УДК 531.36 : 534.1

О.А. Перегудова[1] , Д.С. Макаров[2]

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

Перегудова Ольга Алексеевна, *доктор физико-математических наук, доцент, окончила механико-математический факультет Ульяновского государственного университета. Профессор кафедры «Информационная безопасность и теория управления» УлГУ. Имеет статьи, учебные пособия, монографию в области теории устойчивости и управления движением механических систем. [e-mail: peregudovaoa@sv.ulsu.ru].*

Макаров Денис Сергеевич, *аспирант, окончил факультет математики и информационных технологий УлГУ. Младший научный сотрудник управления научных исследований УлГУ. Имеет статьи в области управления движением механических систем. [e-mail: prostodenis18@mail.ru].*

Аннотация

В статье решена задача о стабилизации программного движения двухзвенного манипулятора на неподвижном основании. Абсолютно жесткие звенья манипулятора соединены между собой идеальным цилиндрическим шарниром, и с помощью такого же шарнира первое звено крепится к основанию. Таким образом, манипулятор может совершать движения только в вертикальной плоскости. Движения манипулятора описываются системой уравнений Лагранжа второго рода. Задача синтеза управления движением такой системы заключается в построении законов изменения управляющих моментов, позволяющих манипулятору осуществлять заданное программное движение в реальных условиях действия внешних и внутренних возмущений, неточности самой модели. В работе построена математическая модель управляемого движения манипулятора для случая управляющих воздействий в виде непрерывных и разрывных функций, ограниченных по модулю. С использованием вектор-функции Ляпунова и системы сравнения обосновано применение построенных законов управления в задаче о стабилизации спектра программных движений манипулятора. Новизна результатов состоит в решении задачи стабилизации в нестационарной и нелинейной постановке, без перехода к линеаризованной модели, а также в возможности стабилизировать не одно, а целое семейство программных движений. С помощью математического пакета Maple найдено численное решение полученной системы дифференциальных уравнений с использованием как непрерывных, так и разрывных законов управления. Построены соответствующие графики для координат и скоростей звеньев манипулятора, подтверждающие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: многозвенный манипулятор, стабилизация, программное движение, релейное управление, система сравнения, вектор-функция Ляпунова.

CONTROL SYNTHESIS FOR DOUBLE-LINK MANIPULATOR

Olga Alekseevna Peregudova, *Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics at Ulyanovsk State University; Professor at the Department of Information Security and Control Theory of Ulyanovsk State University; an author of articles, textbooks, and a monograph in the field of stability theory and the motion control of mechanical systems. e-mail: peregudovaoa@sv.ulsu.ru.*

Denis Sergeevich Makarov, *a post-graduate student; graduated from the Faculty of Mathematics and Information Technologies of Ulyanovsk State University; Junior Researcher at the Department of Scientific Research of Ulyanovsk State University; an author of articles in the field of the motion control of mechanical systems. e-mail: prostodenis18@mail.ru.*

Abstract

A stabilization problem of a doubl-link manipulator program motion on a fixed base is solved in this paper. Totally rigid manipulator links are interconnected by an ideal cylindrical hinge and via the same hinge the first element is fastened to the base. Thus, the manipulator can perform motions in a vertical plane only. The manipulator motions are described by the system of Lagrange equations of the second kind. The problem on synthesis of the motion control of such system involves the construction of the laws of a control moments change that allow the manipulator to carry out the motion given by the program in real conditions of external and internal disturbances, and the inaccuracy of the model itself. A mathematical model of the manipulator controlled motion is constructed in this paper in case of control actions in the form of continuous and discontinuous functions bounded in modulus. By applying Lyapunov's vector-functions and the comparison systems we

1 Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части (код проекта 2097).

2 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-33082).

justified the implementation of the built control laws in the stabilization task of the spectrum of the manipulator program motions. The novelty of the results includes solving the stabilization problem of the non-stationary and nonlinear formulation, without changing to a linearized model, as well as the ability to stabilize not just one but a whole family of program motions. With the help of Maple's mathematical package a numerical solution of the received system of differential equations using both continuous and discontinuous control laws is found. The corresponding graphs for the coordinates and velocities of the manipulator links proving the theoretical results are built.

Key words: multi-link manipulator, stabilization, program motion, relay control, comparison system, Lyapunov's vector-function.

