл. № 26.
4. Температурная стратификация в сверхзвуковом дисперсном потоке / Н.Н. Ковальногов [и др.] // Тр. XVII Школы-семинара молодых специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. – М. : МЭИ, 2009. – Т.2. – С. 213–216.
5. Ковальногов Н.Н., Фокеева Е.В. Оптимизация параметров газодинамической температурной стратификации в дисперсном потоке // Известия вузов. Проблемы энергетики. – 2010. – № 11–12. – С. 3–11.
6. Ковальногов Н.Н., Ковальногов В.Н. Особенности численного интегрирования и условия устойчивости решения системы дифференциальных уравнений пограничного слоя, подверженного интенсивным воздействиям // Известия вузов. Авиационная техника. – 1996. – № 1. – С. 58–61.
7. Ковальногов В.Н., Королев А.В., Федоров Р.В. Математическое моделирование и численный анализ эффективности пленочного охлаждения поверхности, обтекаемой сверхзвуковым дисперсным потоком // Автоматизация процессов управления. – 2012. – № 4(30) – С. 27–33.

УДК 533.6.011.6

В.Н. Ковальногов, Ю.А. Хахалев

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА С ВОЗДЕЙСТВИЯМИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

**Ковальногов Владислав Николаевич**, доктор технических наук, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Казанского государственного университета, заведующий кафедрой «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета. Имеет статьи, монографии, изобретения в области моделирования, исследования и оптимизации гидрогазодинамических процессов. [e-mail: [kvn@ulstu.ru](mailto:kvn@ulstu.ru)].

**Хахалев Юрий Андреевич**, окончил энергетический факультет УлГТУ, аспирант кафедры «Теплоэнергетика» УлГТУ. Имеет статьи и разработки в области исследования гидрогазодинамических процессов. [e-mail: [ulstu-td-ua@mail.ru](mailto:ulstu-td-ua@mail.ru)].

### Аннотация

На основе теоретико-экспериментального исследования определена фрактальная размерность турбулентных пульсаций давления и предложена математическая модель турбулентности на основе фрактальных характеристик пульсаций.

Ключевые слова: пограничный слой, пульсации давления, турбулентный поток, модель, хаос, фрактальные характеристики.

**Vladislav Nikolaevich Kovalnogov**, Doctor of Engineering, graduated from the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics at Kazan State University, head of the 'Heat and Power Engineering' Chair at Ulyanovsk State Technical University; author of articles, monographs, inventions in the field of modeling, research and optimization of hydrogasodynamic processes. e-mail: [kvn@ulstu.ru](mailto:kvn@ulstu.ru).

**Yury Andreevich Khakhalev**, Graduated from the Faculty of Power at Ulyanovsk State Technical University, post-graduate student of the 'Heat and Power Engineering' Chair at Ulyanovsk State Technical University; author of articles and research studies in the field of hydrogasodynamic processes. e-mail: [ulstu-td-ua@mail.ru](mailto:ulstu-td-ua@mail.ru).

### Abstract

The article defines the fractal dimension of turbulent pressure fluctuations on the basis of theoretical and experimental studies. It offers a mathematical model for turbulence based on the fractal characteristics of pulsations.

Key words: boundary layer, pressure fluctuations, turbulent flow, model, chaos, fractal characteristics.

### ВВЕДЕНИЕ

Воздействие на пограничный слой является весьма эффективным способом управления турбулентностью по сравнению с воздействием на поток в целом, так как энергия пульсаций в пограничном слое мала по отношению к осредненной энергии потока. Поэтому в этом направлении постоянно ведется научный поиск.

В качестве одного из эффективных средств управляющего воздействия на турбулентность Ковальноговым В.Н. было предложено и теоретически обосновано применение перфорированной поверхности с демпфирующими полостями [1]. Однако полученные в этих исследованиях результаты по сопротивлению трения, теплоотдаче и коэффициенту интенсивности турбулентного переноса

учитывали влияние демпфирующих полостей на характеристики турбулентного переноса через интегральные параметры, такие как относительная площадь перфорационных отверстий и демпфирующих полостей. При этом не учитывалось и не исследовано влияние конфигурации их расположения, однако нельзя утверждать, что она не оказывает влияние на процесс турбулентного переноса в пограничном слое.

