УДК 519.85, 519.6

И.В. Лутошкин, А.И. Девиен

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

***Лутошкин Игорь Викторович,*** *кандидат физико-математических наук, доцент, окончил МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности «Прикладная математика». В настоящее время заведующий кафедрой «Экономико-математические методы и информационные технологии» Ульяновского государственного университета. Имеет публикации по вычислительным методам теории оптимального управления, математической экономике в ведущих российских и зарубежных журналах. Область научных интересов составляют методы исследования динамических оптимизационных систем, модели экономического развития с запаздыванием. [e-mail: Lutoshkiniv@ulsu.ru].*

***Девиен Александра Ивановна,*** *окончила Ульяновский государственный университет по специальности «Математические методы в экономике». Аспирантка кафедры «Экономико-математические методы и информационные технологии» УлГУ. Экономист планово-экономического отдела ФНПЦ ОАО «НПО «Марс». Область научных интересов – модели экономической динамики с запаздыванием. [e-mail: Gella29@yandex.ru].*

Аннотация

Предлагается распространение метода параметризации на задачи, описываемые системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с запаздыванием. Описывается схема сведения системы ДАУ к задаче теории оптимального управления (ТОУ) и последующему применению метода параметризации к полученной задаче. Проводится численный эксперимент, подтверждающий обоснованность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: оптимизационные проблемы с запаздыванием, метод параметризации для задач с запаздыванием, дифференциально-алгебраические уравнения с запаздыванием.

***Igor Viktorovich Lutoshkin,*** *Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, graduated from Ulyanovsk branch of Lomonosov Moscow State University with the specialty in Applied Mathematics; Head of the Department of Economic and Mathematical Methods and Information Technologies at Ulyanovsk State University; an author of articles in the field of numerical methods of optimal control theory and mathematical economics publishing in Russian and foreign Journals; research interests are investigative techniques for dynamic advanced systems; constructing models of economic development with delays. e-mail: Lutoshkiniv@ulsu.ru.*

***Aleksandra Ivanovna Devien,*** *Post-graduate Student at the Department of Economic and Mathematical Methods and Information Technologies at Ulyanovsk State University; graduated from Ulyanovsk State University with the specialty in Mathematical Methods in Economics; an economist of Economic Planning Department at FRPC OJSC 'RPA 'Mars'; research interests are dynamic economic models with delays. e-mail: Gella29@yandex.ru.*

Abstract

An extension of a parameterization method into problems described by algebraic-differential systems with delays is suggested. A scheme of reducing the algebraic-differential system with delays to an optimal control problem and applying the parameterization method to it is described. A computational experiment supporting the relevance of the suggested approach is carried out. In the paper the parameterization method is expanded into the algebraic-differential systems with delays. There is described the scheme of reducing the algebraic-differential systems with delays to the optimal control problems and applying the parameterization method to it. The numerical experiment states such approach.

Key words: optimization problems with delays, the parameterization method for the problems with delays, algebraic-differential equations with delays.

## Введение

При математическом моделировании динамических процессов различной природы аппарат дифференциальных уравнений является одним из самых востребованных, однако классическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений наиболее разработана для систем дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\dot{x} = f(x(t),\ t),$$

где $x(t) \in R^n,\ t \in R, f : R^{n+1} \to R^n$.

Для решения систем, неразрешенных относительно производной, в настоящее время строятся различные теории и методы, ориентированные на специфику рассматриваемых задач. Одним из видов таких задач являются дифференциально-алгебраические системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t), u(t), t\right), \\ q\left(x(t), u(t), t\right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, $t \in R$, $f$ и $q$ – непрерывные функции: $f: R^{n+r+1} \to R^n$, $q: R^{n+r+1} \to R^m$. Задачи данного рода относятся к вырожденным проблемам, и подходы к решению этих проблем носят узкий специализированный характер.

В настоящей работе предлагается рассмотреть дифференциально-алгебраические системы, учитывающие эффект запаздывания: найти непрерывные функции $x(t)$ и $u(t)$ при $t \in [t_0; T]$, связанные соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t), u(t), x(t-h), u(t-h), t\right), \\ q\left(x(t), u(t), x(t-h), u(t-h), t\right) = 0, \\ x(t) = \psi(t),\ t_0 - h \le t \le t_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $h$ – лаг запаздывания, $\psi(t)$ – детерминированная функция, $f: R^{2n+2r+1} \to R^n$, $q: R^{2n+2r+1} \to R^m$.

