УДК 531.36 : 534.1

О.А. Перегудова[1], К.В. Пахомов[2]

# О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА БЭКСТЕППИНГА

***Перегудова Ольга Алексеевна,*** *доктор физико-математических наук, доцент, окончила механико-математический факультет Ульяновского государственного университета. Профессор кафедры «Информационная безопасность и теория управления» УлГУ. Имеет статьи, учебные пособия, монографию в области теории устойчивости и управления движением механических систем. [e-mail: peregudovaoa@sv.ulsu.ru].*

***Пахомов Константин Валерьевич,*** *аспирант, окончил факультет математики и информационных технологий УлГУ. Младший научный сотрудник управления научных исследований УлГУ. Имеет статьи в области управления движением механических систем. [e-mail: pakhomovkv@yandex.ru].*

Аннотация

В работе обосновывается методика решения задачи о стабилизации нелинейных систем с кусочно-постоянным управлением на основе дискретизации системы, применения метода бэкстеппинга и функций Ляпунова вида векторных норм. Получены достаточные условия стабилизации с оценкой области начальных отклонений. На конкретном примере показана эффективность полученных результатов по сравнению с известными.

Ключевые слова: нелинейная система, кусочно-постоянное управление, бэкстеппинг, функция Ляпунова, матричная норма.

***Olga Alekseevna Peregudova,*** *Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics at Ulyanovsk State University; Professor of the Department of Information Security and Control Theory at Ulyanovsk State University; an author of articles, textbooks, and a monograph in the field of the theory of stability and motion control of mechanical systems. e-mail: peregudovaoa@sv.ulsu.ru.*

***Konstantin Valerevich Pakhomov,*** *Post-graduate student, graduated from the Faculty of Mathematics and Information Technologies at Ulyanovsk State University; a research assistant at the Office of Scientific Research of Ulyanovsk State University; an author of articles in the field of motion control of mechanical systems. e-mail: pakhomovkv@yandex.ru.*

Abstract

A method of solving a stabilization problem of nonlinear systems with piecewise constant control on the basis of a sampling system using a back stepping method and Lyapunov's functions of vector norms type is proved in the paper. Sufficient stabilization conditions with the initial deviations estimation are obtained. A specific example illustrates the effectiveness of the results in comparison with the known ones.

Key words: nonlinear system, piecewise constant control, back stepping, Lyapunov's function, matrix norm.

## Введение

Конструкции систем управления техническими объектами, содержащих измерительные и командные устройства, исполнительные механизмы, таковы, что информация в системе управления передается в дискретные моменты времени и в дискретном виде, а исполнительные органы реализуют управление в виде дискретных функций. Таким образом, во многих практически важных задачах законы управления не могут быть представлены в виде непрерывных функций времени и координат системы. Отсюда возникает необходимость исследования дискретных моделей управления.

Для решения задачи стабилизации систем каскадного типа активно применяется известный метод бэкстеппинга – построения нелинейного управления [1]. Данный метод основан на представлении всей системы в виде каскадного соединения подсистем и реккурентном синтезе закона управления на основе построения функций Ляпунова для каждой подсистемы. К настоящему времени раз-

1 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00541) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0373 «Развитие методов и алгоритмов исследования задач об управлении нелинейными механическими системами и компьютерное моделирование управляемого движения системы тел»).

2 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-33082) и гранта аспирантов и молодых ученых УлГУ 2013.

работаны алгоритмы синтеза дискретных законов управления на основе метода бэкстеппинга с использованием скалярных квадратичных функций Ляпунова [2]. При этом неисследованными являются задачи построения функций Ляпунова вида векторных норм при применении этого метода, а, как известно, эффективность полученного закона управления напрямую зависит от того, насколько удачно подобрана функция Ляпунова.

Целью настоящей работы является развитие дискретного метода бэкстеппинга для стабилизации нелинейных систем каскадного вида. Это развитие состоит в выводе новых более эффективных законов дискретных управлений рассматриваемых систем, обеспечивающих более высокую скорость сходимости, расширение области притяжения решений, по сравнению с известными результатами.

Результаты, полученные в работе, могут быть применены при синтезе систем управления различными техническими объектами, в том числе мобильными системами, такими как автономные воздушные, наземные и подводные роботы.

