

УДК 519.711.3:622.276.031

Е.Н. Меньшов

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ОЧИСТКИ ВОДНЫХ ПОТОКОВ

*Меньшов Евгений Николаевич, кандидат технических наук, доцент окончил радиотехнический факультет Ульяновского политехнического института. Доцент кафедры «Электроснабжение», Ульяновского государственного технического университета. Имеет монографии, учебные пособия и статьи в области математического моделирования процессов очистки смазочно-охлаждающих жидкостей и воды. [e-mail: raynd2@rambler.ru].*

### Аннотация

Работа посвящена моделированию основной характеристики сепаратора водных технологических жидкостей (ВТЖ) – зависимости степени очистки от размера ферромагнитной частицы, скорости водного потока и толщины слоя частиц, осажденных на поверхность магнитной системы. На основе обоснованных приближений получено аналитическое решение нелинейной системы динамического и кинематических уравнений перемещения частицы в ламинарном потоке жидкой среды под действием поля магнитных сил. При этом нелинейная система уравнений приводится к линейному обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению (ДУ) с эквивалентной правой частью, которая моделирует собой эквивалентную силу. Ее причиной является смещение частицы водным потоком в нелинейной системе взаимодействия. Наличие эквивалентной силы эффективно для изучения поведения моделируемой системы, на основе которой обнаружены две существенные зоны изменения состояния движения частиц. В первой зоне эквивалентная сила способствует ускорению процесса осаждения частиц. Во второй зоне эквивалентная сила приводит к торможению этого процесса. Общее решение смоделированного линейного ДУ описывает траекторию частицы. На основе уравнения траектории частицы разработана программа расчета различных семейств характеристик патронного магнитного сепаратора. Обоснован алгоритм применения теоретических характеристик для обеспечения управления качеством очистки ВТЖ.

Ключевые слова: степень очистки, ламинарный поток, уравнение движения, время цикла очистки.

## MATHEMATICAL MODELING OF MAGNETIC SEPARATOR FOR QUALITY MANAGEMENT PURIFICATION OF WATER FLOWS

*Evgeniy Nikolaevich Menshov, Candidate of Engineering, Associate Professor; graduated from the Faculty of Radio-Engineering of Ulyanovsk Polytechnic Institute; Associate Professor of the Electricity Department, SOC cycle at Ulyanovsk State Technical University; an author of monographs, textbooks, and articles in the field of mathematical modeling of cleaning coolants and water. e-mail: raynd2@rambler.ru.*

### Abstract

The paper is devoted to the modelling of the main characteristics of the water separator process fluids - dependence of the degree of cleaning of the size of the ferromagnetic particles, the rate of water flow and the thickness of the layer of particles deposited on the surface of the magnetic system. On the basis of reasonable approximations of the analytical solution of a nonlinear system of dynamic and kinematic equations of a particle moving in a laminar flow of fluid under the action of magnetic force fields. In this non-linear system of equations is reduced to an ordinary linear inhomogeneous differential equation with an equivalent right-hand side, which simulates the equivalent forces. The presence of equivalent force effectively for studying the behaviour of the simulated system on which found two significant areas for changes to the condition of motion of the particles. In the first zone of equivalent force contributes to the acceleration of the process of sedimentation of particles. In the second zone the equivalent force leads to inhibition of this process. The General solution of the linear differential equation describes the trajectory of the particle. The program of calculation of various families of characteristics of a cartridge magnetic separator is developed. Justified algorithm of application of the theoretical characteristics, aimed at the provision of quality management for the cleaning of process aqueous liquids.

Key words: degree of cleaning, laminar stream, motion equation, cleaning cycle time.

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений решения проблемы экологии является организация безотходного промышленного производства. Поэтому актуальна задача очистки водных технологических жидкостей (ВТЖ) от примесей при помощи широкого внедрения в технологические циклы различных сепараторов. Эффективными устройствами для очистки от ферромагнитных примесей являются магнитные сепараторы, в том числе выполненные на постоянных магнитах [1], которые размещаются в трубках из немагнитного материала, называемых патронами. Расчет магнитного поля постоянного магнита цилиндрической формы реализован в работах [2–3].

Магнитный сепаратор является сложным и неоднородным по объему источником магнитного поля. Неоднородность поля обусловлена многими причинами: локализованным источником поля, представляющим собой объединение двух цилиндрических магнитов с отталкивающими расположениями полюсов для усиления градиента напряженности поля; объемной решеткой этих элементов; неоднородностью среды, состоящей из арматуры конструкции сепаратора (полюсные наконечники, ферромагнитные опоры и стенки), осажденных на патроны слоев ферромагнитных частиц, и намагниченной суспензии. Таким образом, распределение магнитного поля сепаратора является результатом совокупного влияния системы многих и неоднородных магнитных элементов, который определялся методом магнитных цепей [4]. Метод подразумевает эквивалентную замену физического пространства сепаратора совокупностью магнитных источников и магнитных проводимостей. Пассивная неоднородная среда сепаратора замещалась совокупностью магнитных проводимостей (или сопротивлений) по методу сеток, когда все пространство сепаратора разбивается на такие элементарные объемы, в пределах которых магнитный поток можно считать квазипостоянным и квазиоднородным.

В качестве источников магнитных сил в сепараторах выступают постоянные магниты цилиндрической формы. Магнитное поле таких магнитов обладает свойством цилиндрической симметрии, т. е. значение поля одинаковое в равноудаленных точках на плоскости, нормальной к оси симметрии. При расчетах результирующих магнитных сил система постоянных магнитов замещается эквивалентной магнитной схемой. В сепараторах нашли широкое применение магниты, изготовленные из редкоземельных магнитотвердых материалов на основе сплавов неодима с железом и бором (Nd-Fe-B) [5], которые относятся к группе закритических материалов. У таких веществ характеристика размагничивания  $B(H)$  практически прямолинейная, где  $B$  – индукция магнитного поля,  $H$  – напряженность магнитного поля. Линейная зависимость магнитной характеристики позволила синтезировать схему замещения постоянного магнита в виде активной распределенной длинной линии и далее преобразовать ее в эквивалентную схему, состоящую из магнитодвижущей силы и магнитного сопротивления (эквивалентный гене-

ратор магнитного напряжения) [3], которое учитывает не только геометрию магнита, но и поток рассеяния через его боковую поверхность.

Использование эквивалентного генератора магнитного напряжения совместно с магнитной цепью пассивной части сепаратора позволяет в расчете учитывать неотъемлемое перераспределение поля между магнитом (на его внутреннем сопротивлении) и рабочим пространством сепаратора. В рабочем пространстве сепаратора существенную роль в перераспределении поля в результате процесса сепарации технологической жидкости играют ферромагнитные частицы, осажденные в магнитном поле на поверхности патрона с образованием слоя осадка определенной толщины  $d_{\text{ос}}$ . Этот слой и приводит к существенному шунтированию интенсивности магнитного поля в рабочей области сепаратора. Магнитное состояние магнитной цепи одной ступени патронного магнитного сепаратора описывается полной системой уравнений Кирхгофа. Анализ полной системы уравнений Кирхгофа и расчет распределения магнитного поля и поля градиентных пондеромоторных сил в рабочей области сепаратора проводились численным методом [4]. Выявлены закономерности распределения напряженности магнитного поля в радиальном направлении  $r$  рабочего пространства сепаратора:

$$\langle H(r, d_{\text{ос}}) \rangle = \langle H_m(d_{\text{ос}}) \rangle \cdot 10^{-\alpha_1 \cdot (r-R)},$$

где  $\alpha_1$  – коэффициент распределения интенсивности поля в рабочей области сепаратора;

$R$  – радиус поверхности патрона.