Введение

Основы математической и прикладной теории управления механическими системами заложены в трудах отечественных научных школ А.И. Лурье, А.А. Андронова, Н.Н. Красовского, А.Ю. Ишлинского, Д.Е. Охоцимского, С.В. Емельянова, В.В. Румянцева, А.М. Летова, В.М. Матросова, Ф.Л. Черноусько и других. Широкое применение в решении задачи синтеза управления движением многозвенных манипуляторов получил развитый в работах Е.С. Пятницкого [1], Ф.Л. Черноусько [2] и их учеников [3] принцип декомпозиции, состоящий в приведении управления всей механической системой к управлению отдельными ее подсистемами таким образом, что перекрестные динамические связи между подсистемами за конечное время перестают влиять на процесс движения. В работе [4] решена задача о стабилизации программного движения двузвенного манипулятора с учетом динамики приводов. При этом актуальна проблема построения новых законов управления с получением явных оценок области начальных возмущений, а также с учетом нелинейности и нестационарности системы, с возможностью решения задачи стабилизации для целого спектра программных движений.

В настоящей статье с использованием метода сравнения [5] и результатов работы [6] дано новое решение задачи синтеза управления движением двухзвенного манипулятора, обеспечивающего стабилизацию программного движения из достаточно широкого спектра возможных движений, с учетом нелинейности и нестационарности системы.

1 Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора, состоящую из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2.

Введем обозначения: q_i – угол между прямой O_iC_i и вертикальной осью; l_{g_i} – длина отрезка O_iC_i; l_1 – длина отрезка O_2C_2; m_i – масса звена G_i; I_i – момент инерции звена G_i относительно оси шарнира O_i; g – ускорение свободного падения.

Выражение для кинетической энергии манипулятора имеет вид:

$$T=\frac{1}{2}I_1\dot q_1^2+\frac{1}{2}m_2l_1^2\dot q_1^2+\frac{1}{2}I_2\dot q_2^2+$$
$$+m_2l_1l_{g_2}\cos(q_2-q_1)\dot q_1\dot q_2.$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_1}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_1}=M_1+U_1,\\[2mm] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_2}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_2}=M_2+U_2,\end{cases}$$

где M_i – момент, создаваемый силой тяжести в i-м шарнире,

$M_1=(m_1l_{g1}+m_2l_1)g\sin q_1$, $M_2=m_2l_{g2}g\sin q_2$, U_i – управляющие воздействия.

Из выражения для кинетической энергии T находим уравнения движения манипулятора:

$$\begin{cases}\left(I_1+m_2l_1^2\right)\ddot q_1+m_2l_1l_{g_2}\cos\left(q_2-q_1\right)\ddot q_2-\\ \qquad -m_2l_1l_{g_2}\sin\left(q_2-q_1\right)\dot q_2^2=\\ \qquad\qquad =\left(m_1l_{g_1}+m_2l_1\right)g\sin q_1+U_1,\\ I_2\ddot q_2+m_2l_1l_{g_2}\cos\left(q_2-q_1\right)\ddot q_1+\\ +m_2l_1l_{g_2}\sin\left(q_2-q_1\right)\dot q_1^2=m_2l_{g_2}g\sin q_2+U_2.\end{cases}\qquad(1)$$

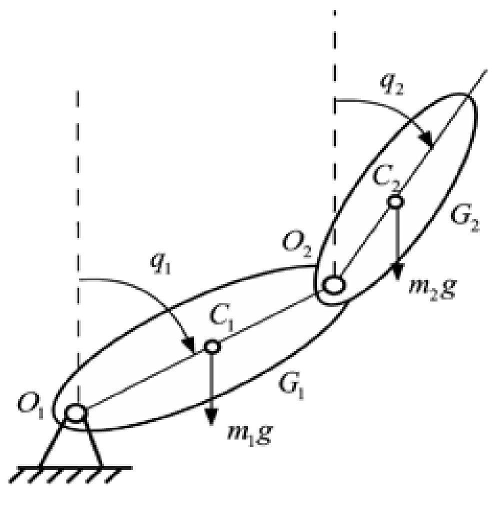

Рис. 1. Модель двухзвенного манипулятора

Пусть $q=(q_1,\ \ q_2)'$ – вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и

$$X=\Big\{\big(q^0(t),\dot q^0(t)\big):[t_0,+\infty)\to R^4,\|\ \|q^0(t)\|\le g_0,\|\dot q^0(t)\|\le g_1,\|\ddot q^0(t)\|\le g_2\Big\}$$

есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q=q^0(t)$ с ограниченными производными при $t\in[t_0,+\infty)$. Символом $\|\bullet\|$ обозначена евклидова норма вектора.

Пусть $(q^0(t),\ \ \dot q^0(t))\in X$ – какое-либо программное движение, реализуемое программным управлением $U=U^0(t)$.