## 1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о стабилизации нелинейной системы каскадного вида

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi, \qquad \dot{\xi} = u, \tag{1}$$

где $(\eta,\ \xi) \in R^{n+1}$ – вектор состояния системы, $\eta \in R^n$, $\xi \in R$, $u \in R$ – управление, $f(0)=0$, $\mathbf{f}:\Gamma\to R^n$, $g:\Gamma\to R^n$, $(\Gamma=\{\eta \in R^n: |\eta| < \gamma = const > 0\})$. Символом $|\cdot|$ обозначена некоторая векторная норма в пространстве $R^n$. Соответствующую операторную матричную норму, согласованную с выбранной векторной нормой, будем обозначать символом $\|\cdot\|$. Функции $f$, $g$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Будем полагать, что управление $u$ в системе (1) является кусочно-постоянным сигналом, $u(t)=u(kT)$, $\forall t \in [kT, (k+1)T)$; $T>0$, $k \in N$. Значения вектора состояния системы доступны измерению в моменты времени $t=kT$.

Введем обозначения: $u[k]=u(kT)$, $\eta[k]=\eta(kT)$, $\xi[k]=\xi(kT)$ и построим дискретную модель системы (1) на основе аппроксимации Эйлера:

$$\eta[k+1]=\eta[k]+T(f(\eta[k])+g(\eta[k])\xi[k]),$$
$$\xi[k+1]=\xi[k]+Tu[k]. \tag{2}$$

**Определение 1.** Управление $u[k]=u(\eta[k],\ \xi[k])$, $u(0,0)=0$, называется стабилизирующим для системы (2), если нулевое решение $\eta=0$, $\xi=0$ системы (2) при данном управлении будет асимптотически устойчиво.

## 2 Развитие метода бэкстеппинга для дискретных систем

Применение процедуры метода бэкстеппинга для системы (2) состоит в том, что такая система представляется в виде соединения двух подсистем, при котором переменная состояния второй подсистемы играет роль управления для первой подсистемы. Вначале находится такой процесс изменения переменной состояния второй подсистемы, при котором нулевое решение первой подсистемы будет асимптотически устойчиво, а затем строится управление для второй подсистемы, обеспечивающее асимптотическую устойчивость данного процесса.

Предположим, что закон $\xi[k]=\varphi(\eta[k])$ с гладкой функцией $\varphi: R^n \to R$, $\varphi(0)=0$, обеспечивает стабилизацию нулевого положения $\eta=0$ первого уравнения системы (2). Введем новую функцию $z[k]=\xi[k]-\varphi(\eta[k])$, тогда для нового вектора состояния $(\eta,\ z)$ система (2) примет вид:

$$\begin{aligned}\eta[k+1]&=\eta[k]+T\left(f\left(\eta[k]\right)+g\left(\eta[k]\right)\varphi\left(\eta[k]\right)\right)+\\&\quad+Tg\left(\eta[k]\right)z[k],\\ z[k+1]&=z[k]+\varphi\left(\eta[k]\right)-\varphi\Big(\eta[k]+T\Big(f\left(\eta[k]\right)+\\&\quad+g\left(\eta[k]\right)\varphi\left(\eta[k]\right)\Big)+Tg\left(\eta[k]\right)z[k]\Big)+Tu[k].\end{aligned} \tag{3}$$

Далее в статье будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned}A\left(\eta[k]\right)&=\int_0^1\left(f'\left(s\eta[k]\right)+g'\left(s\eta[k]\right)\varphi\left(\eta[k]\right)\right)ds,\\ b\left(\theta,\eta[k],z[k]\right)&=\varphi'\Big(\eta[k]+\\&+\theta T\Big(f\left(\eta[k]\right)+g\left(\eta[k]\right)\varphi\left(\eta[k]\right)+g\left(\eta[k]\right)z[k]\Big)\Big).\end{aligned} \tag{4}$$