В частности, распределение магнитной силы в патронном сепараторе целесообразно аппроксимировать двумя кусочно-линейными зависимостями:

$$f_{\text{МК}} = -[f_{\text{К}} - \alpha_{0\text{К}} \cdot r], \quad (1)$$

где индексу  $\kappa=1$  соответствует область сильного поля, а индексу  $\kappa=2$  – область слабого поля. Область слабого поля располагается на отрезке  $r_{\text{сп1}} \leq r \leq a/2$ , область сильного поля –  $R \leq r \leq r_{\text{сп1}}$ , где  $a$  – расстояние между осями соседних патронов,  $r_{\text{сп1}}$  – граница областей слабого и сильного полей.

Эффективность магнитной очистки определяется не только интенсивностью магнитных сил и конструкцией магнитной системы, но и крупностью частиц. Феррочастицы больших размеров эффективней задерживаются сепаратором. Однако примеси в ВТЖ полидисперсные. Дисперсный состав механических примесей (твердой фазы в дисперсной системе) оценивается вероятностными законами распределения [6]. Подчеркнем, что сепаратор изменяет (преобразует) дисперсный состав примесей. Таким образом, с математической точки зрения магнитный сепаратор можно рассматривать как систему с определенной характеристикой, на которую подается входное воздействие и с которой снимается отклик на выходе.

Загрязненность ВТЖ, например, оборотных вод, в процессе их эксплуатации сильно колеблется, что негативно сказывается на эффективности основного технологического процесса, например, прокатки листового металла. При этом среднестатистические параметры дисперсного распределения примеси (средний размер и среднеква-

дратическое отклонение) могут изменяться. Поскольку очистка жидкостей является дорогостоящим процессом и чем выше требуемое качество, тем больше затраты на его достижение, то для решения задачи поддержания допустимого уровня качества очистки ВТЖ необходимо управлять режимом работы сепаратора. Для построения целевой функции управления сепаратором необходимо построить его математическую модель.

Настоящая работа посвящена построению математической модели семейства характеристик магнитных патронных сепараторов, определяющих качество и эффективность управления степенью очистки ВТЖ.

### 1 Постановка задачи

Качество работы сепараторов оценивается зависимостью степени очистки от размера частиц  $\varepsilon(d)$ . Опыт показывает, что эта характеристика зависит не только от конструкции магнитной системы и типа постоянного магнита, а также от параметров режима работы сепаратора: от скорости течения ВТЖ  $v_{ж}$ ; от толщины осадка шлама  $d_{ш}$ , налипшего на патрон; от исходной массовой концентрации примеси в ВТЖ  $C$ .

Условием требуемого качества очистки ВТЖ выступает неравенство [1]:  $C_{oc} = (1 - \bar{\varepsilon}(\bar{d}, v_{ж})) C_u \leq C_o$ , где  $C_{oc}$  – остаточная концентрация примеси (на выходе сепаратора),

$C_u$  – исходная концентрация примеси (на входе сепаратора),

$C_o$  – допустимая норма примеси в очищенной ВТЖ,

$\bar{\varepsilon}(\bar{d}, v_{ж})$  – среднее значение степени очистки, определяемое формулой

$$\bar{\varepsilon}(\bar{d}, v_{ж}) = \int_0^{\infty} \varepsilon(d_{\phi}, d_{ш}, v_{ж}) f_u(d_{\phi}) d(d_{\phi}),$$

$\bar{d}$  – среднearифметическое значение диаметра феррочастиц.

Здесь  $f_u(d_{\phi})$  – функция распределения дисперсности примеси на входе сепаратора,  $d_{\phi}$  – эффективный диаметр сферической частицы. Управляя значением скорости потока ВТЖ  $v_{ж}$ , будем поддерживать условие  $C_{oc} \leq C_o$ . При этом требуется определить математическую модель зависимостью степени очистки  $\varepsilon(d_{\phi}, d_{ш}, v_{ж})$  от размера

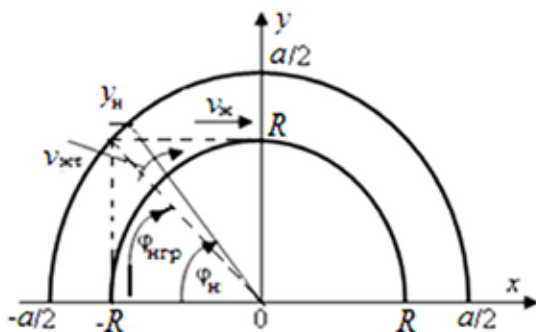


Рис. 1. Активная рабочая область полукаскада сепаратора

частиц  $d = d_{\phi}$ , от толщины осадка шлама  $d_{ш}$ , от скорости течения ВТЖ  $v_{ж}$ .

Активная рабочая зона полукаскада – функционально законченная элементарная часть патронного магнитного сепаратора, состоящая из двух противоположно расположенных на расстоянии  $a$  постоянных магнитов патронного магнитного сепаратора, представляет собой полуцилиндрический объем (рис. 1), ограниченный радиусом  $a/2$ . Очищаемая жидкость проходит рабочую область слева направо со скоростью  $v_{ж}$ . В поле притяжения постоянного магнита, частица может осесть на патрон радиусом  $R$ . Степень очистки вычисляется формулой  $\varepsilon = 2y_n/a$  [1], где  $a$  – расстояние между осями противоположно расположенных магнитов. В соответствии с рисунком 1 будем иметь

$$\varepsilon(d) = \sin \varphi_n = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_n}, \tag{2}$$

где  $y_n$ ,  $\varphi_n$  – есть соответственно ордината и угол вхождения феррочастицы в активную рабочую область сепаратора с таким диаметром, при котором частица будет находиться на границе состояния попадания или непопадания на патрон.

В открытой литературе имеются некоторые модели (математические и алгоритмические) [1, 6], которые посвящены описанию отдельных фрагментов данной характеристики. Поэтому установление аналитических связей степени очистки с геометрическими и физическими параметрами сепаратора будем проводить на основе математического моделирования траектории феррочастицы в ламинарном водном потоке под действием магнитных сил.