Решение этой задачи представляется возможным на основе теории хаоса, нелинейной динамики и теории фракталов [2, 3]. Теория нелинейной динамики предлагает следующий механизм возникновения турбулентности. Возникновению турбулентного режима движения обычно предшествует возбуждение колебаний одной или нескольких независимых частот и их гармоник. Ландау предположил, что развитие турбулентности основано на

представлении об иерархии неустойчивостей. При росте числа Рейнольдса нелинейные колебания жидкости теряют устойчивость и появляются новые независимые частоты. При этом наблюдается квазипериодическое движение с одной, двумя и более основными частотами. Таким образом, можно наблюдать последовательность бифуркаций Хопфа, то есть переход к движению по поверхности тора возрастающей размерности. Развитое турбулентное движение несет в себе полный спектр частот, при этом определяющий вклад вносит «энергонесущая» часть спектра.

Несколько иной механизм возникновения турбулентности был предложен Рюэлем и Такенсом. В соответствии с их моделью сначала происходят две последовательные бифуркации Хопфа, однако затем трехчастотное движение разрушается нелинейностью и образуется «странный» аттрактор. Многие экспериментальные данные согласуются с моделью Рюэля-Такенса [2].

Как отмечалось выше, развитая турбулентность имеет много больше основных частот, но квазипериодические функции не могут адекватно описывать турбулентное движение. Многие качественные свойства, ожидаемые от решений уравнений Навье-Стокса для турбулентного потока, лежат на «странных» аттракторах, и они устойчивы при возмущении уравнений. Допустимо считать, что «странный» аттрактор устроен как произведение канторова множества на многообразие, по крайней мере, локально. Канторово множество представляет собой фрактал. Известно также, что отличительной особенностью и важнейшей характеристикой фракталов является дробная размерность.

Учитывая вышесказанное, предлагается следующий метод исследования турбулентного потока при наличии воздействий на турбулентный поток и в их отсутствии. Возможно рассматривать поток как фрактал с определенной размерностью и другими фрактальными характеристиками. Также возможно проанализировать связь фрактальных характеристик с другими характеристиками турбулентных потоков, такими как сопротивление трения, теплоотдача, коэффициент интенсивности турбулентного переноса. Кроме того, фрактальные характеристики потока являются более универсальными, по сравнению с конкретными параметрами возмущающих воздействий, которые вводятся в математические модели турбулентных потоков.

## 1 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Было предпринято экспериментальное исследование частотных характеристик турбулентных пульсаций в пристенной области турбулентного потока в перфорированной трубе с демпфирующими полостями и влияния демпфирующих полостей на спектр пульсаций, а также исследование частотных характеристик турбулентного потока в гладкой трубе. Схема экспериментальной установки приведена на рисунке 1 (демпфирующие полости не показаны на рисунке).

Экспериментальный участок установки представляет собой прямую тонкостенную (толщина стенки 1,1 мм) цилиндрическую трубу внутренним диаметром 32 мм и длиной 1 м. В стенке трубы выполнены перфорационные отверстия диаметром 0,8 мм, с помощью которых движущийся в трубе поток взаимодействует с демпфирующими полостями. Демпфирующие полости образуются с помощью накладок, устанавливаемых на наружной поверхности трубы. Каждая демпфирующая полость взаимодействует с потоком через несколько перфорационных отверстий ( $n$ , от 0 до 5), при этом число «0» перфорационных отверстий соответствует гладкой трубе без полостей и перфорационных отверстий. Общее количество демпфирующих полостей на рабочем участке равно 360. Диаметр полости  $D = 12,8$  мм, ее высота  $L = 10$  мм.

Система «датчик давления – преобразователь» позволяет измерять пульсации давления с частотой дискретизации до 40 кГц. В качестве датчика пульсаций давления использовался микрофон. Через аналого-цифровой преобразователь, в качестве которого применялась звуковая плата компьютера, датчик подключался к компьютеру, что позволяло не только записывать результаты измерения пульсаций давления на стенке канала, но и обрабатывать полученные результаты по определенному алгоритму.

Алгоритм включает в себя обработку временных рядов турбулентных пульсаций.

