

УДК 531.39; 531.64

С.А. Кашкиров, В.К. Манжосов

## ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНА (ЛОКОМОТИВА), УПРУГОГО СТЕРЖНЯ И ТРАНСПОРТИРУЕМОГО ОБЪЕКТА<sup>1</sup>

**Кашкиров Сергей Анатольевич**, аспирант, окончил Димитровградский институт технологии, управления и дизайна Ульяновского государственного технического университета, заместитель начальника конструкторского отдела ООО НПФ «Сосны». Имеет статьи в области анализа механизмов переменной структуры. [e-mail: ksa.sosny@gmail.com].

**Манжосов Владимир Кузьмич**, доктор технических наук, профессор, окончил машиностроительный факультет Фрунзенского политехнического института, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» УлГТУ. Имеет статьи, монографии, изобретения в области динамики машин, моделирования процессов удара. [e-mail: v.manjosov@ulstu.ru].

### Аннотация

Построена волновая модель движения стержня, жестко соединенного с ведущим звеном (локомотивом) и тянущего ведомое звено. Движение ведущего звена кинематически задано. Движение поперечных сечений стержня описано волновым уравнением. Решение волнового уравнения строится с использованием метода бегущих волн. Функции прямых и обратных волн на различных интервалах движения определяются из условий их формирования в сечениях стержня, сопряженных с ведущим звеном и транспортируемым объектом.

Характеристики формируемых прямых и обратных волн являются линейными функциями. Их изображение в координатной плоскости  $t-x$  позволяет построить поле волновых состояний механической системы. Применяя метод вертикальных сечений для поля волновых состояний, можно оценить характер и длительность волнового состояния, которое испытывает произвольное сечение стержня на любом интервале движения.

Вычислительная схема решения уравнений движения базируется на представлении стержня в виде множества последовательно сопряженных участков, на схеме формирования прямой волны в сечении  $x=0$ , на схеме формирования прямой и обратной волн на границах сопряженных участков, на схеме формирования обратной волны на границе «торец стержня – ведущее звено (локомотив)», на свойстве функций прямых и обратных волн сохранять свои параметры при распространении по однородному участку со скоростью звука.

Волновая модель движения стержня позволяет учесть его распределенную массу и рассмотреть волновые процессы, определяющие характер перемещения транспортируемого объекта, деформирование стержня, а также определить момент появления неудерживающей связи.

Ключевые слова: стержень, волновое уравнение, метод бегущих волн, волна деформации, скорость поперечных сечений стержня, продольная деформация в поперечных сечениях стержня, поле волновых состояний, вычислительная схема.

## THE WAVE MODEL OF HAULING MEMBER (LOCOMOTIVE), ELASTIC ROD, AND TRANSPORTED OBJECT MOTION

**Sergei Anatolevich Kashkirov**, Post-graduate Student; graduated from the Dimitrovgrad Institute of Technology, Management, and Design at Ulyanovsk State Technical University; Deputy Head of the Design Engineering Department of Sosny R&D Company; an author of articles in the field of analysis of alternating structure mechanisms. e-mail: ksa.sosny@gmail.com.

**Vladimir Kuzmich Manzhosov**, Doctor of Engineering, Professor; graduated from the Machine-Building Faculty of Frunze Polytechnic Institute; Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles, monographs, and inventions in the field of dynamics of machines, modeling of shock processes. e-mail: v.manjosov@ulstu.ru.

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России.

## Abstract

A wave model was developed to simulate motion of the rod rigidly connected to a driving member (locomotive) and towing a driven member. The motion of the driving member is set cinematically. The motion of the rod cross-sections is described by a wave equation. The equation is solved by the traveling wave method. The functions of forward and backward waves on different motion intervals are determined from the conditions of their development in the rod cross-sections interfacing the driving member and the transported object.

Characteristics of the forward and backward waves are linear functions. Their view in the coordinate plane allows preparation of the field of wave states for the mechanical system. The nature and time of the wave state experienced by a random cross-section of the rod on any motion interval can be assessed by the vertical slice method for the field of wave states.

The computing scheme for solving motion equations is based on representation of the rod as a multitude of successively connected sections, as well as on the pattern of the forward wave development in the cross-section  $x = 0$ , the pattern of the forward and backward wave development on the "rod end – driving member (locomotive)" boundary, and the properties of the forward and backward wave functions to maintain their parameters during propagation throughout a homogeneous section at the velocity of sound.

The wave model of the rod motion allows taking into account the rod distributed mass, analyzing the wave processes that determine the nature of the motion of the transported object, and determining the unilateral constraint point.

Key words: rod, wave equation, traveling wave method, strain wave, rod cross-section rate, longitudinal strain in rod cross-sections, field of wave states, computing scheme.

## ВВЕДЕНИЕ

Динамика механической системы, состоящей из ведущего звена (локомотива), упругого стержня (или троса) и ведомого звена (перемещаемого объекта), представляет интерес для различных прикладных задач (буксировка объекта в безгравитационном пространстве [1, 2], транспортировка груза в подъемных установках [3, 4], канатные системы спасения [5], буксировка подводных объектов [6] и другие).

В наиболее простых постановках задачи стержень (трос, канат) рассматривается либо как абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить, либо как упругий элемент, не имеющий массы. Если стержень работает только на растяжение, то необходимо учитывать неударивающую связь между активным и пассивным звеньями.

В представленной работе рассматривается механическая система, когда передача движения от активного звена (локомотива) к транспортируемому объекту передается через упругий стержень. Волновая модель движения стержня позволяет учесть его распределенную массу и рассмотреть волновые процессы, определяющие характер перемещения транспортируемого объекта, деформирования стержня.

Волновая модель движения упругого стержня и жесткого тела рассматривается в работах, связанных с задачами продольного удара [7–9], свободными и вынужденными колебаниями стержней [3, 10].

Решения волнового уравнения при анализе свободных и вынужденных колебаний стержней предлагаются, как правило, в виде бесконечного тригонометрического ряда, для которого существует проблема оценки сходимости ряда, построения дополнительных вычислительных процедур, связанных с определением множества корней частотного уравнения, итерационными процедурами усечения ряда. Точные решения такой задачи для произвольного заданного интервала времени отсутствуют.