### 2 Усреднение скорости течения ВТЖ на неоднородном участке рабочей области

Поперечное сечение агрегата сепаратора неоднородно в направлении течения жидкости, поэтому скорость  $v_{ж}$  ее течения тоже неоднородна. Появляется поперечная составляющая скорости  $v_{жy}$  (рис. 2). Поток ВТЖ, вошедший в рабочую область сепаратора, можно условно разделить на три участка. Участок однородного тока ВТЖ ( $-a/2 \leq x \leq -R$ ) с входной скоростью ее течения  $v_{жx}$ . Участок неоднородного тока ВТЖ ( $-R \leq x \leq R$ ), верхняя часть которого характеризуется прямолинейным вдоль

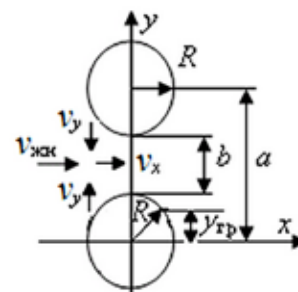


Рис. 2. Распределение скоростей течения ВТЖ в рабочем объеме сепаратора

оси  $x$  током ВТЖ, а нижняя – вращательным током ВТЖ, омывающим цилиндрическую поверхность патрона.

Распределение на неоднородном участке вдоль оси  $Ox$  продольной составляющей скорости  $v_{жсх}(x)$  ВТЖ определим на основе уравнения непрерывности ее течения в разных сечениях:  $v_{жсн} \cdot l \cdot a = v_{жсх}(x) \cdot (a - 2y_{ср}) \cdot l$ ,

где  $l$  – длина патрона магнитной системы,  $y_{ср} = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Искомая формула принимает вид:

$$v_{жсх}(x) = \frac{v_{жсн} \cdot a}{a - 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}}, \quad (3)$$

правомерна в интервале  $-R \ll x \ll R$ , где  $R = (R_0 + d_{ш})$ ,  $R_0$  – радиус патрона без осадка шлама.

На рисунке 3 представлено семейство зависимостей, отображающее формулу (3). Из графиков следует, что зависимости  $v_{жсх}(x)$  имеют квазилинейный характер. Это позволяет применить простейшую формулу для определения средней скорости течения жидкой среды вдоль неравномерного русла:

$$\langle v_{жс} \rangle = \frac{v_{жсх}(0) + v_{жсх}(R)}{2} = v_{жсн} \left( \frac{a - R}{a - 2R} \right). \quad (4)$$

Вблизи патрона поток жидкости обтекает поверхность патрона. Поэтому, исходя из продольной составляющей (3), тангенциальную составляющую скорости можно определить по формуле:

$$v_{жс\tau} = \frac{v_{жсх}(x)}{\sin \varphi} = \frac{v_{жсн} \cdot a}{\sin \varphi (a - 2\sqrt{R^2 - x^2})}. \quad (5)$$

Из формулы (1), в соответствии с рисунком 1, следует то, что большие значения степени очистки  $0,707 \leq \varepsilon(d) \leq 1$  ( $45^\circ \leq \varphi_n \leq 90^\circ$ ) формируются на участке прямолинейного тока ВТЖ. Малые значения степени очистки  $0 \leq \varepsilon(d) < 0,707$  ( $0^\circ \leq \varphi_n < 45^\circ$ ) формируются на однородном и вращательном участках тока ВТЖ. При этом верхнюю часть зависимости  $\varepsilon(d)$  назовем «головной» частью характеристики степени очистки, нижнюю – «хвостовой» частью характеристики степени очистки. В данной работе сосредоточим внимание на моделировании «головной» ча-

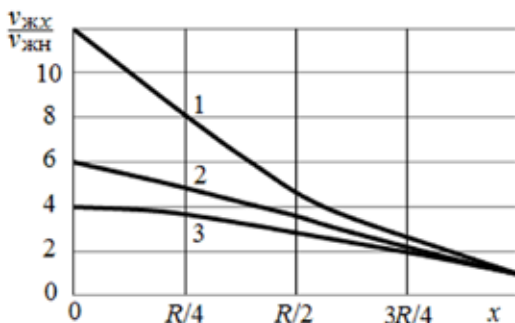


Рис. 3. Семейство зависимостей распределения продольной составляющей скорости течения жидкой среды в области сужения русла рабочей области сепаратора: 1, 2, 3 –  $2 \cdot R/a = 0,92; 0,83; 0,75$  соответственно

сти зависимости  $\varepsilon(d)$ , которая непосредственно связана с остаточным содержанием примеси в очищенной ВТЖ.

### 3 Анализ движения частицы на прямолинейном участке ламинарного потока жидкой среды под действием магнитных сил

#### 3.1 Исходная система уравнений

Направление перемещения феррочастицы, вошедшей в активную рабочую область полускада сепаратора с начальным углом  $45^\circ \leq \varphi_n \leq 90^\circ$ , определяется кинематикой двух движений: радиальным  $\Delta r_m$  под действием магнитных сил, обладающих свойством цилиндрической симметрии [4]; продольным смещением  $\Delta r_{жс}$  вдоль оси  $Ox$  за счет ламинарного характера тока жидкой среды. Результирующая скорость относительно неподвижных магнитов и расстояние частицы до оси симметрии в полярной системе координат определяются соответственно выражениями:

$$v = v_m + \langle v_{жс} \rangle, \quad (6)$$

$$r = r(0) + \Delta r_m + \Delta r_{жс}, \quad (7)$$

где (7) является интегралом (6). Здесь:  $v_m$  – вектор скорости, обусловленный магнитной силой,  $\langle v_{жс} \rangle$  – усредненный вектор скорости тока ВТЖ согласно (4);  $r(0)$  – начальный радиус-вектор положения феррочастицы. Магнитная составляющая перемещения  $\Delta r_m$  не зависит от направления радиус-вектора  $r$  частицы и определяется только его значением. Здесь отсутствуют центробежные силы, поэтому динамическое уравнение магнитного движения скалярное:

$$m \frac{dv_m}{dt} = f_m(r) + f_m, \quad (8)$$

где  $m$  – масса феррочастицы;  $f_m(r)$  – магнитная сила притяжения, значение которой зависит от расстояния  $r$  удаления частицы до оси симметрии и имеет радиальное направление [2, 4],  $f_m$  – сила трения в жидкости. С учетом силы трения, уравнение (8) принимает вид:

$$m \frac{d^2 \Delta r_m}{dt^2} + K_{c1} \frac{d \Delta r_m}{dt} = f_m(r), \quad (9)$$

где  $K_{c1} = 3\pi\eta d$  – коэффициент пропорциональности в формуле Стокса,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости жидкой среды;  $d$  – диаметр феррочастицы.

Уравнение (9) в общем случае нелинейно в силу нелинейной зависимости функции  $f_m(r)$  и вследствие отличия значений  $r$  от  $\Delta r_m$  в соответствии с векторным равенством (7). Для получения аналитического решения ДУ движения феррочастицы нелинейную зависимость магнитной силы  $f_m(r)$  заменим кусочно-линейной зависимостью (1). Заметим, что сила  $f_{мк}(r)$  положительна относительно направления магнитных перемещений  $\Delta r_m$  и отрицательна вдоль радиус-вектора  $r$ .