Эксперименты проводились в изотермичных условиях. Температура потока  $T = 299,5$  К, давление  $P = 101488$  Па, число Рейнольдса  $Re = 53251,4$ . Первоначальная стадия включала эксперименты на гладкой трубе (рис. 2), по-

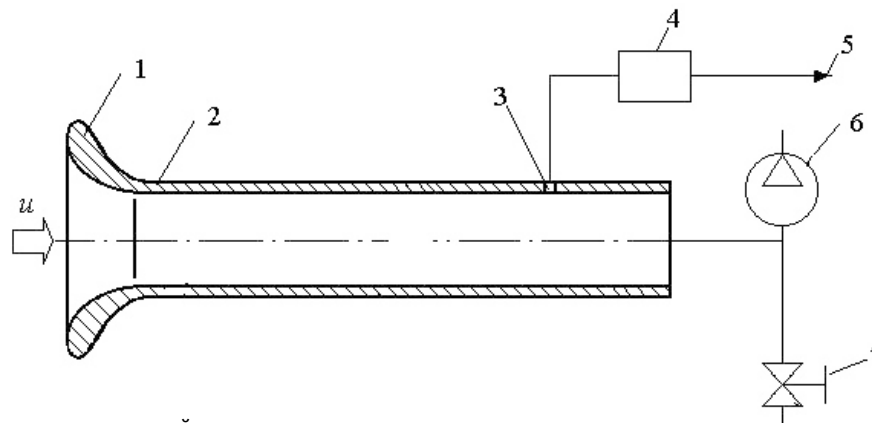


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 – входное устройство; 2 – экспериментальный участок; 3 – датчик давления;

4 – аналого-цифровой преобразователь; 5 – подключение к компьютеру; 6 – вентилятор; 7 – настроечный вентиль

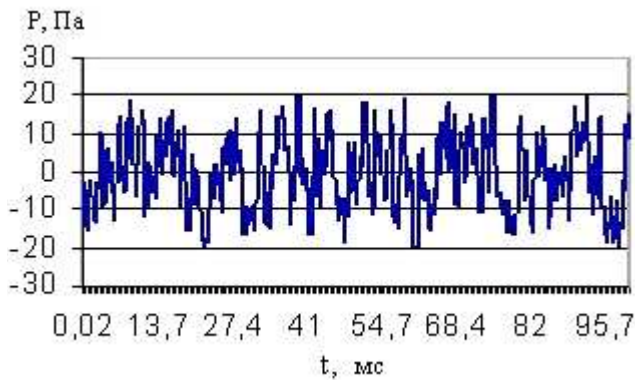


Рис. 2. Временной ряд пульсаций давления на стабилизированном участке гладкой трубы

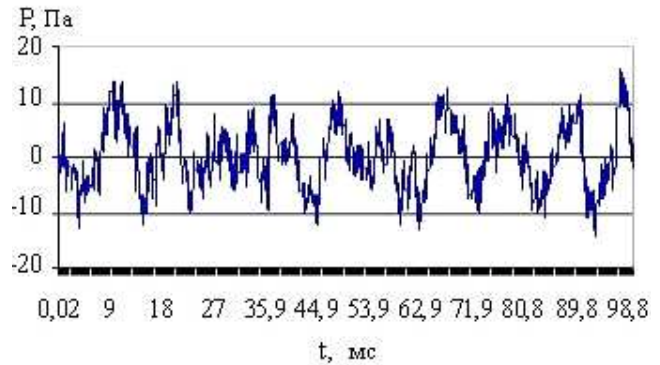


Рис. 5. Временной ряд пульсаций давления на стабилизированном участке перфорированной трубы при количестве перфорационных отверстий, сообщающихся с каждой полостью,  $n = 3$

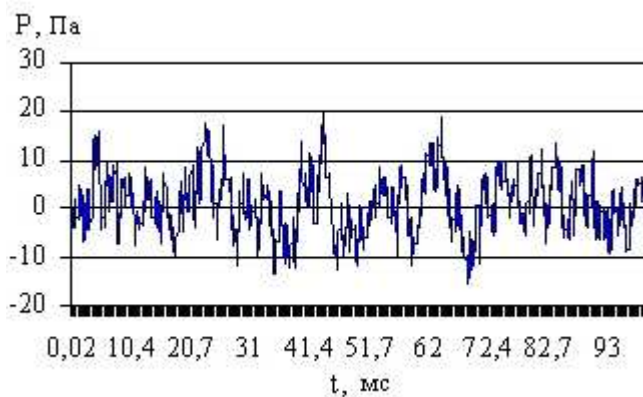


Рис. 3. Временной ряд пульсаций давления на стабилизированном участке перфорированной трубы при количестве перфорационных отверстий, сообщающихся с каждой полостью,  $n = 1$