Необходимость подобного исследования возникла в силу того, что поведение ряда динамических систем в технике, биологии, экономике и т. д. [1–4] может быть корректно смоделировано только с помощью ДАУ с запаздыванием. Однако исследования такого рода задач представляется затруднительным как аналитически, так и численно, поэтому вопрос о создании универсальных эффективных методов решения систем ДАУ остается открытым.

Одним из универсальных подходов, позволяющим решать большой класс задач ДАУ, может стать метод параметризации, который был предложен для решения задач теории оптимального управления [5]. В последующих работах [6–11] он был развит и обобщен для более широкого класса задач, в том числе для ДАУ без запаздывания [9–11], интегро-дифференциальных уравнений [7, 12]. Данный метод показал свою практическую эффективность в различных нерегулярных случаях для задач с обыкновенными дифференциальными связями [9–11], а также в задачах с постоянным запаздыванием [8, 13].

В настоящей работе предлагается применить метод параметризации для решения дифференциально-алгебраических систем с запаздывающим аргументом.

## 1 Постановка проблемы

Введем дополнительную переменную $x_{n+1}$:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| q(x(s), u(s), x(s-h), u(s-h)) \right\| ds, \quad (3)$$

здесь $\|\cdot\|$ – норма Евклида, и поставим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = f\left(x(t), u(t), x(t-h), u(t-h)\right),\ t_0 \le t \le T; \quad (4)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad x_{n+1}(t) = 0, \quad t_0 - h \le t \le t_0; \quad (5)$$

$$g\left(x(T)\right) = x_{n+1}(T) \to \min. \quad (6)$$

Функции $f$ и $q$ будем считать непрерывно-дифференцируемыми по всем переменным.

Если задача (2) имеет решение, тогда функционал (6) на этом решении равен нулю, что является абсолютным минимумом функционала, следовательно, решение задачи оптимального управления (3)–(6) эквивалентно решению системы (2). В случае если (2) решения не имеет, то решение задачи (3)–(6) будет псевдорешением системы ДАУ (2), которое дает минимальную в среднеквадратическом смысле невязку алгебраической части системы (2).

Для поставленной задачи (3)–(6) как задачи оптимального управления можно применять методы ТОУ. Однако практическое применение традиционных методов весьма затруднительно: методы, основанные на необходимом условии – принципе максимума, неэффективны в силу вырождения принципа максимума в задаче (3)–(6); методы, сводящие исходную задачу к задаче нелинейного программирования через полную дискретизацию, слишком громоздки. Эти замечания являются существенным фактором, препятствующим практическому использованию подхода, основанного на переходе от задачи (2) к задаче (3)–(6).

Метод параметризации показал свою практическую эффективность на ряде вырожденных задач теории оптимального управления, в частности, и на задачах (3)–(6) при нулевом запаздывании. Таким образом, применение метода параметризации к полученной проблеме (3)–(6) может оказаться эффективным способом преодоления трудностей, возникающих у традиционных методов.

## 2 Метод параметризации

Метод параметризации [5] заключается в произвольном разбиении временного промежутка и представлении искомой функции управления на каждом из промежутков в виде конечно параметризованной функции. Такое кусочно-аналитическое управление можно считать обобщенным сплайном с переменными узлами. Переменными величинами здесь являются параметры, определяющие класс функций и моменты времени, в которых меняется представление управления. Таким образом, исходная вариационная задача сводится к конечномерной задаче нелинейного программирования (НП), так как целевой функционал исходной задачи становится функцией конечного числа параметров.

Введем произвольное разбиение интервала времени $[t_0, T]$

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T, \quad (7)$$

и закрепим структуру управления на каждом промежутке $[t_{k-1}, t_k)$:

$$u(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k),\ t_{k-1} \le t \le t_k,\ (1 \le k \le N,\ 1 \le \mu \le r), \quad (8)$$

параметры $v_\mu^k \in V_\mu^k \subset R^d$. Множества $V_\mu^k$ представляют собой простые ограничения на параметры.

При подстановке данного параметризованного управления в (3)–(5) получается траектория $x(t)$, зависящая от параметров

$$w^k = \left(t_k, v^k\right) \equiv \left(w_0^k, w_1^k, \ldots w_r^k\right).$$

Представим $x(t)$ в виде:

$$x(t) = z\left(t; t_1, v^1, \ldots, v^{k-1}, v^k\right), \quad t_{k-1} \le t < t_k,$$

где функция $z\left(t; t_1, v^1, \ldots, v^{k-1}, v^k\right)$ представляет зависимость решения начальной задачи (4)–(5) от параметров управления (7), (8).