### 3.2 Представление системы уравнений в полярных координатах

Проведем преобразование системы векторных кинематических уравнений (6)–(7) в систему двух скалярных уравнений, выраженных в полярной системе координат. Для этого, сначала, записываем результирующую скорость частицы через производную по времени от радиус-вектора  $r$  следующим образом:

$$v = \frac{d(re_r)}{dt} \text{ и затем, подставляя в (6), имеем:}$$

$$\frac{dr}{dt}e_r + r \frac{de_r}{dt} = v_M e_M + \langle v_{\text{жс}} \rangle e_x, \quad (10)$$

где  $e_r$  – орт радиус-вектора  $r$ ;  $e_M = -e_r$  – направляющий единичный вектор  $v_M$ ;  $e_x$  – орт координатной оси  $Ox$ . После разложения скорости  $\langle v_{\text{жс}} \rangle$  на два взаимно перпендикулярных вектора имеем:

$$\langle v_{\text{жс}} \rangle e_x = -\langle v_{\text{жс}} \rangle \cos \varphi e_r + \langle v_{\text{жс}} \rangle \sin \varphi e_\tau, \quad (11)$$

где  $\varphi$  – направляющий угол радиус-вектора  $r$  частицы относительно отрицательной полуоси  $Ox$ ,  $e_\tau$  – единичный вектор, перпендикулярный  $e_r$ . Системе векторных уравнений (10)–(11) соответствует следующая система двух скалярных уравнений в полярной системе координат:

$$\frac{dr}{dt} = -v_M - \langle v_{\text{жс}} \rangle \cos \varphi, \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\langle v_{\text{жс}} \rangle \sin \varphi}{r}. \quad (13)$$

При этом использовались следующие представления векторов  $e_r$ ,  $e_\tau$  и  $\frac{de_r}{dt}$  [7]:

$$e_r = \cos(\pi - \varphi)e_y + \sin(\pi - \varphi)e_x;$$

$$e_\tau = \sin \varphi e_y + \cos \varphi e_x; \quad \frac{de_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} e_\tau,$$

где  $e_y$  – орт оси  $Oy$ .

Уравнение (13) выражает кинематику поворота радиус-вектора  $r$  частицы на угол  $\varphi(t)$  с угловой скоростью  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  за счет тока жидкой среды.

Подчеркнем, что в реальных сепараторах максимальный диапазон изменения радиальной координаты  $r$  частицы при ее перемещении от  $r_{\text{макс}} = a/2$  до  $r_{\text{мин}} = R_0$  не превышает одной трети максимального значения  $r_{\text{макс}}$ . С учетом сказанного, для упрощения задачи в уравнении (13) заменим текущее значение  $r$  на усредненное значение  $\langle r \rangle$ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\langle v_{\text{жс}} \rangle \sin \varphi}{r}. \quad (14)$$

Интегрируя (14), будем иметь

$$tg \frac{\varphi}{2} = tg \frac{\varphi_n}{2} e^{\frac{\langle v_{\text{жс}} \rangle t}{\langle r \rangle}}. \quad (15)$$

Интегрируя (12), получаем формулу для определения расстояния  $r$  частицы до центра симметрии магнитных сил:

$$r = r(0) - \Delta r_M - \Delta r_{\text{жс}r},$$

$$\Delta r_{\text{жс}r} = \langle r \rangle \int_{\varphi_n}^{\varphi} ctg \varphi d\varphi = \langle r \rangle \ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \langle r \rangle \sigma(\varphi), \quad (16)$$

где  $\Delta r_{\text{жс}r}$  – проекция перемещения на радиальное направление, обусловленная прямолинейным током ВТЖ,  $\varphi_n$  – начальный угол вхождения феррочастицы в рабочую область сепаратора. Семейство зависимостей нормированной величины  $\sigma = (\Delta r_{\text{жс}r} / \langle r \rangle)$  от переменной  $\varphi$ , вычисленное по правой формуле (16) для разных значений  $\varphi_n$ , представлено на рисунке 4.

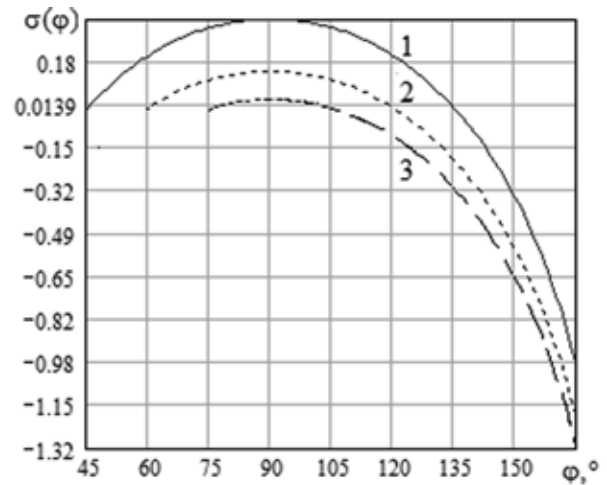


Рис. 4. Семейство зависимостей нормированных перемещений частицы в радиальном направлении, вызванных эквивалентной силой:

1 – для  $\varphi_n = 45^\circ$ ; 2 – для  $\varphi_n = 60^\circ$ ; 3 – для  $\varphi_n = 75^\circ$ .

### 3.3. Эквивалентная добавочная сила

Для получения аналитического решения ДУ (9) семейство универсальных зависимостей  $\sigma(\varphi)$  аппроксимируем следующим выражением:

$$\sigma(\varphi) \approx \beta + 2\alpha \cdot \text{sign}(\varphi - 90^\circ) \text{ctg};$$

$$\alpha = 0,225 \sin \varphi_n; \quad \beta = 0,45 \cos \varphi_n, \quad (17)$$

где обобщенная функция:  $\text{sign}(\varphi - 90^\circ) = -1$ , при  $\varphi < 90^\circ$ ;  $\text{sign}(\varphi - 90^\circ) = 1$ , при  $\varphi > 90^\circ$ . После подстановки в (17) известного тригонометрического преобразования  $\text{ctg} \varphi = (\text{ctg}(\varphi/2) - \text{tg}(\varphi/2))/2$  и с учетом формулы (15) получаем

$$\sigma(\varphi(t)) = \beta + \alpha \cdot \text{sign}(\varphi - 90^\circ) \times$$

$$\times \left[ \text{ctg} \frac{\varphi_n}{2} e^{\frac{-\langle v_{\text{жс}} \rangle t}{\langle r \rangle}} - \text{tg} \frac{\varphi_n}{2} e^{\frac{\langle v_{\text{жс}} \rangle t}{\langle r \rangle}} \right]. \quad (18)$$

Тогда, согласно (16) и (18),

$$\Delta r_{\text{жс}r} \approx \langle r \rangle \sigma(\varphi(t)). \quad (19)$$



При подстановке (18) в левое выражение (16) получим текущее радиальное расстояние частицы

$$r = r_m - \langle r \rangle \sigma(\varphi(t)), \text{ где } r_m = r(0) - \Delta r_m. \quad (20)$$

С учетом (1) и (19) ДУ (9) принимает вид:

$$m \frac{d^2 r_m}{dt^2} + K_{c1} \frac{dr_m}{dt} - \alpha_{0k} r_m = -f_k - \alpha_{0k} \langle r \rangle \sigma(\varphi(t)), \quad (21)$$

где  $f_{\text{эк}} = \alpha_{0k} \langle r \rangle \sigma(\varphi(t))$  – есть эквивалентная сила, обусловленная течением жидкой среды, свойства которой заданы нормированной величиной  $\sigma(\varphi)$ . Во-первых, из графиков следует, что в диапазоне угловых перемещений  $\varphi_n \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_n$  эквивалентная сила будет способствовать ускорению частицы к магниту ( $\sigma > 0$ ). При

этом степень такого влияния имеет импульсный характер с предельным пиком, равным  $\Delta r_{\text{экрм}} = 0,35 \langle r \rangle$  (для  $\varphi_n = 45^\circ$ ;  $\varepsilon = 0,71$ ), который проявляется в момент времени, соответствующий уравнению  $\varphi(t) = 90^\circ$ . Во-вторых, частицы, вышедшие из зоны ускорения, попадают в зону  $\varphi \geq 180^\circ - \varphi_n$ , в которой эквивалентная сила будет способствовать лавинообразному торможению частицы к магниту (на рисунке 4 для  $\sigma < 0$ ).