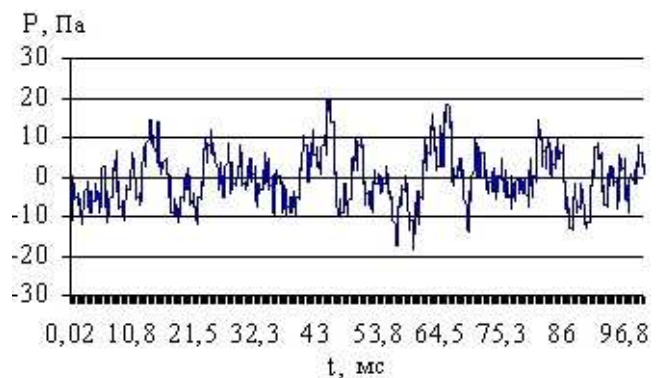


Рис. 6. Временной ряд пульсаций давления на стабилизированном участке перфорированной трубы при количестве перфорационных отверстий, сообщающихся с каждой полостью,  $n = 4$

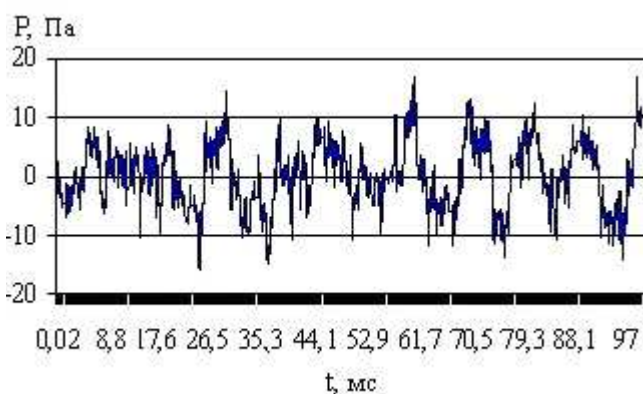


Рис. 4. Временной ряд пульсаций давления на стабилизированном участке перфорированной трубы при количестве перфорационных отверстий, сообщающихся с каждой полостью,  $n = 2$

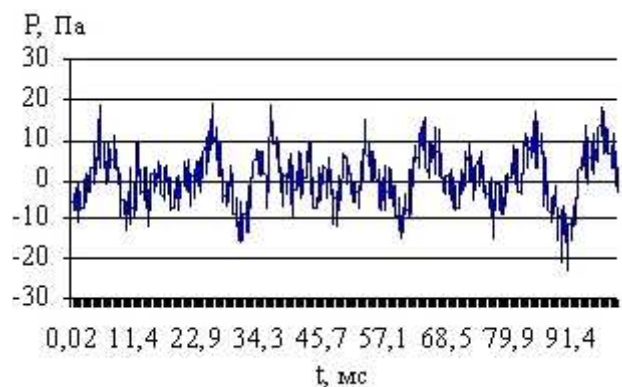


Рис. 7. Временной ряд пульсаций давления на стабилизированном участке перфорированной трубы при количестве перфорационных отверстий, сообщающихся с каждой полостью,  $n = 5$



следующая – эксперименты на перфорированной трубе с демпфирующими полостями (рис. 3–7).

Для определения таких характеристик аттрактора, как размерность, энтропия и др., необходимо иметь множество точек, принадлежащих аттрактору, определенных в фазовом пространстве размерности  $n$ . В соответствии с методом, изложенным в [4], число точек  $M$  в расчетах не обязательно должно быть достаточно большим:

$$M > M_{min} = 10^{2+0,4D}, \quad (1)$$

где  $D$  – размерность аттрактора.

Когда динамическая система задана системой дифференциальных уравнений, то в общем случае решение может быть найдено только численными методами. Обычно используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка, погрешность задается  $10^{-4}$ – $10^{-8}$ , шаг определяется конкретной системой уравнений и выбирается в сравнении с наименьшим из ее характерных времен.