**Теорема 1.** Пусть существуют положительные постоянные $a$, $\delta_1<\gamma$ и $\delta_2$, такие, что для любого числа $\theta \in [0,\ 1]$ и для любых $\eta \in R^n$, $\xi \in R$, удовлетворяющих условиям $|\eta|<\delta_1$, $|\xi|<\delta_2$, имеют место неравенства:

$$\begin{aligned}&\left\|E+TA(\eta)\right\|+T\left|g\left(\eta\right)\right|\le\varepsilon=const<1,\\ &T\left|b\left(\theta,\eta,\xi-\varphi\left(\eta\right)\right)A\left(\eta\right)\right|+\\&\quad+\left|1+Tb\left(\theta,\eta,\xi-\varphi\left(\eta\right)\right)g\left(\eta\right)-aT\right|\le\\&\quad\le\varepsilon=const<1.\end{aligned} \tag{5}$$

Тогда управление

$$u[k]=-a\left(\xi[k]-\varphi\left(\eta[k]\right)\right) \tag{6}$$

решает задачу о стабилизации системы (2) с областью притяжения $|\eta|<\delta_1$, $|\xi|<\delta_2$.

**Доказательство.** Учитывая равенства:

$$\begin{aligned}&f\left(\eta[k]\right)+g\left(\eta[k]\right)\varphi\left(\eta[k]\right)=\\&=\left(\int_0^1\left(f'\left(s\eta[k]\right)+g'\left(s\eta[k]\right)\varphi\left(\eta[k]\right)\right)ds\right)\eta[k],\end{aligned}$$

$$\varphi(\eta[k])-\varphi\Big(\eta[k]+T\left(f(\eta[k])+g(\eta[k])\varphi(\eta[k])\right)+Tg(\eta[k])z[k]\Big)=$$
$$=-\varphi'\Big(\eta[k]+\theta T\left(f(\eta[k])+g(\eta[k])\varphi(\eta[k])+g(\eta[k])z[k]\right)\Big)T\Big(f(\eta[k])+g(\eta[k])\varphi(\eta[k])+g(\eta[k])z[k]\Big),$$
$\theta\in[0,1]$,

представим систему (3) в следующем виде:

$$\eta[k+1]=\big(E+TA(\eta[k])\big)\eta[k]+Tg(\eta[k])z[k],$$
$$z[k+1]=Tb(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k])\eta[k]+\big(1+Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k])\big)z[k]+Tu[k].$$

При управлении (6) эта система примет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\eta[k+1]=\big(E+TA(\eta[k])\big)\eta[k]+Tg(\eta[k])z[k],\\&z[k+1]=Tb(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k])\eta[k]+\big(1+Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k])-aT\big)z[k].\end{aligned}\qquad(7)$$

Возьмем для системы (7) функцию Ляпунова в виде $V(\eta,z)=max\{|\eta|,|z|\}$. Рассмотрим поведение функции Ляпунова вдоль решения системы (7) с начальным условием $(\eta_0,z_0)=(\eta_0,\xi_0-\varphi(\eta_0))$, $|\eta_0|<\delta_1$, $|\xi_0|<\delta_2$. Обозначим $V[k]=V(\eta[k],z[k])$, тогда, учитывая неравенства

$$\left|\eta[k+1]\right|\le\Big(\left\|E+TA(\eta[k])\right\|+T\left|g(\eta[k])\right|\Big)\times$$
$$\times\max\Big\{\left|\eta[k]\right|,\left|z[k]\right|\Big\},$$
$$\left|z[k+1]\right|\le\Big(T\left|b(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k])\right|+$$
$$+\left|1+Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k])-aT\right|\Big)\times$$
$$\times\max\Big\{\left|\eta[k]\right|,\left|z[k]\right|\Big\},$$

получим для функции Ляпунова

$$V[k+1]\le\max\Big\{\left\|E+TA(\eta[k])\right\|+T\left|g(\eta[k])\right|,$$
$$T\left|b(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k])\right|+$$
$$+\left|1+Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k])-aT\right|\Big\}V[k].$$