В известных работах практически не рассматриваются модели, связанные с учетом неударивающей связи между стержнем и жестким телом, определением момента разрыва связи и состояния системы в момент разрыва.

Одно из возможных направлений в решении таких задач может быть связано с моделированием волновых процессов при взаимодействии упруго сжатого стержня с жестким телом, анализом напряженно-деформированного состояния стержня при этом движении. Цель данной работы заключается в построении волновой модели взаимодействия упругого стержня с жестким телом при неударивающей связи между ними и вычислительной схемы расчета волновых процессов.

## ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Механическая система представляет собой ведущее звено 1 (рис. 1), упругий стержень 2, жестко соединенный одним концом с ведущим звеном (локомотивом) и цепляющийся другим концом ведомое звено 3 (транспор-

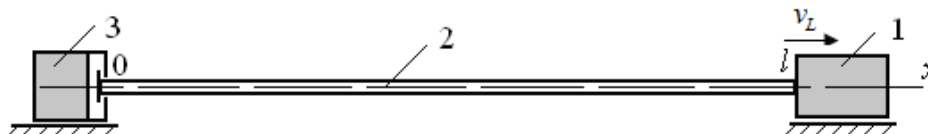


Рис. 1. Схема механической системы: 1 – ведущее звено (локомотив), 2 – стержень, 3 – ведомое звено (транспортируемый объект)

тируемый объект). Ведущее звено 1 перемещается в направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $v_L$ .

В момент времени  $t = 0$  стержень 2, все сечения которого имеют скорость  $v_L$ , цепляет ведомое звено 3, имеющее массу  $M$ . Ведомое звено 3 до момента сцепления находится в состоянии покоя и его скорость равна нулю.

Движение поперечных сечений стержня опишем волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ ,  $u(x,t)$  – скорость и продольное перемещение поперечного сечения;

$t$  – время;

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  – продольная деформация в сечении, положение которого определяется координатой  $x$ ;

$a$  – скорость распространения продольной волны деформации в стержне.

Начальные условия определяют состояние стержня при  $t = t_0 = 0$ . Полагаем, что сечения стержня, положение которых определяется неравенством  $0 < x \leq l$ , в начальный момент времени имеют скорость  $v_L$ , деформации в поперечных сечениях стержня в начальный момент отсутствуют. Скорость сечения стержня  $x = 0$  при сцеплении с неподвижным звеном 3 в начальный момент времени становится равной нулю. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_L, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \leq l; \\ \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия определяют связь стержня 2 в сечении  $x = l$  с ведущим звеном 1 и сцепление при  $t \geq 0$  с ведомым звеном 3:

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = v_L, \quad M \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $M$  – масса ведомого звена 3,

$E$  – модуль упругости материала стержня,

$A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Решение уравнения (1) по методу бегущих волн представим в виде [7]:

$$\begin{aligned} u(x,t) = f(at-x) + \varphi(at+x), \\ 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f(at-x)$  – функция, описывающая параметры прямой волны, распространяющейся в направлении оси  $x$ ;

$\varphi(at+x)$  – функция, описывающая параметры обратной волны, распространяющейся в направлении, противоположном оси  $x$ .

Скорость и ускорение поперечного сечения стержня определяются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = af'(at-x) + a\varphi'(at+x), \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 f''(at-x) + a^2 \varphi''(at+x). \end{aligned} \quad (5)$$

Деформация в поперечных сечениях стержня равна

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -f'(at-x) + \varphi'(at+x). \quad (6)$$

Из начального условия  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0$  следует, что

$$\begin{aligned} -f'(at_0-x) + \varphi'(at_0+x) = 0, \\ f'(at_0-x) = \varphi'(at_0+x). \end{aligned} \quad (7)$$

Из начального условия  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_L$  следует,

что  $af'(at_0-x) + a\varphi'(at_0+x) = v_L$ . Учитывая (7), получим

$$\begin{aligned} 2a\varphi'(at_0+x) = v_L, \quad \varphi'(at_0+x) = v_L / 2a, \\ f'(at_0-x) = v_L / 2a. \end{aligned} \quad (8)$$

Из граничного условия (3)  $\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = v_L$ ,

$$\begin{aligned} af'(at-l) + a\varphi'(at+l) = v_L \quad \text{следует, что} \\ \varphi'(at+l) = v_L / a - f'(at-l). \end{aligned} \quad (9)$$

Равенство (9) определяет параметры формируемой в сечении  $x = l$  обратной волны  $\varphi'(at+l)$ , зависящих от скорости  $v_L$  ведущего звена и параметров проходящей к сечению  $x = l$  прямой волны  $f'(at-l)$ .

Второе граничное условие (3) определяет движение ведомого звена 3 и связанного с этим движением процесс формирования прямой волны в сечении  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \\ Ma^2 [f''(at-0) + \varphi''(at+0)] = \\ = EA [-f'(at-0) + \varphi'(at+0)]. \end{aligned}$$

Преобразуем его к виду:

$$\begin{aligned} f''(at-0) + \frac{EA}{Ma^2} f'(at-0) = \\ = -\varphi''(at+0) + \frac{EA}{Ma^2} \varphi'(at+0). \end{aligned} \quad (10)$$

Параметры формируемой в сечении  $x = 0$  прямой волны  $f'(at-0)$  могут быть определены из решения диффе-

ренциального уравнения (10), если будут известны параметры падающей на сечение  $x = 0$  обратной волны.

Так как  $f'(at - x) = f'[a(t - x/a) - 0]$ , то прямая волна, формируемая в сечении  $x = 0$ , достигнет без искажения сечения  $x$  с запаздыванием по времени на величину  $x/a$ . Соответственно, сечения  $x = l$  эта волна достигнет через время  $l/a$ .

Так как  $\varphi'(at + x) = \varphi'[a(t - (l - x)/a) + l]$ , то обратная волна, сформированная в сечении  $x = l$ , достигнет сечения  $x$  с запаздыванием по времени на величину  $(l - x)/a$ . Соответственно, сечения  $x = 0$  эта волна достигнет через время  $l/a$ .