Однако часто требуется определить характеристики аттрактора реальной системы, математическая модель которой отсутствует. При этом неизвестна и размерность фазового пространства реальной системы. Имеется только информация о поведении во времени какой-либо одной из динамических переменных. Интервал времени экспериментальной реализации также ограничен. В таких условиях получить характеристики аттрактора затруднительно. Такенс предложил алгоритм решения данной проблемы [2, 4].

Им было доказано, что почти для всех гладких динамических систем по имеющейся временной реализации одной наблюдаемой динамической переменной можно получить новый аттрактор, основные свойства которого будут такими же, как и у исходного.

Аттрактор можно восстановить по имеющемуся временному ряду следующим образом. Пусть имеется временной ряд экспериментальных данных, представляющий собой отсчеты некоторой физической величины  $X_k$ . Предполагается, что физическая величина  $s$  является одной из переменных динамической системы. Система находится в стационарном режиме, т. е. фазовая траектория проходит внутри аттрактора. Для восстановления аттрактора Такенсом предложен метод временной задержки координат. В  $n$ -мерном фазовом пространстве строится последовательность точек вида:

$$\begin{aligned} X_k &= (s_k, s_{k+r}, \dots, s_{k+(n-1)r}), \quad k = 0, m-1; \\ m &= M - (n-1)\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tau$  – временная задержка;

$n$  – размерность вложения.

Для оценки характеристик реального исследуемого аттрактора можно вычислять характеристики восстановленного аттрактора. С целью уменьшения ошибки, обусловленной конечностью набора экспериментальных точек, необходимо проводить расчеты при нескольких различных значениях  $M$  и  $n$  и добиваться независимости получаемых оценок характеристик от  $M$  и  $n$  в пределах заданной точности.

Для малых шагов по времени значения  $s_k$  и  $s_{k+1}$  будут близкими, поэтому большое значение приобретает

правильный выбор временной задержки. Необходимо стремиться выбрать ее таким образом, чтобы корреляция между  $s_k$  и  $s_{k+\tau}$  была по возможности минимальной [4]. Традиционный способ выбора временной задержки состоит в вычислении автокорреляционной функции временного ряда:

$$B(\tau) = (1/m)\sum(s_k - s)(s_{k+\tau} - s), \quad m = M - \tau. \quad (3)$$

Задержка выбирается равной времени первого пересечения нуля автокорреляционной функции. Второй способ требует вычисления спектра мощности временного ряда, т. е. быстрого преобразования Фурье автокорреляционной функции. Если в спектре мощности присутствуют кратные пики, то задержка выбирается равной четверти периода самой высокой из доминирующих (энергонесущих) частот. Третий способ основан на вычислении средней взаимной информации между двумя измерениями. Пусть даны два множества измерений  $A$  и  $B$ . Взаимная информация между элементом  $a_i$  множества  $A$  и элементом  $b_j$  множества  $B$  определяется как количество информации, которое имеют измерения  $a_i$  и  $b_j$  по отношению друг к другу:

$$I_{a_i, b_j} = \ln \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]. \quad (4)$$

Если измерения независимы, то взаимная информация равна нулю. Усредняя по всем измерениям, получаем:

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \ln \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]. \quad (5)$$

Заменяя  $a_i$  и  $b_j$  на  $s_k$  соответственно, получаем среднюю взаимную информацию как функцию временной задержки. Задержка выбирается равной времени первого минимума во взаимной информации.

Предлагается использовать следующий алгоритм вычисления корреляционной размерности аттрактора. В случае модельных данных, когда известна размерность  $n$  фазового пространства динамической системы и все  $n$  координат каждой точки на аттракторе, корреляционную размерность  $D_2$  аттрактора находят следующим образом [4].

Рассмотрим корреляционный интеграл  $C(r)$ , показывающий относительное число пар точек аттрактора, находящихся на расстоянии, не большем  $r$ :

$$C(r) = \frac{1}{m(m-1)/2} \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \Theta(r - \rho(x_i, x_j)). \quad (6)$$

Здесь  $\Theta$  – функция Хевисайда:  $\Theta(\alpha) = 1, \alpha \geq 0$ ;  $\Theta(\alpha) = 0, \alpha < 0$ ;  $\rho$  – расстояние в  $n$ -мерном фазовом пространстве;  $m$  – число точек  $x_i$  на аттракторе.