Отсюда, учитывая (5), получим, что

$V[k+1]-V[k]\le-(1-\varepsilon)V[k]$ для любого $k\ge0$. Таким образом, нулевое решение $\eta=0$, $z=0$ системы (7) асимптотически устойчиво. Учитывая, что $\varphi(0)=0$, получим асимптотическую устойчивость нулевого решения $\eta=0$, $\xi=0$ системы (2). Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть существуют положительные постоянные $1<a<1/T$, $\delta_1<\gamma$, такие, что для любого $\eta\in R^n$, удовлетворяющего условию $|\eta|<\delta_1$ имеет место неравенство

$$\left\|E+TA(\eta)\right\|\le\varepsilon=const<1.\qquad(8)$$

Тогда управление

$$\begin{aligned}u[k]=&-a\big(\xi[k]-\varphi(\eta[k])\big)+\\&+\frac{1}{T}\Big(\varphi\Big(\eta[k]+T\big(f(\eta[k])+g(\eta[k])\varphi(\eta[k])\big)+\\&+Tg(\eta[k])z[k]\Big)-\varphi(\eta[k])\Big)\end{aligned}\qquad(9)$$

решает задачу о стабилизации системы (2) с областью притяжения $|\eta|<\delta_1$.

**Доказательство.** При управлении (9) система (3) с учетом обозначения (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\eta[k+1]=\big(E+TA(\eta[k])\big)\eta[k]+Tg(\eta[k])z[k],\\&z[k+1]=(1-aT)z[k].\end{aligned}\qquad(10)$$

Учитывая неравенство (8), выберем число $a>0$ из условия

$$\max\Big\{\left\|E+TA(\eta)\right\|+T\alpha\left|g(\eta)\right|,\left|1-aT\right|\Big\}\le\varepsilon_1=const<1,$$
$$\forall\eta\in R^n:|\eta|<\delta_1.\qquad(11)$$

Возьмем для системы (10) функцию Ляпунова в виде $V(\eta,z)=max\{|\eta|,|z|/\alpha\}$. Рассмотрим поведение функции Ляпунова вдоль решения системы (10) с начальным условием $(\eta_0,z_0)=(\eta_0,\xi_0-\varphi(\eta_0))$, $|\eta_0|<\delta_1$, $\xi_0\in R$. Обозначим $V[k]=V(\eta[k],z[k])$, тогда, учитывая неравенства:

$$\left|\eta[k+1]\right|\le\Big(\left\|E+TA(\eta[k])\right\|+T\alpha\left|g(\eta[k])\right|\Big)\times$$
$$\times\max\Big\{\left|\eta[k]\right|,\left|z[k]\right|/\alpha\Big\},$$
$$\left|z[k+1]\right|/\alpha\le\left|1-aT\right|\left|z[k]\right|/\alpha,$$

получим для функции Ляпунова

$$V[k+1]\le\max\Big\{\left\|E+TA(\eta[k])\right\|+$$
$$+T\alpha\left|g(\eta[k])\right|,\left|1-aT\right|\Big\}V[k].$$

Отсюда, учитывая (11), получим, что $V\left[k+1\right]-V\left[k\right]\le-\left(1-\varepsilon_1\right)V\left[k\right]$ для любого $k\ge 0$. Таким образом, нулевое решение $\eta=0,\ z=0$ системы (10) асимптотически устойчиво. Учитывая, что $\varphi(0)=0$, получим асимптотическую устойчивость нулевого решения $\eta=0,\ \xi=0$ системы (2). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Теоремы 1 и 2 устанавливают конструктивно проверяемые условия стабилизации нелинейных систем (1) в виде неравенств относительно векторных и матричных норм параметров системы. Доказательство этих теорем основано на применении функций Ляпунова вида векторных норм, что обеспечивает гибкость предложенной методики в решении конкретных задач стабилизации.

## 3 Пример

Рассмотрим задачу о стабилизации нелинейной системы вида:

$$\dot{\eta}=\eta^2+\xi,\qquad \dot{\xi}=u. \tag{12}$$

Дискретная модель на основе аппроксимации Эйлера для системы (12) имеет вид:

$$\begin{aligned}&\eta\left[k+1\right]=\eta\left[k\right]+T\left(\eta^2\left[k\right]+\xi\left[k\right]\right),\\&\xi\left[k+1\right]=\xi\left[k\right]+Tu\left[k\right].\end{aligned} \tag{13}$$

Легко заметить, что при условии $1<a<2/T$ закон $\xi[k]=-\eta^2[k]-a\eta[k]$ обеспечивает глобальную стабилизацию нулевого положения $\eta=0$ первого уравнения системы (13).