Введем функцию от управляющих параметров $\{w^k\}$:

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N) = z_{n+1}(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N). \tag{9}$$

В этом случае, задача (3)–(6) примет вид задачи НП:

$$\min\left\{\varphi(w^1, \ldots, w^N) : (7), (8)\right\}. \tag{10}$$

Очевидно, что для эффективного решения задачи (10) необходимо применять методы, основанные на первых (вторых) производных целевого функционала (9). Предположим, что задачи Коши (4)–(5) с управлениями (8) разрешимы при любых параметрах $w$, тогда функция (9) является непрерывно дифференцируемой и к задаче (10) можно применять соответствующие методы оптимизации (градиентные, квазиньютоновские и ньютоновские при условии вычисления производных второго порядка).

При непосредственном дифференцировании (9) по параметру $w^k_{\mu\alpha}$ получим:

$$\frac{\partial \varphi\left(w^1, \ldots, w^N\right)}{\partial w^k_{\mu\alpha}} = \frac{\partial z_{n+1}\left(T, \ldots, v^N\right)}{\partial w^k_{\mu\alpha}}. \tag{11}$$

Очевидно, что вычисление градиента по формулам (11) является достаточно сложной задачей. Вычисление вариаций траектории по параметрам представляет собой решение соответствующей задачи Коши. Число задач Коши в этом случае совпадает с числом переменных $w$, что приводит к большим временным вычислениям. Проблему можно упростить за счет введения сопряженных переменных $p(t)$.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина [14]:

$$H(t, p, x, l, u) = \langle p, f(t, x, l, u)\rangle; \tag{12}$$

и сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H\left(t, p(t), x, x(t-h), u(t)\right)}{\partial x}\right|_{x=x(t)} - \\ \qquad -\left.\dfrac{\partial H\left(\tau, p(\tau), x(\tau), l, u(\tau)\right)}{\partial l}\right|_{\substack{l=x(t)\\ \tau-t+h}}, \; t_0 \le t < T-h; \\ \dfrac{dp}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H\left(t, p(t), x, x(t-h), u(t)\right)}{\partial x}\right|_{x=x(t)}, \; T-h \le t \le T. \end{cases} \tag{13}$$

Для выбора определенной функции $p(t)$ добавим конечное условие

$$p(T) = 0, \;\; p_{n+1}(T) = 1. \tag{14}$$

В терминах введенных функций справедлива следующая теорема.

**Теорема** [7]. *Пусть функции $f$, $g$, входящие в постановку задачи (3)–(6), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных целевого функционала (9)*

*по моменту переключения верна формула:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} &= H\left(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k)\right) - \\ &- H\left(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k)\right); \end{aligned} \tag{15}$$

*по параметру параметризации управляющей функции формула:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v^k_{\mu\alpha}} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H\left(t, p(t), x(t), x(t-h), u(t)\right)}{\partial u_\mu} \cdot \frac{\partial u^k_\mu\left(t, v^k\right)}{\partial v^k_{\mu\alpha}} dt. \tag{16}$$

Таким образом, вычисление градиента сводится к последовательному решению задач Коши по фазовой переменной (3), (4), сопряженной (13), (14) и вычислению интегралов (16), что существенным образом сокращает объем вычислений по сравнению с исходной задачей (11). Результаты сравнительных вычислительных экспериментов, показавших эффективность предлагаемого метода для задач теории оптимального управления, приведены в работах [8, 13].

## 3 Численный эксперимент

Численный эксперимент проводился на тестовом примере, взятом из работы [3]:

$$\dot{x}(t) = (1)\,x(t) + (-1 \;\; 1)\,u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u(t-h),$$

при начальных условиях

$$x(+0) = -h + h^2,$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 3+4t \\ 1+t \end{pmatrix}, \quad t \in [-h, 0).$$

Требуется найти решение $x(t)$, $u(t)$ на отрезке $[0;T]$ при лаге запаздывания $h$ в управляющей переменной.