Если выполняется условие:

$$C(r) \sim r^{D_2}, \quad (7)$$

то  $D_2$  считают корреляционной размерностью аттрактора. Справедливость приведенного степенного закона ограничена значениями  $r$ , достаточно малыми по сравнению с размером аттрактора. При увеличении  $r$  величина  $C(r)$  достигает насыщения (при  $r$ , сравнимых с размером

аттрактора). С другой стороны, при очень малых значениях  $r$  число пар точек  $x_i, x_j$ , расстояние между которыми не превышает  $r$ ; становится малым (из-за конечности числа точек на аттракторе) и статистика становится бедной. Кроме того, приобретает решающее значение влияние инструментальных ошибок измерения сигнала. Следовательно, на практике степенной закон выполняется только в ограниченном диапазоне значений  $r$  (скейлинговом диапазоне), который и может быть использован для определения размерности аттрактора.

Учитывая, что из (7) следует:

$$\ln C(r) \sim D_2 \ln r, \quad (8)$$

можно получить оценку размерности аттрактора как тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей график корреляционного интеграла  $C(r)$  в двойном логарифмическом масштабе.

Используя вышерассмотренную методику, была определена фрактальная размерность турбулентного потока воздуха в гладкой трубе и в трубе с демпфирующими полостями. Анализировались различные временные отрезки, на которых происходило изменение фрактальных характеристик. Средние значения фрактальной размерности  $Dim$  составили  $Dim_0 = 1,4365 \pm 0,221$  для гладкой трубы и  $Dim_1 = 1,3814 \pm 0,1525$ ;  $Dim_2 = 1,3681 \pm 0,2211$ ;  $Dim_3 = 1,3584 \pm 0,2611$ ;  $Dim_4 = 1,3927 \pm 0,2258$ ;  $Dim_5 = 1,3951 \pm 0,2640$  для перфорированной трубы с демпфирующими полостями в зависимости от числа перфорационных отверстий  $n = 1-5$ , сообщающихся с каждой демпфирующей полостью, соответственно [5].

Эксперименты показали, что фрактальные размерности пульсаций давления турбулентных потоков при различном количестве перфорационных отверстий, сообщающихся с демпфирующими полостями, существенно отличаются (рис. 8).

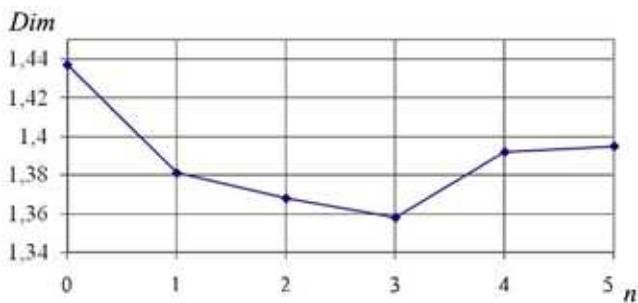


Рис. 8. Зависимость среднего значения фрактальной размерности турбулентного потока  $Dim$  от количества перфорационных отверстий  $n$ , сообщающихся с каждой демпфирующей полостью

Полученные результаты выявляют немонотонную зависимость среднего значения фрактальной размерности турбулентного потока от количества перфорационных отверстий, сообщающихся с каждой демпфирующей полостью [5]. Следует отметить качественное совпадение представленной зависимости с полученной ранее зависимостью сопротивления трения от количества перфо-

рационных отверстий [1]. Представляется неслучайный характер такого совпадения. Полученные результаты свидетельствуют о том, что процесс не является случайным в полном смысле, как это часто принято считать. Причем наилучший результат получен при фрактальной размерности, наиболее отличной от фрактальной размерности невозмущенного потока, соответствующей  $n = 0$ .

Зависимость относительного сопротивления трения, представляющего собой отношение коэффициента трения в трубе с демпфирующими полостями к коэффициенту трения в гладкой трубе  $C_f/C_{f0}$ , от размерности потока представлена на рисунке 9. Как следует из графика на рисунке 9, зависимость относительного сопротивления трения  $C_f/C_{f0}$  от размерности потока  $Dim$  носит возрастающий характер.

## 2 ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАВИСИМОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ ОТ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

Возможно предположить линейный характер зависимости относительного сопротивления трения от размерности потока  $C_f/C_{f0} = f(Dim)$ . Однако ожидается, что отношение коэффициента трения в трубе с демпфирующими полостями к коэффициенту трения в гладкой трубе  $C_f/C_{f0}$  не может быть больше 1, что имеет место при развитии турбулентном движении потока.