Учитывая изложенное, запишем равенство (9) в виде:

$$\varphi'(at + l) = v_L / a - f'[a(t - l/a) - 0], \quad (11)$$

а для падающей на сечение  $x = 0$  обратной волны:

$$\varphi'(at + 0) = v_L / a - f'[a(t - 2l/a) - 0], \quad (12)$$

$$\varphi''(at + 0) = -f''[a(t - 2l/a) - 0]. \quad (13)$$

Структура дифференциального уравнения (10) соответствует описанию процессов формирования прямых или обратных волн, изложенному в [11]. Схема решения дифференциального уравнения (10) строится следующим образом. Используя начальные условия, находим из (8), что функции

$$\varphi'(at_0 + x) = v_L / 2a, \quad \varphi''(at_0 + 0) = 0.$$

Подставляя эти значения в правую часть уравнения (10), найдем функции  $f'(at - 0)$  и  $f''(at - 0)$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$ , которые позволяют определить из (12) и (13) значения  $\varphi'(at + 0)$  и  $\varphi''(at + 0)$  на следующем интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$ .

Новые значения функций  $\varphi'(at + 0)$  и  $\varphi''(at + 0)$  вновь подставим в правую часть уравнения (10) и найдем функции  $f'(at - 0)$  и  $f''(at - 0)$  на интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$ . Далее при необходимости процесс расчета повторяется на интервалах  $4l/a \leq t \leq 6l/a$ ,  $6l/a \leq t \leq 8l/a$  и т. д.

Приведем решения уравнения (10), полученные нами на интервалах  $0 \leq t \leq 2l/a$  и  $2l/a \leq t \leq 4l/a$ :

$$f'(at - 0) = v_L / a (0,5 - \exp(-\tilde{m}\tilde{t})),$$

$$\tilde{m} = \rho Al / M, \quad \tilde{t} = t / T, \quad T = l / a, \quad 0 \leq \tilde{t} \leq 2;$$

$$\tilde{f}'(at - 0) = af'(at - 0) / v_L = 0,5 - \exp(-\tilde{m}\tilde{t}),$$

$$0 \leq \tilde{t} \leq 2;$$

$$\tilde{\varphi}'(at + 0) = a\varphi'(at + 0) / v_L = 0,5; \quad 0 \leq \tilde{t} \leq 2;$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = af'(at - 0) + a\varphi'(at + 0);$$

$$\tilde{v}(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} / v_L = 1 - \exp(-\tilde{m}\tilde{t}),$$

$$0 \leq \tilde{t} \leq 2;$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -f'(at - 0) + \varphi'(at + 0);$$

$$\tilde{\varepsilon}(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} / \frac{v_L}{a} = \exp(-\tilde{m}\tilde{t}), \quad 0 \leq \tilde{t} \leq 2;$$

$$f'(at - 0) = \tilde{v} / 2 - \tilde{v} \exp(-\tilde{m}\tilde{t}) + \tilde{v} [2\tilde{m}(\tilde{t} - 2) - 1] \exp(-\tilde{m}(\tilde{t} - 2)),$$

$$\tilde{v} = v_L / a, \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4;$$

$$\tilde{\varphi}'(at + 0) = a\varphi'(at + 0) / v_L = 0,5 + \exp(-\tilde{m}(\tilde{t} - 2)), \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4;$$

$$\tilde{v}(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} / v_L = 1 + 2\tilde{m}(\tilde{t} - 2) \exp(-\tilde{m}(\tilde{t} - 2)) - \exp(-\tilde{m}\tilde{t}), \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4;$$

$$\tilde{\varepsilon}(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} / \frac{v_L}{a} = \exp(-\tilde{m}\tilde{t}) + 2[1 - \tilde{m}(\tilde{t} - 2)] \exp(-\tilde{m}(\tilde{t} - 2)), \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4;$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня.

Аналитическое решение рассматриваемой задачи может быть громоздким на интервалах движения  $6l/a \leq t \leq 8l/a$ ,  $8l/a \leq t \leq 10l/a$  и т. д. В этой связи представляется важным разработка вычислительной схемы расчета волнового процесса на основе численных методов. Аналитические решения задачи на интервалах  $0 \leq t \leq \frac{2l}{a}$ ,  $\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$ , ... могут быть использованы для тестовых оценок.

### ВОЛНОВЫЕ СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим построение поля волновых состояний при взаимодействии стержня 2 с ведущим звеном 1 (локомотивом) и транспортируемым объектом 3 (рис. 2).

Прямые волны в стержне 2 формируются в сечении  $x = 0$  и распространяются по характеристикам  $at - x = -l$ ,  $at - x = 0$ ,  $at - x = l$ ,  $at - x = 2l$ ,  $at - x = 3l$ , и так далее (рис. 2). Характеристики представляют собой аргументы функций прямых волн и в системе координат  $t - x$  могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом  $1/a$ .

Обратные волны в стержне 2 формируются в сечении  $x = l$  и распространяются по стержню по характеристикам