Введем возмущения $x=q-q^0(t),\ \dot x=\dot q-\dot q^0(t)$ и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot x=\Big\{\dot x' C^{(1)}(t,x)\dot x\Big\}+Q^{(1)}(t,x)+Q^{(2)}(t,x,\dot x)+U^{(1)}, \tag{2}$$

$$A^{(1)}(t,x)=\begin{pmatrix} I_1+m_2l_1^2 & m_2l_1l_{g_2}\cos\big(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2-x_1\big)\\ m_2l_1l_{g_2}\cos\big(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2-x_1\big) & I_2\end{pmatrix},$$

$$C^{(1)}(t,x)=\big(C^{(1)}_{(1)}(t,x),C^{(1)}_{(2)}(t,x)\big),\ Q^{(1)}(t,x)=F(t,x)p(x),\ Q^{(2)}(t,x,\dot x)=D(t,x)\dot x,$$

$$C^{(1)}_{(1)}(t,x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_2l_1l_{g_2}\sin\big(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2-x_1\big)\end{pmatrix},$$

$$C^{(1)}_{(2)}(t,x)=\begin{pmatrix}-m_2l_1l_{g_2}\sin\big(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2-x_1\big) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$F(t,x)=\begin{pmatrix}f_{11}(t,x) & f_{12}(t,x)\\ f_{21}(t,x) & f_{22}(t,x)\end{pmatrix},\ p(x)=\begin{pmatrix}\sin(x_1/2)\\ \sin(x_2/2)\end{pmatrix},\ D(t,x)=\begin{pmatrix}0 & c^{(1)}_{22(1)}(t,x)\dot q_2^0(t)\\ c^{(1)}_{11(2)}(t,x)\dot q_1^0(t) & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}f_{11}(t,x)&=2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_2/2)\times\\ &\times\Big(\ddot q_2^0(t)\sin\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)-\big(\dot q_2^0(t)\big)^2\cos\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)\Big)+\\ &+2g\big(m_1l_{g_2}+m_2l_1\big)\cos\big(q_1^0(t)+x_1/2\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{12}(t,x)&=-2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_1/2)\times\\ &\times\Big(\ddot q_2^0(t)\sin\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)+\big(\dot q_2^0(t)\big)^2\cos\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{21}(t,x)&=2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_2/2)\times\\ &\times\Big(\ddot q_1^0(t)\sin\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)+\big(\dot q_1^0(t)\big)^2\cos\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{22}(t,x)&=-2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_1/2)\times\\ &\times\Big(\ddot q_1^0(t)\sin\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)-(\dot q_1^0(t))^2\cos\big(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2\big)\Big)+\\ &+2gm_2l_{g_2}\cos\big(q_2^0(t)+x_2/2\big),\end{aligned}$$

$$U^{(1)}=U-U^0(t).$$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $U^{(1)} = U^{(1)}(t,x,\dot{x}),\ U^{(1)}(t,0,0) \equiv 0$, при котором бы невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (2) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иными словами, управление

$$U = U^0(t) + U^{(1)}(t, q - q^0(t), \dot{q} - \dot{q}^0(t))$$

обеспечивало бы стабилизацию программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ системы (1) [7].

2 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области

$$G = \left\{ (x,\dot{x}) \in R^4 : \|x\| < \varepsilon, \|\dot{x}\| < \varepsilon, \varepsilon = const > 0 \right\}$$

с помощью непрерывного управления вида

$$U^{(1)}(x,\dot{x}) = B(\dot{x} + p(x)), \tag{3}$$

где $B \in R^{2\times 2}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению.

Возьмем для системы (2) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)$ с коэффициентами вида

$$V^1 = \| p(x) \|,$$

$$V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))' A^{(1)}(t,x)(\dot{x} + p(x))}.$$

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V в силу системы (2), получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \le -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} V^2,$$

$$\dot{V}^2 \le m_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 \left(V^1\right)^2 + m_4 \left(V^2\right)^2 + m_5 V^1 V^2,$$

где положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, m_i (i = 1,2,...,5)$ определяются из следующих условий:

$$\lambda_1^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 - \sqrt{\left(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2\right)^2 + 4\left(m_2 l_1 l_{g_2}\right)^2}}{2},$$

$$\lambda_2^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 + \sqrt{\left(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2\right)^2 + 4\left(m_2 l_1 l_{g_2}\right)^2}}{2},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \mu_2 = \frac{-\lambda_2^2 - 4 g_1 m_2 l_1 l_{g_2} - \lambda_{\max}(B + B')}{2\lambda_2},$$

$$m_1 = \frac{1}{2},\ m_2 = \max_{t \ge 0\ \|x\| \le \varepsilon} \frac{\lambda_2^2 + 2\sqrt{\lambda_{\max}\left[(D-F)'(D-F)\right]}}{2\lambda_1},$$

$$m_3 = \frac{m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1},\ m_4 = \frac{2 m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1},\ m_5 = \frac{3 m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}.$$