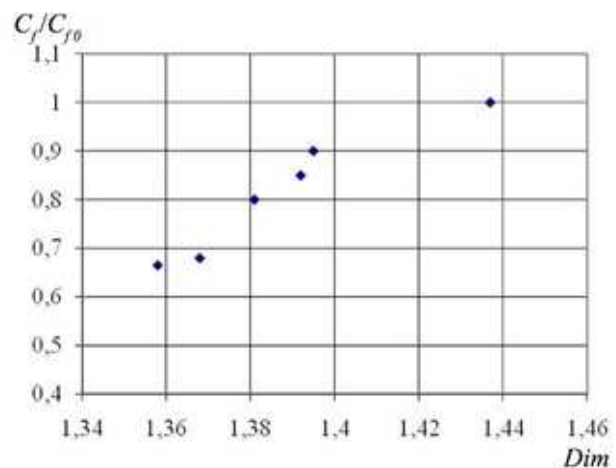


Рис. 9. Зависимость относительного сопротивления трения от размерности потока

С другой стороны, ожидается, что фрактальная размерность пульсаций  $Dim$  при развитии турбулентном движении потока (гладкая труба) может быть равной 1,5 (но не превышать это значение теоретически), что соответствует широкополосному спектру колебаний.

Эти теоретические предположения позволяют обобщить зависимость, представленную на рисунке 9 в виде:

$$C_f/C_{f0} = 0,4765th(19,29Dim - 25,957) + 0,5235, \quad (9)$$

где  $C_f/C_{f0}$  – относительный коэффициент сопротивления трения;

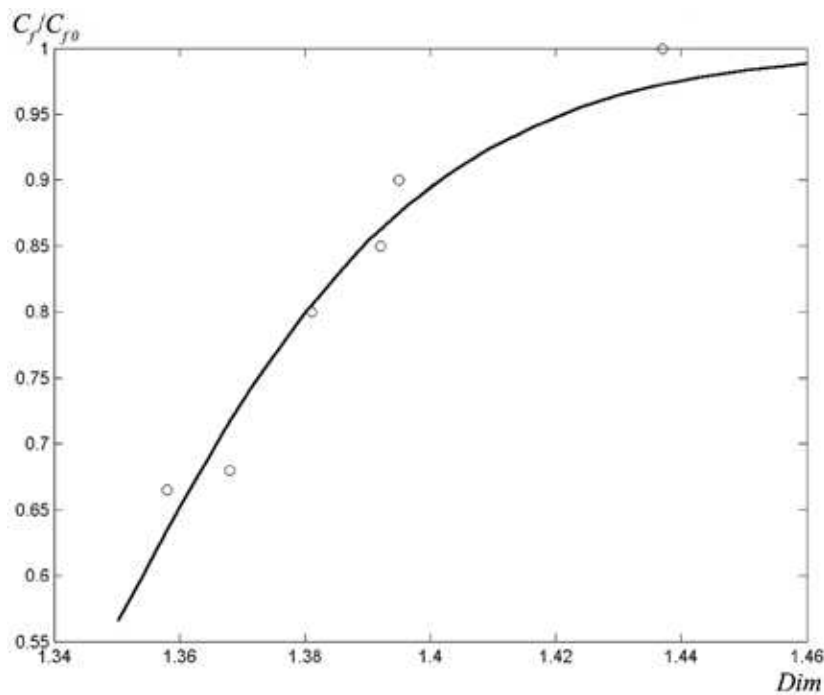


Рис. 10. Результаты обобщения опытных данных в виде зависимости сопротивления трения на основном участке перфорированной трубы с демпфирующими полостями от размерности поперечных пульсаций давления:  $\circ$  – экспериментальные значения; линия – расчет по формуле (9)

$Dim$  – фрактальная размерность поперечных пульсаций давления потока.

Эмпирические коэффициенты в зависимости (9) определялись методом наименьших квадратов. Экспериментальные точки группируются около зависимости (9) со среднеквадратичной погрешностью, не превышающей 2,5% (рис. 10).