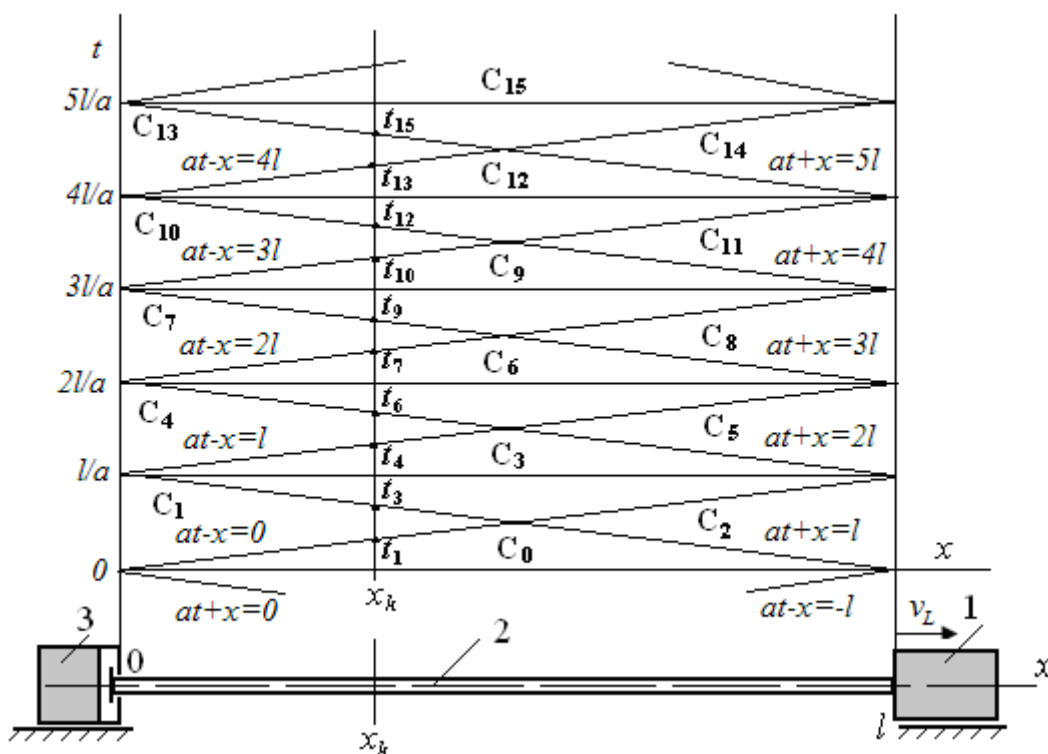


Рис. 2. Схема движения механической системы и поле волновых состояний

$at+x=0, at+x=l, at+x=2l, at+x=3l, at+x=4l$  и так далее. Характеристики представляют собой аргументы функций обратных волн и в системе координат  $t-x$  могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом  $(-1/a)$ .

Характеристики прямых и обратных волн разбивают координатную плоскость  $t-x$  на области волновых состояний  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{11}, C_{12}, \dots$ . Область  $C_0$  охвачена начальными прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=-l$  и  $at+x=0$ . Область  $C_1$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=0$  и  $at+x=0$ . Область  $C_2$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=-l$  и  $at+x=l$ . Область  $C_3$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=0$  и  $at+x=l$ . Область  $C_4$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=l$  и  $at+x=l$ , и так далее.

Если в стержне выделить некоторое произвольное сечение  $0 < x_k < l/2$  (рис. 2), то на поле волновых состояний можно определить временные интервалы, для которых данное сечение испытывает действие прямых и обратных волн с теми или иными характеристиками.

Так  $t_1$  – время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_0$  и начинается волновое состояние  $C_1$ . Из характеристики  $at-x=0$  (рис. 2) при  $x=x_k$  следует, что  $t_1=x_k/a$ . Длительность волнового состояния  $C_0$  для сечения  $x_k$  равно  $\Delta t_0=t_1-t_0=x_k/a$ .

Аналогично,  $t_3$  – время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_1$  и начинается волновое состояние  $C_3$ . Из характеристики  $at+x=l$  (рис. 2) при  $x=x_k$  следует, что  $t_3=(l-x_k)/a$ . Длительность волнового состояния  $C_1$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_1=t_3-t_1=(l-2x_k)/a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_3$  и начинается волновое состояние  $C_4$ , равно  $t_4$ . Из характеристики  $at-x=l$  (рис. 2) при  $x=x_k$  следует, что  $t_4=(l+x_k)/a$ . Длительность волнового состояния  $C_3$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_3=t_4-t_3=2x_k/a$ .

Аналогично могут быть определены длительность волновых состояний  $C_4, C_6, C_7$  и т. д.

**ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ**

Из граничного условия (3) с учетом (9) следует, что на любом интервале движения для сечения  $x=l$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = v_L, \quad af'(at-l) + a\phi'(at+l) = v_L,$$

$$\phi'(at+l) = v_L/a - f'(at-l). \tag{14}$$

Равенство (14) определяет параметры формируемой в сечении  $x=l$  обратной волны  $\phi'(at+l)$ , зависящих от скорости  $v_L$  ведущего звена и параметров проходящей к сечению  $x=l$  прямой волны  $f'(at-l)$ .

Из граничного условия (3) в виде  $M \frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = EA \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$  с учетом (6) следует, что

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = \frac{EA}{M} [-f'(at-0) + \varphi'(at+0)],$$

откуда на интервалах  $(i-1)2l/a \leq t \leq i2l/a$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

$$v(0,t) = v(0,t_{0i}) + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{M} [-f'(at-0) + \varphi'(at+0)] dt, \quad (15)$$

где  $v(0, t_{0i})$  – скорость сечения  $x=0$  в начале  $i$ -го интервала движения;

$t_{0i} = (i-1)2l/a$  – начальное время  $i$ -го интервала движения.

Учитывая, что  $v(0, t) = a[f'(at-0) + \varphi'(at+0)]$ , находим из (15):

$$f'(at-0) = v(0,t_{0i})/a + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'(at-0) + \varphi'(at+0)] dt - \varphi'(at+0). \quad (16)$$

Изложим процедуру численного расчета процесса движения механической системы. Схема движения приведена на рисунке 3. Стержень разбит на  $n$  последовательно сопряженных участков, границами которых являются сечения  $0, 1, 2, \dots, n-1, n$ . Длина участка  $\Delta l = l/n$ .