Введем новую функцию $z[k]=\xi[k]+\eta^2[k]+a\eta[k]$, тогда для нового вектора состояния $(\eta,\ z)$ система (13) примет вид:

$$\begin{aligned}&\eta\left[k+1\right]=\left(1-aT\right)\eta\left[k\right]+Tz\left[k\right],\\&z\left[k+1\right]=T\left(-a^2\eta\left[k\right]+\right.\\&\qquad+\left(z\left[k\right]-a\eta\left[k\right]\right)\left(Tz\left[k\right]+\left(2-aT\right)\eta\left[k\right]\right)\left.\right)+\\&\qquad\qquad+\left(1+aT\right)z\left[k\right]+Tu\left[k\right].\end{aligned}$$

Согласно теореме 1, управление вида

$$u\left[k\right]=-\left(a+b\right)\left(\xi\left[k\right]+a\eta\left[k\right]+\eta^2\left[k\right]\right) \tag{14}$$

решает задачу о локальной стабилизации системы (13) с областью притяжения $|\eta|<\delta_1,\ |\xi|<\delta_2$, если найдется такая постоянная $0\le d\le 1$, что выполняются неравенства:

$$\begin{aligned}&1<a\le\frac{1}{T},\\&\left|1-bT\right|+2Td\left(1-aT\right)\delta_1+\\&\qquad+T\left(T+2\left(1-d\right)\left(1/a-T\right)\right)\times\\&\times\left(\delta_2+\delta_1^2+a\delta_1\right)+T\left(a+\left(2-aT\right)\delta_1\right)<1\end{aligned}$$

или

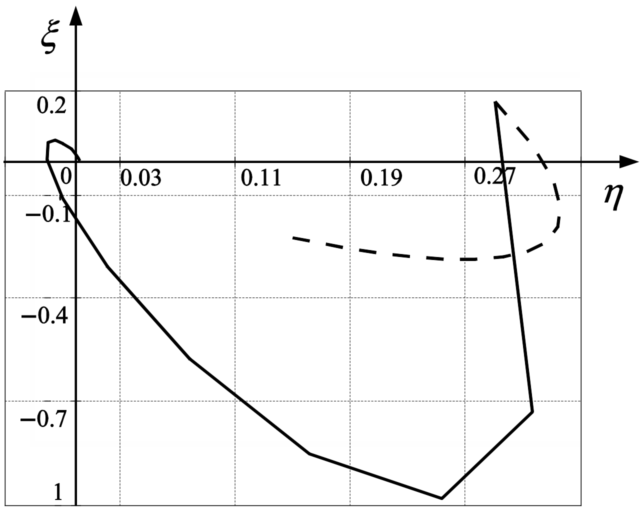


Рис. 1. Результаты моделирования при управлениях (14) и (16) и значениях $(\eta_0,\ \xi_0)=(0{,}29;\ 0{,}17)$, $T=0{,}1\ c$, $a=3$, $b=5$, $d=0{,}5$, $\delta_1=0{,}3$, $\delta_2=0{,}2$, $N=15$

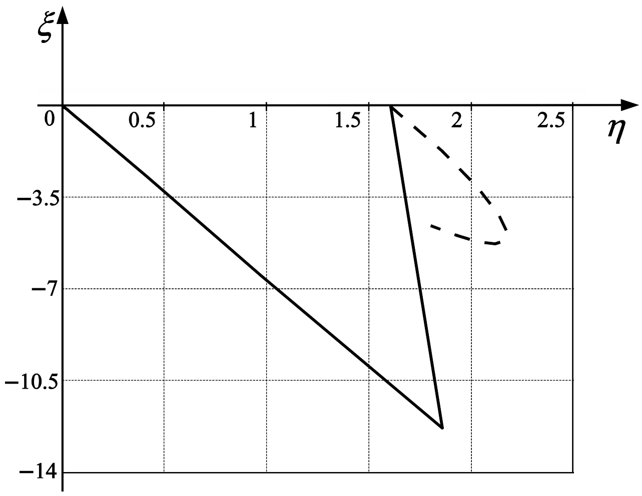


Рис. 2. Результаты моделирования при управлениях (15) и (16) и значениях $(\eta_0,\ \xi_0)=(1{,}6;\ 0)$, $T=0{,}1\ c$, $a=7$, $N=10$