### 3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Осесимметричное движение турбулентного потока в трубе (как на начальном, так и на основном участке) можно описать дифференциальными уравнениями пограничного слоя и неразрывности

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho_{\infty} u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho v r)}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

где  $u, v$  – продольная (вдоль осевой координаты  $x$ ) и поперечная (вдоль координаты  $y$ ) составляющие скорости потока соответственно;

$r$  – радиус анализируемой точки;

$\rho, \mu$  – плотность и динамический коэффициент вязкости потока;

$\mu_T$  – коэффициент турбулентного переноса количества движения;

индекс  $\infty$  характеризует параметры на оси трубы.

Граничные условия:

$$x = 0 : u = u_0;$$

$$y = 0 : u = 0; v = 0; \quad (12)$$

$$y = R : u = u_{\infty}.$$

Здесь  $R$  – радиус проточной части трубы;

индекс  $0$  характеризует параметры на входе в трубу.

Скорость  $u_{\infty}$  в каждом сечении трубы определяется соотношением:

$$u_{\infty} = \frac{u_0 (\rho_0 / \rho_{\infty})}{1 - 2 \delta^* / R}, \quad (13)$$

где толщина вытеснения  $\delta^*$  выражается формулой

$$\delta^* = \int_0^R \left( 1 - \frac{y}{r} \right) \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \right) dy. \quad (14)$$

При анализе изотермического течения можно принять

$$\rho_0 = \rho_{\infty} = \rho.$$

Коэффициент турбулентного переноса количества движения  $\mu_T$  в соответствии с моделью пути смешения Прандтля выразим зависимостью

$$\mu_T = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (15)$$

где длина пути смешения  $l$  может быть рассчитана по выражению

$$l = \alpha y \left\{ 1 - \exp \left[ -\rho v_* y / (26 \mu) \right] \right\}. \quad (16)$$

Здесь  $v_*$  – динамическая скорость в рассматриваемой точке;  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий интенсивность турбулентного переноса количества движения.

В рамках классической модели пути смещения Прандтля коэффициент  $\alpha$  считается величиной постоянной ( $\alpha = \alpha_0 = 0,4$ ). Однако в потоках с воздействиями, как показано в [6], этот коэффициент может претерпевать значительные изменения.

На значение коэффициента  $\alpha$  в пограничном слое перфорированной трубы с демпфирующими полостями будет оказывать влияние ускорение потока на ее начальном участке, которое можно учесть поправкой, предложенной в работе [6], а также демпфирующие полости, способствующие дополнительному гашению турбулентных пульсаций. В соответствии с подходом [6], была установлена форма связи коэффициента  $\alpha$  с фрактальной размерностью турбулентных пульсаций давления потока воздуха в перфорированной трубе с демпфирующими полостями

$$Dim \text{ в виде: } \alpha/\alpha_0 = A \cdot th(C \cdot Dim + D) + B, \quad (17)$$

где  $A, B, C, D$  – эмпирические коэффициенты.

С учетом поправки [6] на влияние продольного градиента давления выражение (17) примет вид:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{A \cdot th(C \cdot Dim + D) + B}{1 + 21,4 \frac{u_\infty du_\infty/dx}{u_0 (\partial u/\partial y)_{y=0}}}. \quad (18)$$

В качестве масштабного значения скорости  $u_0$  принята скорость на входе в экспериментальный участок.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе экспериментального исследования установлена зависимость фрактальной размерности пульсаций давления турбулентного потока от степени внешнего воздействия на поток. На основе экспериментальных данных предложена математическая модель турбулентности с использованием фрактальной размерности пульсаций давления потока.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковальногов Н.Н., Хахалева Л.В. Течение и сопротивление трения турбулентного потока в перфорированной трубе с демпфирующими полостями // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2002. – № 3. – С. 19–22.
2. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. – Москва-Ижевск, 2003. – 293 с.
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
4. Махортых С.А., Сычев В.В. Алгоритмы вычисления характеристик стохастических сигналов и их применение к анализу электрофизиологических данных // Математическая и вычислительная биология: сб. тезисов 4-й Пуцинской конференции молодых ученых, 19–23 апреля 1999 г. – Пушино, 1999. – С. 6.
5. Метод согласования структуры перфорированной поверхности с демпфирующими полостями с турбулентным потоком, основанный на теории хаоса / Хахалева Л.В. [и др.] // Вестник УлГТУ. – 2011. – № 3. – С. 29–31.
6. Ковальногов Н.Н. Пограничный слой в потоках с интенсивными воздействиями. – Ульяновск: УлГТУ, 1996. – 246 с.