Здесь $\lambda_{\max}(\bullet)$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Тогда для системы (2) можно построить следующую систему сравнения:

$$\begin{aligned} \dot{u}^1 &= -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, \\ \dot{u}^2 &= m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 \left(u^1\right)^2 + m_4 \left(u^2\right)^2 + m_5 u^1 u^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [5] из свойства асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения (4) следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2). Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4) с областью притяжения

$$\left\{ (u^1, u^2) \in R^2 : \ 0 \le u^1 \le \delta_1 = const > 0, \ 0 \le u^2 \le \delta_2 = const > 0 \right\}.$$

Пусть найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1} < 1, \\ \mu_2 &> \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1}(m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда можно показать, что функция $\tilde{u}(t) = \max\left\{ u^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2 \right\}$ будет монотонно стремиться к нулю при $t \to +\infty$, и, значит, нулевое решение системы сравнения (4) будет асимптотически устойчиво.

При невозможности практической реализации программного управления стабилизацию программного движения можно осуществить при помощи разрывного управления вида

$$U^{(1)}(x,\dot{x}) = B\,\mathrm{sign}(\dot{x} + p(x)). \tag{6}$$

Численное моделирование движения манипулятора при действии управлений (3) и (6) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$m_1 = 0{,}5$ кг, $m_2 = 0{,}3$ кг,
$l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}5$ м, $l_{g1} = 0{,}25$ м, $l_{g2} = 0{,}3$ м,
$I_1 = 0{,}01$ кг·м², $I_2 = 0{,}006$ кг·м²,
$q_1^0(t) = sin(0{,}5t),\ q_2^0(t) = cos(0{,}5t) + \pi/2$.

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования при управлениях (3) и (6) соответственно.

При использовании непрерывного управления (3) матрица коэффициентов усиления была найдена в виде $B = 35E$, где E есть единичная матрица. Отметим, что использование релейного закона (6) позволило сократить энергозатраты на управление, так как матрица коэффициентов усиления была найдена в виде $B = diag\{5,\ 1.4\}$. Кроме того, при реализации закона (6) не потребовалось нахождение программного управления $U^0(t)$, что сократило время вычислений и упростило структуру самого управления.

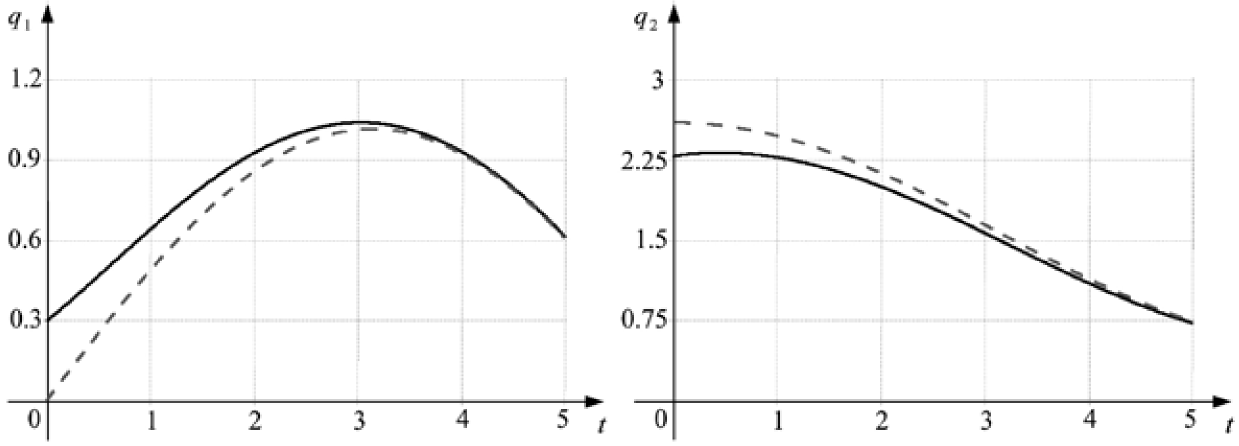

Рис. 2. Результаты моделирования при управлении (3)