Обыкновенное неоднородное линейное ДУ с постоянными коэффициентами (21) имеет аналитическое решение, которое совместно с (18)–(20) описывают  $r(t)$  – радиальную составляющую траектории частицы. Угловая координата траектории описывается (15).

### 3.4 Уравнение траектории частицы

Общее решение (21) при начальном моменте времени наблюдения движения частицы  $t_1$  имеем:

$$r_m(t) = A_{1k} e^{P_{1k}(t-t_1)} + A_{2k} e^{P_{2k}(t-t_1)} - \frac{F_{ок}}{P_{2k} - P_{1k}} \left[ \frac{e^{P_{2k}(t-t_1)} - 1}{P_{2k}} - \frac{e^{P_{1k}(t-t_1)} - 1}{P_{1k}} \right] - \frac{1}{(P_{1k} - P_{2k})} \times \\ \times \left\{ \left( \frac{\beta_2}{\gamma - P_{1k}} - \frac{\beta_2}{\gamma - P_{2k}} \right) e^{\gamma t} - \left[ \frac{\beta_2}{\gamma - P_{1k}} e^{P_{1k}(t-t_1)} - \frac{\beta_2}{\gamma - P_{2k}} e^{P_{2k}(t-t_1)} \right] e^{\gamma t_1} + \left( \frac{\beta_1}{\gamma + P_{1k}} - \frac{\beta_1}{\gamma + P_{2k}} \right) e^{-\gamma t} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{\beta_1}{\gamma + P_{1k}} e^{P_{1k}(t-t_1)} - \frac{\beta_1}{\gamma + P_{2k}} e^{P_{2k}(t-t_1)} \right] e^{-\gamma t_1} \right\}. \quad (22)$$

$$F_{ок} = f_{ок}/m; \quad f_{ок} = f_k + \alpha_{0k} \langle r \rangle \beta; \quad (23)$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot \text{sign}(\varphi - 90^\circ) \alpha_{0k} \cdot \langle r \rangle \cdot \text{ctg} \frac{\varphi_n}{2}}{m}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha \cdot \text{sign}(\varphi - 90^\circ) \alpha_{0k} \cdot \langle r \rangle \cdot \text{tg} \frac{\varphi_n}{2}}{m}, \quad \gamma = \frac{\langle v_{\text{эс}} \rangle}{\langle r \rangle}. \quad (24)$$

Корни  $P_{1k}$  и  $P_{2k}$  определяются из характеристического уравнения ДУ:

$$P^2 + \frac{K_{c1}}{m} P - \frac{\alpha_{ок}}{m} = 0, \quad (25)$$

где  $k = 1$  или  $2$ .

$$P_{1k, 2k} = -\frac{K_{c1}}{2m} \pm \sqrt{\left[ \frac{K_{c1}}{2m} \right]^2 + \frac{\alpha_{ок}}{m}}, \quad (26)$$

$$P_{1k} P_{2k} = -\frac{\alpha_{ок}}{m}. \quad (27)$$

Постоянные интегрирования  $A_{1k}, A_{2k}$  определяются из начальных условий  $r_m(t_1), v_m(t_1)$  при  $t = t_1$ :

$$r_m(t_1) = A_{1k} + A_{2k}; \quad v_m(t_1) = P_{1k} A_{1k} + P_{2k} A_{2k};$$

$$A_{1k} = \left[ \frac{r_m(t_1) P_{2k} - v_m(t_1)}{P_{2k} - P_{1k}} \right]; \quad A_{2k} = - \left[ \frac{r_m(t_1) P_{1k} - v_m(t_1)}{P_{2k} - P_{1k}} \right]. \quad (28)$$

В (28) начальные условия определяются из (20) и (12) соответственно следующим образом:

$$r_m(t_1) = r(t_1) + \langle r \rangle \sigma(\varphi(t_1)), \quad v_m(t_1) = v(t_1) + \langle v_{\text{эс}} \rangle \cos \varphi. \quad (29)$$

Подставляя в (20) выражения (22) и (18) с учетом (23), (24), (27), имеем:

$$r(t) = \frac{f_{\kappa}}{\alpha_{ок}} + \left[ A_{1\kappa} - \frac{f_{\kappa}}{mP_{1\kappa}(P_{1\kappa} - P_{2\kappa})} \right] e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} + \left[ A_{2\kappa} + \frac{f_{\kappa}}{mP_{2\kappa}(P_{1\kappa} - P_{2\kappa})} \right] e^{P_{2\kappa}(t-t_1)} - \frac{\alpha_{0\kappa} \langle r \rangle \beta}{mP_{1\kappa}(P_{1\kappa} - P_{2\kappa})} \times$$

$$\times \left\{ \left[ e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} - 1 \right] - \frac{P_{1\kappa}}{P_{2\kappa}} \left[ e^{P_{2\kappa}(t-t_1)} - 1 \right] \right\} + \frac{\alpha_{0\kappa} \langle r \rangle \alpha \text{sign}(t-t_0)}{mP_{1\kappa}(P_{1\kappa} - P_{2\kappa})} \left\{ \frac{P_{1\kappa} e^{-\gamma t_1} \text{ctg} \frac{\Phi_H}{2}}{P_{1\kappa} + \gamma} \left[ e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{P_{1\kappa} e^{\gamma t_1} \text{tg} \frac{\Phi_H}{2}}{P_{1\kappa} - \gamma} \left[ e^{\gamma(t-t_1)} - e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} \right] - \frac{P_{1\kappa} e^{-\gamma t_1} \text{ctg} \frac{\Phi_H}{2}}{P_{2\kappa} + \gamma} \left[ e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{P_{2\kappa}(t-t_1)} \right] + \frac{P_{1\kappa} e^{\gamma t_1} \text{tg} \frac{\Phi_H}{2}}{P_{2\kappa} - \gamma} \left[ e^{\gamma(t-t_1)} - e^{P_{2\kappa}(t-t_1)} \right] \right\} -$$

$$-\langle r \rangle \left[ \beta + \alpha \text{sign}(t-t_0) \left( e^{-\gamma t} \text{ctg} \frac{\Phi_H}{2} - e^{\gamma t} \text{tg} \frac{\Phi_H}{2} \right) \right]. \quad (30)$$