Применяя вышеописанную методику сведения исходной системы дифференциально-алгебраических уравнений к задаче оптимального управления, поставим задачу оптимального управления с терминальным функционалом в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(t) - u_1(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_2 = \left(2x_1(t) - 2u_1(t-h) + 4u_2(t-h)\right)^2 + \\ \qquad + \left(x_1(t) - u_1(t-h) + 2u_2(t-h)\right)^2, \\ x_1\left(0\right) = -h + h^2, \;\; x_2\left(0\right) = 0, \\ u_1(t) = 3 + 4t, \;\; u_2(t) = 1 + t, \quad t \in [-h; 0), \\ x_2\left(1\right) \to \min. \end{cases}$$

Поставленная проблема в рамках ТОУ носит вырожденный характер (принцип максимума Понтрягина не дает существенную информацию: условие максимума тождественно равно нулю на оптимальной траектории), таким образом, применение стандартных методов решения задач ТОУ становится невозможным. Полученная задача решалась методом параметризации при различных видах параметризации: рассматривались вариации решений задачи при двух видах управления:

- линейное управление (размерность параметризации одной координаты управления равна 2);
- квадратичное управление (размерность параметризации одной координаты управления равна 3);

и различного количества моментов переключения управления:

- 1 момент переключения управления;
- 2 момента переключения управления.

Таблица 1

Результаты численных расчетов (значение функционала)

| Параметризация управления | $h$ | шаг интегрирования | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0,01 | 0,005 | 0,002 |
| линейное управление с одним моментом переключения | 0,1 | 1,4831*10^(-5) | 1,4729*10^(-5) | 1,4902*10^(-5) |
| | 0,3 | 2,5059*10^(-3) | 2,5060*10^(-3) | 2,5056*10^(-3) |
| | 0,5 | 1,9287*10^(-2) | 1,9283*10^(-2) | 1,9298*10^(-2) |
| линейное управление с двумя моментами переключения | 0,1 | 1,4716*10^(-5) | 1,4715*10^(-5) | 1,4630*10^(-5) |
| | 0,3 | 2,5160*10^(-3) | 2,5170*10^(-3) | 2,5123*10^(-3) |
| | 0,5 | 1,9289*10^(-2) | 1,9288*10^(-2) | 1,9292*10^(-2) |
| квадратичное управление с одним моментом переключения | 0,1 | 1,4629*10^(-5) | 1,4585*10^(-5) | 1,4569*10^(-5) |
| | 0,3 | 2,5043*10^(-3) | 2,5072*10^(-3) | 2,5012*10^(-3) |
| | 0,5 | 1,9282*10^(-2) | 1,9281*10^(-2) | 1,9300*10^(-2) |
| квадратичное управление с двумя моментами переключения | 0,1 | 1,4628*10^(-5) | 1,4587*10^(-5) | 1,4567*10^(-5) |
| | 0,3 | 2,5025*10^(-3) | 2,5028*10^(-3) | 2,5009*10^(-3) |
| | 0,5 | 1,9285*10^(-2) | 1,9327*10^(-2) | 1,9281*10^(-2) |

Для численного эксперимента время наблюдения процесса фиксировалось на период $T=1$, лаг запаздывания $h$ варьировался на нескольких уровнях.

На первом этапе происходила параметризация управления, строилась конечномерная задача НП, на втором – задача НП решалась градиентным методом и методом Ньютона последовательно. При этом вычисление градиента происходило по формулам (15), (16). В методе Ньютона матрица Гессе вычислялась на основе разностной аппроксимации соответствующими градиентами по формулам (15), (16).

Для оценки анализируемого примера и эффективности метода рассмотрим таблицу 1 и таблицу 2.

Первый столбец таблицы 1 содержит параметризованный вид управления, при котором проводились вычислительные эксперименты, во втором столбце указаны модельные лаги запаздывания системы. Основные данные таблицы 1 – значения функционала решаемой задачи оптимального управления (невязка алгебраической части рассматриваемого примера) при различных лагах запаздывания системы $h$ и шагах интегрирования. В вычислительном эксперименте использовалось три шага интегрирования (0,01; 0,005; 0,002), этот параметр необходим, так как задачи Коши (3), (4), (5) и интегралы (16) вычисляются численно: задачи Коши – методом Рунге-Кутта 2-го порядка, интегралы – методом Симпсона.