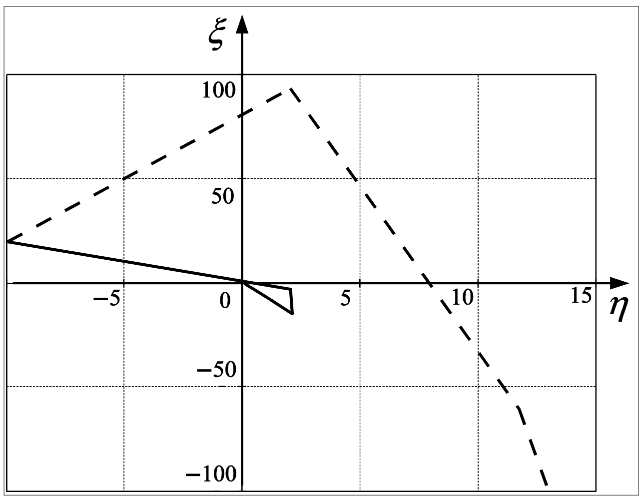


Рис. 3. Результаты моделирования при управлениях (15) и (16) и значениях $(\eta_0,\ \xi_0)=(-10;\ 20)$, $T=0{,}1\ c$, $a=7$, $N=7$

$$\frac{1}{T} < a < \frac{2}{T},$$
$$|1 - bT| + 2Td\left(aT - 1\right)\delta_1 +$$
$$+T^2 \frac{aT\left(1-2d\right)+2d}{2-aT}\left(\delta_2 + \delta_1^2 + a\delta_1\right)+$$
$$+T^2 \frac{a^2\left(1 - T\delta_1\right) + 2a\delta_1}{2 - aT} < 1.$$

Согласно теореме 2, управление вида

$$u[k] = -a^2\eta[k] - \left(2\eta[k] + 2a\right)\left(\xi[k] + \eta^2[k]\right) -$$
$$-T\left(\xi[k] + \eta^2[k]\right)^2 \qquad (15)$$

решает задачу о глобальной стабилизации системы (13).

В работе [2] с использованием метода бэкстеппинга для системы (13) было построено управление для локальной стабилизации вида

$$u[k] = -2\eta[k] - \left(2\eta[k] + 2\right)\left(\xi[k] + \eta^2[k]\right) -$$
$$-T\left[0{,}5\eta^2[k] + 0{,}5\xi[k] - 0{,}5\eta[k] + \left(\xi[k] + \eta^2[k]\right)^2\right]. \qquad (16)$$

Сравнительный анализ выражений (14), (15) и (16) позволяет утверждать, что управления (14) и (15) имеют более простую структуру, чем (16). Кроме того, управления (14) и (15) зависят от параметров $a$ и $b$, выбор которых влияет на скорость сходимости решения системы (13) к нулю и, тем самым, обеспечает более высокую эффективность управлений (14) и (15) по сравнению с (16).

На рисунках 1–3 представлены результаты моделирования системы (13) при управлениях (14), (15) и (16) при $0 \le k \le N$. На рисунке 1 сплошной линией показан процесс, полученный при управлении (14), а пунктирной – при управлении (16). На рисунках 2, 3 сплошной линией показан процесс, полученный при управлении (15), а пунктирной – при управлении (16).

Как показано на рисунках 1 и 2, управления (14), (15) обеспечивают более высокую скорость сходимости по сравнению с (16). Из анализа рисунка 3 можно заключить, что управление (15) эффективнее решает задачу стабилизации, чем (16), так как закон (15) обеспечивает глобальную стабилизацию в отличие от (16), построенного для ограниченной области начальных отклонений [2].

## Заключение

В статье получены следующие основные результаты:

- доказаны теоремы о стабилизации нелинейных систем при помощи кусочно-постоянных управлений, позволяющие определить явные, легко проверяемые оценки области начальных отклонений и параметров систем;
- разработана методика построения функций Ляпунова вида векторных норм для дискретных систем, позволяющая эффективно применять метод бэкстеппинга для решения задач стабилизации нелинейных систем;
- на конкретном примере показана более высокая эффективность построенных в работе законов управлений по сравнению с известными результатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халил Х.К. Нелинейные системы. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 832 с.

2. Nesic, D., & Teel, A.R. Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model // Automatica, 2006, 42. pp. 1801–1808.