Здесь время  $t_0$  определяется по формуле (15) при подстановке  $\varphi(t_0) = 90^\circ$ :

$$t_0 = \frac{\langle r \rangle}{\langle v_{ж} \rangle} \ln \left( \text{ctg} \frac{\Phi_H}{2} \right). \quad (31)$$

Оценка значений  $|P_{2\kappa}|$  и  $P_{1\kappa}$  показывает, что  $|P_{2\kappa}| \gg P_{1\kappa}$ , поэтому (30) упрощается и с учетом (28) принимает рабочий вид:

$$r(t) \approx \frac{f_{\kappa}}{\alpha_{ок}} + \left[ r_m(t_1) - \frac{f_{\kappa}}{\alpha_{ок}} + \frac{v_m(t_1)}{(P_{1\kappa} - P_{2\kappa})} \right] e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} - \langle r \rangle \beta \left[ e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} - 1 \right] + \langle r \rangle \alpha \text{sign}(t-t_0) \times$$

$$\times \left\{ \frac{P_{1\kappa} e^{-\gamma t_1} \text{ctg} \frac{\Phi_H}{2}}{P_{1\kappa} + \gamma} \left[ e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} \right] - \frac{P_{1\kappa} e^{\gamma t_1} \text{tg} \frac{\Phi_H}{2}}{P_{1\kappa} - \gamma} \left[ e^{\gamma(t-t_1)} - e^{P_{1\kappa}(t-t_1)} \right] \right\} -$$

$$-\langle r \rangle \left[ \beta + \alpha \text{sign}(t-t_0) \left( e^{-\gamma t} \text{ctg} \frac{\Phi_H}{2} - e^{\gamma t} \text{tg} \frac{\Phi_H}{2} \right) \right]. \quad (32)$$

Выражение (32) положим в основу анализа траекторий частиц и моделирования зависимости степени очистки от диаметра частиц.

#### 4 АЛГОРИТМ РАСЧЕТА «ГОЛОВНОЙ» ЧАСТИ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕПЕНИ ОЧИСТКИ

Для определения условий попадания частиц на патрон сепаратора рассмотрим характерные траектории феррочастиц в рабочем пространстве магнитного сепаратора, представленные на рисунке 5. В частности, рисунок 5а соответствует случаю, когда распределение магнитного

поля подразделяется условно на область слабого и область сильного поля; рисунок 5б – случаю, когда рабочее пространство располагается полностью в сильном поле.

Все траектории различаются как местом попадания на патрон, так и местом ее пересечения с полярной координатой  $\varphi = 90^\circ$ , которая соответствует моменту времени  $t_0$  (31). Заметим, что пересечение траектории с полярной координатой  $\varphi(t_{01}) = (180^\circ - \varphi_H)$  соответствует моменту

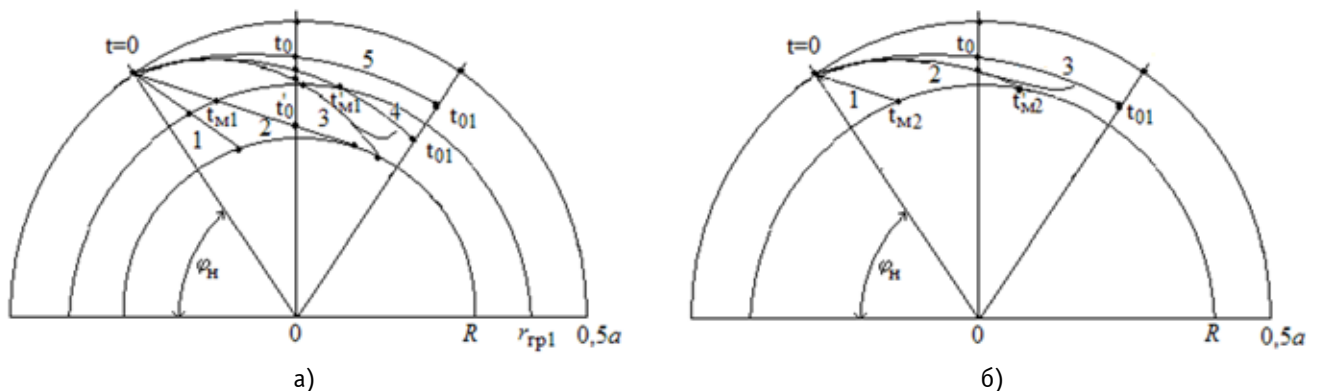


Рис. 5. Совокупность схематичных траекторий феррочастицы в рабочей области сепаратора:

а)  $r_{\text{сп1}} < 0,5a$  – возможны пять характерных траекторий; б)  $r_{\text{сп1}} > 0,5a$  – возможны три характерные траектории

времени  $t_{01} = 2t_0$  согласно формуле (15). Каждая траектория разбивается на несколько участков, а каждый участок может описываться уравнениями (30) или (32) при подстановке в них соответствующих начальных условий.

Для случая, представленного на рисунке 5а, имеет место 5 траекторий.

Траектория 1 состоит из двух участков:

$$\text{№1.1} - t_1 = 0, r_m(t_1) = a/2;$$

$$\text{№1.2} - t_1 = t_{m1}, r_m(t_1) = r_{zpl} - \langle r \rangle \times \left[ \beta - \alpha \left( e^{-\gamma t} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} - e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right) \right].$$

Здесь  $t_{m1}$  – интервал времени прохождения области слабого поля.

Траектория 2 состоит из трех участков:

$$\text{№2.1} - t_1 = 0, r_m(t_1) = a/2;$$

$$\text{№2.2} - t_1 = t_{m1}, r_m(t_1) = r_{zpl} - \langle r \rangle \times \left[ \beta - \alpha \left( e^{-\gamma t} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} - e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right) \right];$$

$$\text{№2.3} - t_1 = 0, r_m(t_1) = r(t_0 - t_{m1}) - \langle r \rangle \beta.$$

Траектория 3 состоит из трех участков:

$$\text{№3.1} - t_1 = 0, r_m(t_1) = a/2;$$

$$\text{№3.2} - t_1 = t_0, r_m(t_1) = r(t_0) - \langle r \rangle \beta;$$

$$\text{№3.3} - t_1 = t_{m1}, t_{m1} = t_0 + (t_{m1} - t_0);$$

$$r_m(t_1) = r_{zpl} - \langle r \rangle \left[ \beta + \alpha \left( e^{-\gamma t} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_H}{2} - e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right) \right].$$

Траектория 4 по структуре участков аналогична траектории 3, только она в области сильного поля переходит из зоны ускорения в зону торможения.

Траектория 5 состоит из двух участков:

$$\text{№5.1} - t_1 = 0, r_m(t_1) = a/2;$$

$$\text{№5.2} - t_1 = t_0, r_m(t_1) = r(t_0) - \langle r \rangle \beta,$$

и она в области слабого поля переходит из зоны ускорения в зону торможения.

Для случая, представленного на рисунке 5б, имеет место 3 траектории.