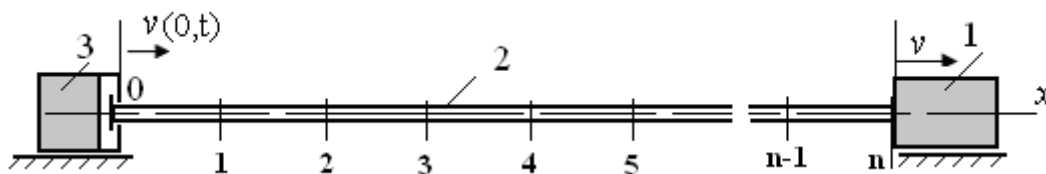


Рис. 3. Схема движения с  $n$ -м количеством последовательно сопряженных участков стержня

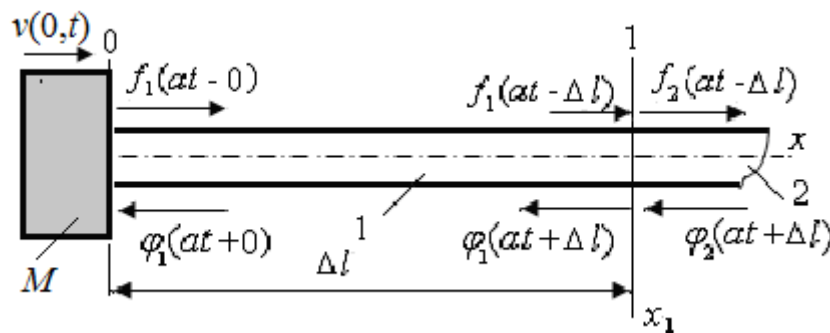


Рис. 4. Схема формирования прямой волны на границе  $x=0$

Рассмотрим особенности преобразования волн на границах участков. Выделим наиболее характерные границы – граничное сечение  $x=0$  для 1-го участка, произвольное граничное сечение  $j$ -го участка и граничное сечение  $x=ln$ -го участка.

В сечении  $x=0$  первого участка (рис. 4) падающей волной является обратная волна  $\varphi_1(at+0)$ , а формируемой в этом сечении волной – прямая волна  $f_1(at-0)$ .

Считаем, что параметры падающей волны известны. В начальный момент времени параметры падающей волны для любого сечения могут быть определены из начальных условий и соответствующих равенств (8). А последующие значения обратной волны  $\varphi_1(at+0)$  через шаг вычисления  $\Delta t$  могут быть определены из условия, что

$$\varphi_1(at+0) = \varphi_1[a(t-\Delta t) + \Delta l], \quad \Delta l = a \cdot \Delta t,$$

то есть для определения  $\varphi_1(at+0)$  используется значение  $\varphi_1[a(t-\Delta t) + \Delta l]$ , вычисленное в сечении  $x_1 = \Delta l$  на предыдущем шаге.

Схема формирования прямых и обратных волн в произвольном  $j$ -м сечении стержня описана в [11]. В сечении  $j$  сопряжены  $j$ -й и  $(j+1)$ -й участки стержня (в общем случае это могут быть разнородные участки). Падающими на сечение  $j$  волнами являются прямая волна  $f'_j(a_j t - x_j)$  со стороны  $j$ -го участка и обратная волна  $\varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j)$  со стороны  $(j+1)$ -го участка. Формируемые в сечении  $j$  прямая волна  $f'_{j+1}(a_{j+1} t - x_j)$   $(j+1)$ -го участка и обратная волна  $\varphi'_j(a_j t + x_j)$   $j$ -го участка определяются как:

$$f'_{j+1}(a_{j+1}t - x_j) = Q(j, j+1)f'_j(a_jt - x_j) + R(j+1, j)\phi'_{j+1}(a_{j+1}t + x_j),$$

$$\phi'_j(a_jt + x_j) = R(j, j+1)f'_j(a_jt - x_j) + Q(j+1, j)\phi'_{j+1}(a_{j+1}t + x_j), \quad (17)$$

где  $Q(j, j+1) = \frac{2r_j}{1+r_j} \frac{a_j}{a_{j+1}}$  и

$$Q(j+1, j) = \frac{2}{1+r_j} \frac{a_{j+1}}{a_j} - \text{коэффициенты про-}$$

хождения прямой волны из  $j$ -го в  $(j+1)$ -й участок и обратной волны из  $(j+1)$ -го участка в  $j$ -й участок;

$$r_j = \frac{E_j A_j}{E_{j+1} A_{j+1}} \frac{a_{j+1}}{a_j} - \text{отношение волновых сопротив-}$$

лений сопряженных участков;

$$R(j+1, j) = \frac{1-r_j}{1+r_j} - \text{коэффициент отражения об-}$$

ратной волны  $(j+1)$ -го участка от  $j$ -го сечения;

$$R(j, j+1) = \frac{r_j-1}{r_j+1} - \text{коэффициент отражения пря-}$$

мой волны  $j$ -го участка от  $j$ -го сечения.

Если стержень однородный и имеет равную по длине площадь поперечных сечений, то скорости распространения волн на участках и волновые сопротивления сопряженных участков равны, а их отношение  $r_j = 1$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ). В этом случае коэффициенты отражения  $R(j, j+1)$  и  $R(j+1, j)$  равны нулю, а коэффициенты прохождения волн  $Q(j, j+1)$  и  $Q(j+1, j)$  равны единице.

В сечении  $x=l$   $n$ -го участка (рис. 5) падающей волной является прямая волна  $f_n(at-l)$ , а формируемой в этом сечении волной – обратная волна  $\phi_n(at+l)$ .

В начальный момент времени параметры падающей

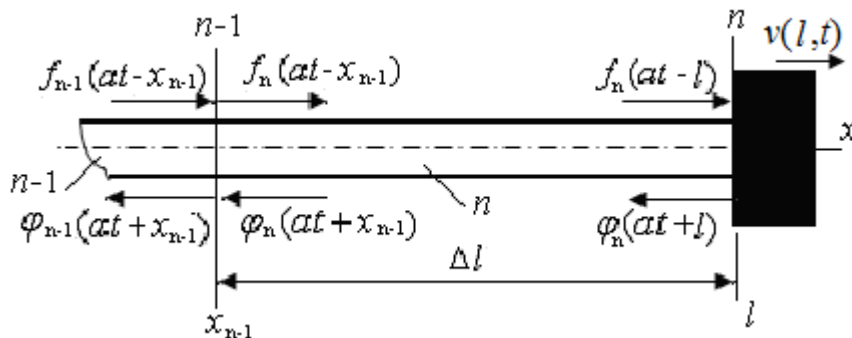


Рис. 5. Схема формирования обратной волны на границе  $x = l$

волны могут быть определены из начальных условий и соответствующих равенств (8). А последующие значения прямой волны  $f_n(at-l)$  через шаг вычисления  $\Delta t$  могут быть определены из условия, что

$$f_n(at-l) = f_{n-1}[a(t-\Delta t) - (l-\Delta l)], \quad \Delta l = a \cdot \Delta t,$$

то есть для определения  $f_n(at-l)$  используется значение  $f_{n-1}[a(t-\Delta t) - (l-\Delta l)]$ , вычисленное в сечении  $x_{n-1} = l - \Delta l$  на предыдущем шаге.