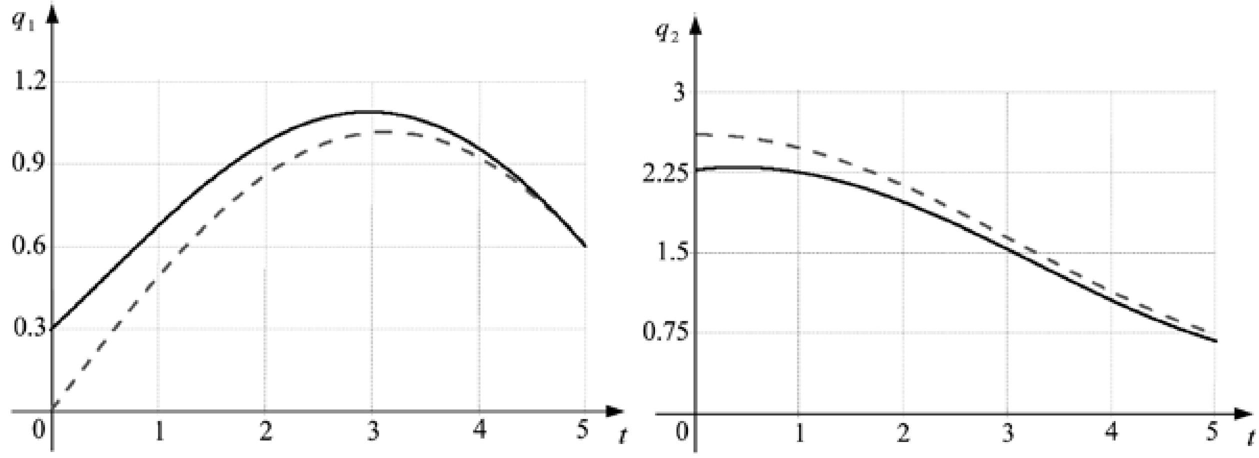

Рис. 3. Результаты моделирования при управлении (6)

Заключение

В статье получены следующие основные результаты:

- решены задачи синтеза непрерывного и релейного управления движением двухзвенного манипулятора, обеспечивающего стабилизацию программного движения в нелинейной и нестационарной постановке;
- обоснована методика построения вектор-функций Ляпунова и системы сравнения для систем, описывающих управляемое движение многозвенных манипуляторов;
- проведено численное моделирование, подтверждающее полученные теоретические результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пятницкий Е.С. Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 92–99.
2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М. : Физматлит, 2006. – 328 с.
3. Матюхин В.И. Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 3. – С. 33–44.
4. Андреев А.С., Макаров Д.С., Таджиев Д.А. Об управлении двузвенным манипулятором с приводом // Научно-технический вестник Поволжья. – 2013. – № 5. – С. 102–105.
5. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. – М. : Физматлит, 2001. – 380 с.
6. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 / Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – М. : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 1840–1843.
7. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления : учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Высш. шк., 2003. – 614 с.

REFERENCES

1. Pyatnitskiy E.S. Sintez upravleniya manipulyatsionnymi robotami na printsipe dekompozitsii [Control Synthesis for Programmable Manipulators based on the Decomposition Principle]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya*

kibernetika [Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Engineering Cybernetics Series], 1987, no. 3, pp. 92–99.

2. Chernousko F.L., Ananyevskiy I.M., and Reshmin S.A. *Metody upravleniya nelineynymi mekhanicheskimi sistemami* [Control Methods for Nonlinear Mechanical Systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 328 p.

3. Matyukhin V.I. Ustoychivost dvizheniy manipulyatsionnykh robotov v rezhime dekompozitsii [Motion Stability of Manipulator Robots in Decomposition Mode]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and Telemechanics], 1989, no. 3, pp. 33–44.

4. Andreev A.S., Makarov D.S., and Tadzhiev D.A. Ob upravlenii dvuzvennym manipulyatorom s privodom [Management the Two-Link Manipulator with Drive]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzhya* [The Volga Region Scientific and Engineering Bulletin], 2013, no. 5, pp. 102–105.

5. Matrosov V.M. *Metod vektornykh funktsiy Lyapunova: analiz dinamicheskikh svoystv nelineynykh system* [The Method of Vector Lyapunov Functions: Analysis of Dynamic Properties of Nonlinear System]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 380 p.

6. Andreev A.S., Peregudova O.A. O stabilizatsii programmnykh dvizheniy golonomnoy mekhanicheskoy sistemy [On Stabilization of Program Motion of Holonomic System]. *XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014. Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN* [The 12-th All-Russian Symposium on Management Issues VSPU-2014. V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences], Moscow, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, 2014, pp. 1840–1843.

7. Afanasiev V.N., Kolmanovskiy V.B., and Nosov V.R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya: Ucheb. dlya vuzov, 3-e izd., ispr. i dop* [The Mathematical Theory of Control System Construction: University-and-College Textbook, the 3-d revised and corrected Edition]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003. 614 p.