Траектория 1 состоит из одного участка:

$$t_1 = 0, r_m(t_1) = a/2.$$

Траектория 2 состоит из двух участков:

$$\text{№2.1} - t_1 = 0, r_m(t_1) = a/2;$$

$$\text{№2.2} - t_1 = 0, r_m(t_1) = r(t_0) - \langle r \rangle \beta.$$

Траектория 3 по структуре участков аналогична траектории 2, только она переходит из зоны ускорения в зону торможения. На рисунке 3б  $t_{m2}$  – интервал времени прохождения области сильного поля.

Из анализа совокупности траекторий следует, что частица может попадать на патрон в трех зонах рабочего пространства:  $\varphi_H \leq \varphi \leq 90^\circ$ ;  $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_H$ ;  $\varphi \geq 180^\circ - \varphi_H$ . В каждой зоне физика воздействия ламинарного потока на радиальное перемещение частицы специфична. Так, в первой и во второй динамическая составляющая ускоряющая, а в третьей – тормозящая. Однако кинематическая составляющая согласно формулам (19) и (18) в первой зоне способствует приближению частицы к патрону, а во второй и третьей зонах способствует удалению от патрона. Эта специфика в уравнениях (30) и (32) учитывается обобщенной функцией  $\operatorname{sign}(t - t_0)$ :  $\operatorname{sign}(t - t_0) = -1$ , при  $t < t_0$ ;  $\operatorname{sign}(t - t_0) = 1$ , при  $t > t_0$ .

Универсальным критерием попадания феррочастицы на патрон является выполнение следующего условия:  $r(t_m) = R$ , которое требует вычисления момента времени  $t_m$  достижения частицей поверхности патрона. Для траектории 1 критерий попадания феррочастицы упрощается и становится конкретным  $r(t_0) \leq R$ .

Изложенные принципы отбора траекторий феррочастиц применены в разработанной программе расчета характеристик степени очистки сепаратора. Программа позволяет рассчитывать несколько типов семейств зависимости  $\varepsilon(d)$ . Результаты расчета иллюстрируются на рисунках 6 и 7.

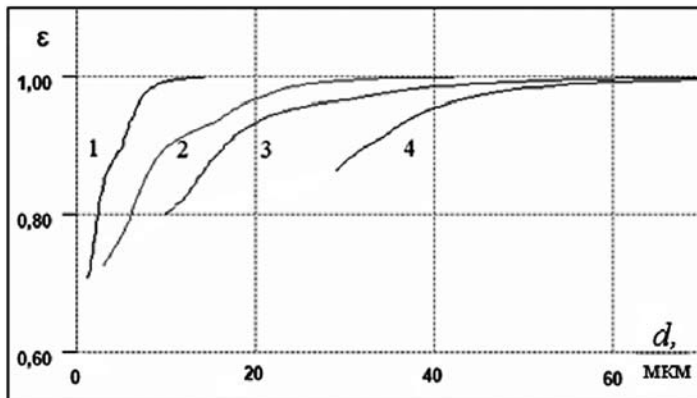


Рис. 6. Семейство «головной» части зависимостей степени очистки от диаметра частиц для разных значений толщин слоя осадка шлама при  $a = 48$  мм;  $v_{жсн} = 0,03$  м/с;  $\eta = 0,0012$  Н/м;  $C_u = 0,5$  г/л;  $R_0 = 16$  мм: 1. –  $d_{uu} = 0$ ; 2. –  $d_{uu} = 1$  мм; 3. –  $d_{uu} = 2$  мм; 4. –  $d_{uu} = 3,3$  мм

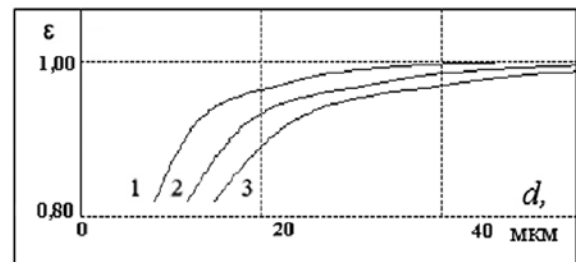


Рис. 7. Семейство «головной» части зависимостей степени очистки от скорости подачи ВТЖ при  $d_{uu} = 2$  мм; при  $a = 48$  мм;  $\eta = 0,0012$  Н/м;  $C_u = 0,5$  г/л;  $R_0 = 16$  мм: 1. –  $v_{жс} = 0,01$  м/с; 2. –  $v_{жс} = 0,03$  м/с; 3. –  $v_{жс} = 0,06$  м/с



## 5 АППРОКСИМАЦИЯ ВЫЧИСЛЕННОГО СЕМЕЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИК СТЕПЕНИ ОЧИСТКИ

Для решения задачи проектирования и оптимизации устройств системы управления степенью очистки ВТЖ проведем аппроксимацию вычисленного по разработанной математической модели семейства зависимостей  $\varepsilon(d_{\phi}, d_{ш}, v_{ж})$ .

### 5.1 Исходные данные

$C_u = 0,5$  г/л – концентрация механической примеси в исходной ВТЖ;  $v_{жн} = 0,03$  м/с – начальное значение скорости жидкости (на входе каскада);  $\eta = 0,0012$  Н/м – коэффициент вязкости ВТЖ;  $a = 48$  мм – расстояние между осями противоположно расположенных магнитов,  $R = (R_0 + d_{ш})$  – радиус патрона с налипшим слоем осадка шлама,  $R_0 = 16$  мм – радиус патрона без слоя шлама,  $d_{ш}$  – толщина слоя осадка шлама на патроне;  $d_{\phi}$  – диаметр феррочастицы, в частности, из материала Сталь 45. Характеристика степени очистки  $\varepsilon = \varepsilon(d_{\phi}, d_{ш})$ , которая представляет собой зависимость от диаметра частиц  $d_{\phi}$  и толщины слоя осадка шлама  $d_{ш}$ . Параметры стационарного гранулометрического распределения следующие:  $\bar{d} = 25$  мкм – среднearифметическое значение диаметра феррочастиц;  $\sigma = 8$  мкм – среднеквадратичное отклонение диаметра феррочастиц.

Для расчета используем семейство характеристик  $\varepsilon = \varepsilon(d_{\phi})$  на рисунках 6 и 7.

### 5.2 Аппроксимация «головной» части семейства характеристик степени очистки

Основной вклад в формирование толщины осадка шлама на патроне выполняют более тяжелые феррочастицы, накопление которых соответствуют «головной» части характеристик степени очистки, представленных графиком на рисунках 6 и 7. Поэтому для выполнения расчетов представленное семейство в первом приближении аппроксимируем экспоненциальной функцией от трех переменных [8]:

$$\varepsilon(d_{\phi}, d_{ш}, v_{ж}) = 1 - e^{-h(d_{ш})d_{\phi}},$$

$$h(d_{ш}, v_{ж}) = A_0 + A_1 d_{ш} + A_2 d_{ш}^2 + A_3 d_{ш}^3,$$

где  $A_0 = A_0(v_{ж}) = 150v_{ж}^2 - 17v_{ж} + 0,8$ ;  $A_1 = -0,3438$ ;  $A_2 = 0,12785$ ;  $A_3 = -0,01805$ .