На формирование обратной волны  $\phi_n(at+l)$  оказывает влияние падающая на границу прямая волна  $f_n(at-l)$ . Причем в соответствии с равенством (14) на любом интервале движения, пока есть взаимодействие стержня и жесткого тела,

$$\phi'_n(at+l) = v_L/a - f'_n(at-l). \quad (18)$$

Процедура численного решения уравнения (16) может быть основана на методе последовательных приближений. Первое приближение можно представить как

$$f'_{1,1}(at-0) = v_1(0, t_{0i})/a + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,0}(at-0) + \phi'_1(at+0)] dt - \phi'_1(at+0), \quad (19)$$

где в подынтегральном выражении вместо  $f'_1(at-0)$  подставлено начальное значение  $f'_{1,0}(at-0)$ . Далее, подставляя в подынтегральное выражение (19) вместо  $f'_{1,0}(at-0)$  найденное первое приближение  $f'_{1,1}(at-0)$ , будем иметь второе приближение:

$$f'_{1,2}(at-0) = v_1(0, t_{0i})/a + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,1}(at-0) + \phi'_1(at+0)] dt - \phi'_1(at+0).$$

Дальнейшие приближения строятся по формуле:

$$f'_{1,p}(at-0) = v_1(0, t_{0i})/a + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,p-1}(at-0) + \phi'_1(at+0)] dt - \phi'_1(at+0), \quad (20)$$

где  $p$  – число приближений.

Число приближений должно быть ограничено числом  $s$ , когда последующее приближение отличается от предыдущего на малую величину  $\Delta f'$ .

В пределах малого интервала времени  $\Delta t = t - t_{0i}$ , допуская, что в пределах этого интервала времени подынтегральные функции сохраняют постоянные значения, т. е.

$$\phi'_1(at+0) = const,$$

$$f'_{1,p-1}(at-0) = const,$$

от интегрального выражения (20) можем перейти к алгебраическому в виде:

$$f'_{1,p}(at-0) = v_1(0, t_{0i})/a + \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,p-1}(at-0) + \varphi'_1(at+0)] \Delta t - \varphi'_1(at+0).$$

Если учесть, что  $\frac{EA}{Ma} = \frac{a^2 \rho Al}{Mal} = \frac{a \cdot \tilde{m}}{l}$ ,

$\tilde{m} = \rho Al/M$ ,  $a\Delta t = \Delta l$ ,  $l/\Delta l = n$  (где  $n$  – число участков,  $\rho$  – плотность материала стержня), то

$$f'_{1,p}(at-0) = v_1(0, t_{0i})/a + \frac{\tilde{m}}{n} [-f'_{1,p-1}(at-0) + \varphi'_1(at+0)] - \varphi'_1(at+0),$$

$p = 1, 2, 3, \dots, s.$  (21)

Если стержень разбит на достаточно малые участки длиной  $\Delta l$ , то в качестве малого интервала времени  $\Delta t$  может быть взято время, в течение которого волна деформации распространяется от одного граничного сечения участка до другого. Это тем более удобно, что волны, сформированные на границах однородных участков, достигают противоположных границ без искажения, т. е. описываются теми же функциями, но с запаздыванием на величину  $\Delta t = \Delta l/a$ .

Если связь между стержнем и транспортируемым объектом неударяющая, то в процессе вычислений необходимо контролировать условие неударяющей связи:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -f'_1(at-0) + \varphi'_1(at+0) = 0,$$

если  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \leq 0.$  (22)

В этом случае формируемая в сечении  $x=0$  прямая волна  $f'_1(at-0)$  определяется из равенства (22) как

$$f'_1(at-0) = \varphi'_1(at+0). \quad (23)$$

Равенства (14)-(23) положены в основу вычислительного алгоритма для анализа волновых процессов при движении ведущего звена (локомотива), упругого стержня и транспортируемого объекта.

В таблице 1 даны значения  $\tilde{f}'(at-0)$  и  $\tilde{\varphi}'(at+0)$  (соответственно для прямой и обратной волн при  $\tilde{m} = 1$ ), скорость  $\tilde{v}(0,t)$  и продольная деформация  $\tilde{\xi}(0,t)$  в сечении  $x=0$  при изменении относительного времени в диапазоне  $0 \leq \tilde{t} \leq 3,1$ . Эти данные получены в результате моделирования и при вычислении по приведенным выше аналитическим зависимостям. Стержень при моделировании представлен множеством участков, имеющих длину  $\Delta l = 0,01l$ .