Анализ данных в таблице 1 показывает, что процесс решения задачи методом параметризации является устойчивым: с уменьшением шага интегрирования увеличивается точность расчетов и уменьшается функционал; с усложнением параметрического представления управляющей функции увеличивается точность

Таблица 2

Время проведения эксперимента

| Параметризация управления | $h$ | шаг интегрирования | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0,01 | 0,005 | 0,002 |
| линейное управление с одним моментом переключения | 0,1 | 3 | 7 | 10 |
| | 0,3 | 1 | 4 | 9 |
| | 0,5 | 1 | 2 | 5 |
| линейное управление с двумя моментами переключения | 0,1 | 6 | 13 | 26 |
| | 0,3 | 4 | 8 | 20 |
| | 0,5 | 4 | 11 | 14 |
| квадратичное управление с одним моментом переключения | 0,1 | 3 | 10 | 19 |
| | 0,3 | 5 | 14 | 14 |
| | 0,5 | 5 | 11 | 17 |
| квадратичное управление с двумя моментами переключения | 0,1 | 28 | 24 | 48 |
| | 0,3 | 15 | 20 | 68 |
| | 0,5 | 9 | 16 | 40 |

аппроксимации неизвестного решения и уменьшается целевой функционал.

При этом следует отметить, что при увеличении лага запаздывания происходит ухудшение найденного решения (увеличение целевого функционала), что является следствием ухудшения качеств исходной проблемы при увеличении лага запаздывания $h$.

Первый столбец таблицы 2 содержит параметризованный вид управления, при котором проводились вычислительные эксперименты, во втором столбце указаны модельные лаги запаздывания системы. Основные данные таблицы 2 – условное время при решении задачи оптимального управления (например, секунды) приведено при различных шагах интегрирования (0,01; 0,005; 0,002).

Анализ таблицы 2 показывает, что при уменьшении шага интегрирования увеличивается время на решение задачи, что вполне естественно; с усложнением параметризации время решения в целом также увеличивается. При этом стоит заметить, что время на решение задачи при линейном управлении с двумя переключениями (8 параметров) эквивалентно времени при квадратичной параметризации с одним переключением (13 параметров), а из таблицы 1 видно, что точность решения при квадратичной параметризации выше, чем при линейной. Последнее означает, что усложнение вида управляющих функций часто приводит к более высокой степени точности решения без временных потерь.

## Заключение

В статье предлагается обобщенный подход к решению систем ДАУ с запаздыванием, основанный на сведении исходной проблемы к задаче оптимального управления. Полученная задача является вырожденной, поэтому применение классических методов ТОУ здесь малоэффективно. Однако распространение метода параметризации на этот класс задач показало работоспособность предлагаемого подхода. Вычислительный эксперимент выявил адекватность и эффективность предложенного подхода для решения задач, описываемых ДАУ с запаздыванием.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Булатов М.В., Чистяков В.Ф. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 459–470.
2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М. : Наука, 1972.
3. Zaczkiewicz Z. and Marchenko V. Observability of small solutions of linear differential-algebraic systems with delays // Control and Cybernetics. – V. 35 (2006), No. 4.
4. Ulrich Brandt-Pollmann, Ralph Winkler. Numerical Solution of Optimal Control Problems with Constant Control Delays // Economics Working Paper Series. CER-ETH - Center of Economic Research at ETH Zurich. – October 2006. – Working Paper 06/59.
5. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. – 1979. – Т. 19, № 2. – С. 292–303.
6. Горбунов В.К., Лутошкин И.В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 725–742.
7. Лутошкин И.В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации // Известия ИГУ. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 44–56.
8. Лутошкин И.В., Тонких А.И. Метод параметризации для моделирования управляемых систем с точечным запаздыванием // Автоматизация процессов управления. – 2010. – № 4 (22). – С. 21–25.
9. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V. The parameterization method in singular differential-algebraic equations // Lecture Notes in Computational Science, 2658: Computational Science – ICCS, Proceedings, Part II, Springer, Berlin, 2003. – pp. 483–491.
10. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V. The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations // Journal of computational and applied mathematics, Elsevier, 2006. – V. 185, iss. 2. – pp. 377–390.
11. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V., Martynenko Yu.V. A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations // Applied Numerical Mathematics. – 59 (2009). – pp. 639–655.
12. Лутошкин И.В., Дергунов И.Е. Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями // Труды СВМО. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 116–126.
13. Лутошкин И.В., Тонких А.И. Метод параметризации для анализа моделей экономической динамики с запаздыванием // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – Вып. 5. – С. 106–112.
14. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С. [и др.]. – М. : Наука, 1969.