На рисунке 8 иллюстрируется результат аппроксимации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проведен анализ причин и условий магнитогиродинамического движения частицы в патронном магнитном сепараторе. Исходя из цилиндрически симметричной картины распределения магнитных сил, обоснованы приближенные процедуры интегрирования системы нелинейных ДУ. При этом влияние течения жидкой среды

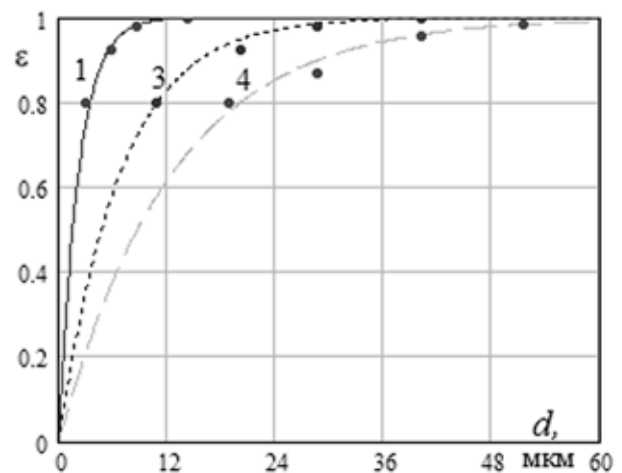


Рис. 8. Аппроксимационные зависимости степени очистки от диаметра феррочастиц для разных значений толщин слоя осадка шлама при  $v_{ж} = 0,03$  м/с:

1.  $d_{ш} = 0$ ; 3.  $d_{ш} = 2$  мм; 4.  $d_{ш} = 3,3$  мм

смоделировано эквивалентной добавочной силой, являющейся функцией времени. Таким образом, нелинейная задача сведена к линейной задаче. В частности, исходная система нелинейных ДУ приведена к неоднородному обыкновенному ДУ второго порядка с эквивалентной правой частью, зависящей от времени. Частное решение последнего позволяет описать траекторию перемещения частицы в рабочем объеме сепаратора.

2. Раскрыт характер изменения эквивалентной добавочной силы. Выявлены две характерные области силового взаимодействия феррочастицы с полем магнита в потоке жидкой среды. Первая область с полярной координатой  $\varphi_n \leq \varphi \leq 180^\circ - \varphi_n$ , в которой эквивалентная добавочная сила способствует ускорению движения частицы к магнитам. Вторая область с полярной координатой  $\varphi \geq 180^\circ - \varphi_n$ , в которой эта сила противодействует процессу попадания частицы на патрон сепаратора.

3. Построена математическая модель расчета основной характеристики магнитного сепаратора – степени очистки  $\varepsilon(d_{\phi}, d_{ш}, v_{ж})$ , которая впервые позволила отображать в этой характеристике влияние технологического фактора – толщины слоя шлама, осаждаемого на патроны магнитов. Данная математическая модель реализована программой к ПК. Она позволяет вычислять и отображать в графической форме несколько семейств зависимостей  $\varepsilon(d_{\phi}, d_{ш}, v_{ж})$ .

4. Совмещение в предложенной математической модели фактора накопления слоя шлама на магнитах со скоростью подачи водного потока технологической жидкости позволяет построить целевую функцию управления качеством сепарации. Определенная целевая функция, выражающая зависимость средней массовой концентрации примеси в ВТЖ  $C_{oc} = (1 - \bar{\varepsilon}(\bar{d}, v_{ж})) C_u$  на выходе магнитного сепаратора от скорости водного потока  $v_{ж}$ , позволяет решать задачи проектирования и оптимизации устройств системы управления степенью очистки ВТЖ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булыжев Е.М., Худобин Л.В. Ресурсосберегающее применение смазочно-охлаждающих жидкостей при металлообработке. – М. : Машиностроение, 2004. – 352 с.
2. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н. Математическое моделирование поля постоянного магнита // Электричество. – 2010. – № 9. – С. 65–69.
3. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н. Моделирование эквивалентных схем постоянного магнита для оптимизации магнитного сепаратора // Электричество. – 2010. – № 10. – С. 68–73.
4. Исследование распределения поля магнитных сил патронного магнитного сепаратора при очистке СОЖ / Е.М. Булыжев [и др.] // Справочник. Инженерный журнал. – 2011. – № 9. – С. 45–50.
5. Куневич А.В., Подольский А.В., Сидоров И.Н. Ферриты: Энциклопедический справочник. В 5 т. Т.1. Магниты и магнитные системы. – СПб. : Лик, 2004. – 358 с.
6. Богданов А.Ю., Краснова М.Е. Гранулометрический состав абразивного шлама, образующегося при правке шлифовальных кругов // Справочник. Инженерный журнал. – 2008. – № 10. – С. 50–53.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1973. – 831 с.
8. Шевалдина Е.В. Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 391–402.

## REFERENCES

1. Bulyzhev E.M., Khudobin L.V. *Resursosberegayushcheye primeneniye smazochno-okhlazhdayushchikh zhidkostey pri metalloobrabotke* [Resource Conservation of Metalworking fluids]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 2004. 352p.

2. Bulyzhev E.M., Menshov E.N. *Matematicheskoye modelirovaniye polya postoyannogo magnita* [Mathematical Modeling of a Permanent Magnet Field]. *Elektrichestvo* [Electricity], 2010, no. 9, pp. 65–69.

3. Bulyzhev E.M., Menshov E.N. *Modelirovaniye ekvivalentnykh skhem postoyannogo magnita dlya optimizatsii magnitnogo separatora* [Permanent-Magnet Electric Circuits Simulation for Magnetic Separator Optimization]. *Elektrichestvo* [Electricity], 2010, no. 10, pp. 68–73.

4. Bulyzhev E.M., Menshov E.N., Menshov A.E., Dzhavakhiya G.A., Tereshenok E.P. *Issledovaniye raspredeleniya polya magnitnykh sil patronnogo magnitnogo separatora pri ochistke SOZh* [Study of Magnetic Field Distribution of Chucks Magnetic Separator when Cleaning the Coolant]. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2011, no. 9, pp. 45–50.

5. Kunevich A.V., Podolskiy A.V., Sidorov I.N. *Ferrity: Entsiklopedicheskiy spravochnik. V 5 tomakh. T.1 Magnity i magnitnyye sistemy* [Ferrites: Encyclopedic Handbook in 5 Volumes. Vol. 1. Magnets and Magnet Systems], Sankt-Peterburg, Lik Publ., 2004. 358 p.

6. Bogdanov A.Yu., Krasnova M.E. *Granulometricheskyy sostav abrazivnogo shlama, obrazuyushchegosya pri pravke shlifovalnykh krugov* [Granulometrie Composition of Abrasive Slurry Formed while Grinding Wheels' Dressing]. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2008, no. 10, pp. 50–53.

7. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 831 p.

8. Shevaldina E.V. *Approksimatsiya lokalnymi eksponentsialnymi splaynami s proizvolnymi uzlamy* [Approximation by Local Exponential Splines with Free Knots]. *Sib. zhurn. vychisl. matematiki RAN* [Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki Journal of The Russian Academy of Science], 2006, vol. 9, no. 4, pp. 391–402.