Таблица 1

Параметры прямой  $\tilde{f}'(at-0)$  и обратной волн  $\tilde{\varphi}'(at+0)$ , скорость  $\tilde{v}(0,t)$  и продольная деформация  $\tilde{\xi}(0,t)$  в сечении  $x=0$  при  $\tilde{m} = 1$

| Время $\tilde{t}$ | Прямая волна       |                    | Обратная волна           |                          | Скорость         |                  | Деформация         |                    |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------------|--------------------------|------------------|------------------|--------------------|--------------------|
|                   | числен.            | аналит.            | числен.                  | аналит.                  | числен.          | аналит.          | числен.            | аналит.            |
|                   | $\tilde{f}'(at-0)$ | $\tilde{f}'(at-0)$ | $\tilde{\varphi}'(at+0)$ | $\tilde{\varphi}'(at+0)$ | $\tilde{v}(0,t)$ | $\tilde{v}(0,t)$ | $\tilde{\xi}(0,t)$ | $\tilde{\xi}(0,t)$ |
| 0                 | -0,5               | -0,5               | 0,5                      | 0,5                      | 0                | 0                | 1                  | 1                  |
| 0,1               | -0,40446           | -0,40484           | 0,5                      | 0,5                      | 0,09554          | 0,095163         | 0,90446            | 0,904837           |
| 0,2               | -0,31797           | -0,31873           | 0,5                      | 0,5                      | 0,18203          | 0,181269         | 0,81797            | 0,818731           |
| 0,3               | -0,23975           | -0,24082           | 0,5                      | 0,5                      | 0,26025          | 0,259182         | 0,73975            | 0,740818           |
| 0,4               | -0,16901           | -0,17032           | 0,5                      | 0,5                      | 0,33099          | 0,32968          | 0,66901            | 0,67032            |
| 0,5               | -0,10503           | -0,10653           | 0,5                      | 0,5                      | 0,39497          | 0,393469         | 0,60503            | 0,606531           |
| 0,6               | -0,04717           | -0,04881           | 0,5                      | 0,5                      | 0,45283          | 0,451188         | 0,54717            | 0,548812           |
| 0,7               | 0,00515            | 0,003415           | 0,5                      | 0,5                      | 0,50515          | 0,503415         | 0,49485            | 0,496585           |
| 0,8               | 0,05247            | 0,050671           | 0,5                      | 0,5                      | 0,55247          | 0,550671         | 0,44753            | 0,449329           |
| 0,9               | 0,09527            | 0,09343            | 0,5                      | 0,5                      | 0,59527          | 0,59343          | 0,40473            | 0,40657            |
| 1                 | 0,13397            | 0,132121           | 0,5                      | 0,5                      | 0,63397          | 0,632121         | 0,36603            | 0,367879           |
| 1,1               | 0,16897            | 0,167129           | 0,5                      | 0,5                      | 0,66897          | 0,667129         | 0,33103            | 0,332871           |
| 1,2               | 0,20063            | 0,198806           | 0,5                      | 0,5                      | 0,70063          | 0,698806         | 0,29937            | 0,301194           |
| 1,3               | 0,22926            | 0,227468           | 0,5                      | 0,5                      | 0,72926          | 0,727468         | 0,27074            | 0,272532           |



| Время<br>$\tilde{t}$ | Прямая волна         |                       | Обратная волна          |                          | Скорость          |                     | Деформация                  |                               |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------|---------------------|-----------------------------|-------------------------------|
|                      | числен.              | аналит.               | числен.                 | аналит.                  | числен.           | аналит.             | числен.                     | аналит.                       |
|                      | $\tilde{f}'(at - 0)$ | $\tilde{f}''(at - 0)$ | $\tilde{\phi}'(at + 0)$ | $\tilde{\phi}''(at + 0)$ | $\tilde{v}(0, t)$ | $\tilde{v}''(0, t)$ | $\tilde{\varepsilon}(0, t)$ | $\tilde{\varepsilon}''(0, t)$ |
| 1,4                  | 0,25515              | 0,253403              | 0,5                     | 0,5                      | 0,75515           | 0,753403            | 0,24485                     | 0,246597                      |
| 1,5                  | 0,27856              | 0,27687               | 0,5                     | 0,5                      | 0,77856           | 0,77687             | 0,22144                     | 0,22313                       |
| 1,6                  | 0,29974              | 0,298103              | 0,5                     | 0,5                      | 0,79974           | 0,798103            | 0,20026                     | 0,201897                      |
| 1,7                  | 0,31889              | 0,317316              | 0,5                     | 0,5                      | 0,81889           | 0,817316            | 0,18111                     | 0,182684                      |
| 1,8                  | 0,33621              | 0,334701              | 0,5                     | 0,5                      | 0,83621           | 0,834701            | 0,16379                     | 0,165299                      |
| 1,9                  | 0,35187              | 0,350431              | 0,5                     | 0,5                      | 0,85187           | 0,850431            | 0,14813                     | 0,149569                      |
| 2,0 <sup>-</sup>     | 0,3647               | 0,364665              | 0,5                     | 0,5                      | 0,8647            | 0,864665            | 0,1353                      | 0,135335                      |
| 2,0 <sup>+</sup>     | -0,64416             | -0,63534              | 1,5                     | 1,5                      | 0,85584           | 0,864665            | 2,14416                     | 2,135335                      |
| 2,1                  | -0,34324             | -0,3467               | 1,40446                 | 1,404837                 | 1,06122           | 1,058134            | 1,7477                      | 1,751164                      |
| 2,2                  | -0,09732             | -0,1028               | 1,31797                 | 1,318731                 | 1,22065           | 1,215928            | 1,41529                     | 1,420772                      |
| 2,3                  | 0,10928              | 0,102346              | 1,23975                 | 1,240818                 | 1,34903           | 1,343164            | 1,13047                     | 1,137404                      |
| 2,4                  | 0,28183              | 0,273908              | 1,16901                 | 1,17032                  | 1,45084           | 1,444228            | 0,88718                     | 0,895102                      |
| 2,5                  | 0,42494              | 0,416414              | 1,10503                 | 1,106531                 | 1,52997           | 1,522945            | 0,68009                     | 0,688616                      |
| 2,6                  | 0,54268              | 0,533847              | 1,04717                 | 1,048812                 | 1,58985           | 1,582659            | 0,50449                     | 0,513323                      |
| 2,7                  | 0,63859              | 0,629693              | 0,99485                 | 0,996585                 | 1,63344           | 1,626279            | 0,35626                     | 0,365157                      |
| 2,8                  | 0,71577              | 0,706988              | 0,94753                 | 0,949329                 | 1,6633            | 1,656317            | 0,23176                     | 0,240542                      |
| 2,9                  | 0,77692              | 0,768393              | 0,90473                 | 0,90657                  | 1,68165           | 1,674963            | 0,12781                     | 0,136337                      |
| 3                    | 0,8244               | 0,816243              | 0,86603                 | 0,867879                 | 1,66206           | 1,665742            | 0,04163                     | 0,049787                      |
| 3,1                  | Разрыв связи         |                       | Разрыв связи            |                          | Разрыв связи      |                     | 0                           | 0                             |

Сопоставляя результаты моделирования и аналитических вычислений, отметим их соответствие (различие результатов составляет тысячные доли). Причем точность расчета может быть увеличена за счет более мелкого разбиения стержня на участки малой длины.

Моделирование улавливает «скачки» продольной деформации в сечении  $x = 0$  в момент прихода к сечению отраженных от сечения  $x = l$  волн (в таблице 1 состояние системы в этот момент времени отражено в строках при  $\tilde{t} = 2^-$  и  $\tilde{t} = 2^+$ ). Фиксируется также момент разрыва связи.

**Выводы**

Разработана волновая модель движения механической системы, состоящей из активного звена (локомотива), упругого стержня и транспортируемого объекта. Волновая модель позволяет учесть распределенную массу стержня, определить скорость перемещения транспортируемого объекта и характер деформирования стержня.

Решение волнового уравнения строится с использованием метода бегущих волн. Функции прямых и обратных волн на различных интервалах движения определяются из условий их формирования в сечениях стержня, сопряженных с ведущим звеном и транспортируемым объектом.

Характеристики формируемых на границах прямых и

обратных волн образуют поле волновых состояний рассматриваемой механической системы. Поле волновых состояний позволяет оценивать характер и длительность волнового состояния, которое испытывает произвольное сечение стержня на любом интервале движения.

Вычислительная схема базируется на представлении стержня в виде множества последовательно сопряженных участков, на схеме формирования прямой волны в сечении  $x = 0$ , на схеме формирования прямой и обратной волн на границах сопряженных участков, на схеме формирования обратной волны на границе «торец стержня – ведущее звено (локомотив)», на свойстве функций прямых и обратных волн сохранять свои параметры при распространении по однородному участку со скоростью звука.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Асланов В.С., Юдинцев В.В. Динамика буксировки твердого тела на упругом тресе в безгравитационном пространстве // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. Механика. – 2013. – № 3 (104). – С. 58–66.
2. Асланов В.С. Колебания спутника с вертикальным упругим тросом на орбите // Известия РАН. Серия: Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 3–15.
3. Степанов А.Г. Динамика машин. – Екатеринбург : УРО РАН, 1999. – 304 с.
4. Колосов Л.В., Жигула Т.И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изве-

стия вузов. Горный журнал. – 1981. – № 3. – С. 83–86.

5. Stephen W. Attaway. Rope System Analysis, pp. 1–13. – URL: [http://www.jrre.org/ropes\\_101.pdf](http://www.jrre.org/ropes_101.pdf).

6. Bielan'ski J. 3D Form analysis of rope deformation with long towed underwater hydroacoustic antenna // Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2007, Vol. VII, No.3. – URL: <http://www.acme.pwr.wroc.pl/repository/146/online.pdf>. pp. 1–10.

7. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Ерестьянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. – М.: Наука, 1985. – 354 с.

8. Веклич Н.А., Малышев Б.М. Продольный удар жесткого тела по закрепленному стержню // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 6. – С. 140–146.

9. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев: Наук. думка, 1976. – 320 с.

10. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

11. Манжосов В.К. Продольный удар. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 358 с.

#### REFERENCES

1. Aslanov V.S., Yudin V.V. Dinamika buksirovki tverdogo tela na uprugom trosе v bezgravitatsionnom prostranstve [The Dynamics of Towing by the Elastic Rope in a Gravitationalless Space]. *Vestnik SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya. Mekhanika* [Bulletin of Samara State University. Natural Science Series. Mechanics], 2013, no. 3 (104), pp. 58–66.

2. Aslanov V.S. Kolebaniya sputnika s vertikalnym uprugim trosom na orbite [Orbital Oscillations of an Elastic Vertically-Tethered Satellite]. *Izvestiya RAN. Seriya: Mekhanika tverdogo tela* [Journal of the Russian Academy of

Science. Mechanics of Solids], 2011, no. 5, pp. 3–15.

3. Stepanov A.G. *Dinamika mashin* [The Dynamics of Machines]. Yekaterinburg, URO RAN Publ., 1999. 304 p.

4. Kolosov L.V., Zhigula T.I. Prodolno-poperechnyye kolebaniya struny kanata podyemnoy ustanovki [Transverse-Longitudinal Oscillations of the Hoisting Unit Rope Core]. *Izvestiya vuzov. Gornyy zhurnal* [News of Higher Educational Institutions. A Journal of Mining Engineering]. 1981, no. 3, pp. 83–86.

5. Stephen W. Attaway. *Rope System Analysis*. pp. 1–13. Available at: [http://www.jrre.org/ropes\\_101.pdf](http://www.jrre.org/ropes_101.pdf).

6. Bielan'ski J. 3D Form analysis of rope deformation with long towed underwater hydroacoustic antenna. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2007, vol. VII, no. 3, pp. 1–10. Available at: <http://www.acme.pwr.wroc.pl/repository/146/online.pdf>.

7. Alimov O.D., Manzhosov V.K., Yepemyants V.E. *Udar. Rasprostraneniye voln defopmatsiy v udarnykh sistemakh* [Impact. Propagation of Strain Waves in Shock Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 354 p.

8. Veklich N.A., Malyshev B.M. Prodolnyy udar zhestkogo tela po zakreplennomu sterzhnyu [Longitudinal Fast-Pin Impact of Rigid Body]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. [Proceedings of the Academy of Sciences of the U.S.S.R. Mechanics of Solids], 1972, no. 6, pp. 140–146.

9. Kilchevskiy N.A. *Dinamicheskoye kontaktnoye szhatiye tverdykh tel. Udar* [Dynamic Contact Compression of Solids. Impact]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1976. 320 p.

10. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in Engineering]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 444 p.

11. Manzhosov V.K. *Prodolnyy udar* [Longitudinal Impact]. Ulyanovsk, ULSTU Publ., 2007. 358 p.