УДК 539.3:533.6:517.9

П.А. Вельмисов, А.В. Корнеев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА[1]

Вельмисов Петр Александрович, *доктор физико-математических наук, профессор, окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета. Заведующий кафедрой «Высшая математика» УлГТУ. Имеет статьи и монографии в области аэрогидромеханики, аэрогидроупругости, математического моделирования. [e-mail: velmisov@ulstu.ru].*

Корнеев Андрей Викторович, *окончил факультет информационных систем и технологий Ульяновского государственного технического университета. Аспирант кафедры «Высшая математика» УлГТУ. Имеет статьи в области аэрогидроупругости, оптимального управления, построения алгоритмов. [e-mail: a.korneev1@gmail.com].*

Аннотация

В работе предложены математические модели вязкоупругого трубопровода – полого стержня, внутри которого протекает жидкость (газ). Рассмотрены задачи динамической устойчивости трубопровода. Модели как линейные, так и нелинейные описываются дифференциальными уравнениями в частных производных для неизвестной функции – поперечного отклонения от положения равновесия трубопровода. На основе построенных функционалов типа Ляпунова сформулированы теоремы устойчивости и получены аналитические условия устойчивости для параметров механической системы и для различных типов закрепления трубопровода. Полученные условия устойчивости являются достаточными, но не необходимыми, поэтому для решения проблемы разработан программный комплекс, позволяющий численно находить приближенное решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания трубопровода, и построить области, соответствующие как достаточным, так и необходимым условиям устойчивости. Предложен алгоритм построения этих областей на плоскости двух параметров механической системы. На основе программного комплекса проведен численный эксперимент для построения областей устойчивости. Проведена интерпретация полученных численных результатов и сравнение их с аналитическими условиями устойчивости. Исследовано влияние некоторых параметров модели на устойчивость колебаний.

Ключевые слова: математическое моделирование, вязкоупругий трубопровод, аэрогидроупругость, устойчивость, функционал, уравнения с частными производными, численные методы, метод Галеркина.

MATHEMATICAL MODELING IN THE PROBLEM OF DYNAMIC STABILITY OF A PIPELINE

Petr Alexandrovich Velmisov, *Doctor of Physics and Mathematics, Professor; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Saratov State University; Head of the Department of Higher Mathematics at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles and monographs in the field of aerohydromechanics, aerohydroelasticity, and mathematical modeling. e-mail: velmisov@ulstu.ru.*

Andrei Viktorovich Korneev, *graduated from the Faculty of Information Systems and Technologies at Ulyanovsk State Technical University; Post-Graduate Student at the Department of Higher Mathematics of Ulyanovsk State Technical University; an author of articles in the field of aerohydroelasticity, optimal control, and algorithms development. e-mail: a.korneev1@gmail.com.*

Abstract

The paper presents mathematical models for a viscoelastic pipeline that is a hollow rod containing flowing the fluid (gas). The article is devoted to the problem of the dynamic stability of a pipeline. Linear and non-linear models describe partial differential equations for an unknown function (the displacement of the pipeline points from the equilibrium state). By means of Lyapunov functionals designed stability theorems are formulated and analytical stability conditions for the parameters of the mechanical system and different types of initial conditions are found. The obtained stability conditions are sufficient but not necessary. A mathematical software package is developed to solve this problem. It allows to find an approximate

1 Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

numerical solution of differential equation for describing pipeline vibration and to plot a stability area appropriate to both sufficient and necessary stability conditions. A numerical experiment of stability areas designing is conducted on the basis of the software package. The obtained numerical results are interpreted and compared with analytical stability conditions. The influence of the model parameters variation on the stability is researched.

Key words: mathematical modeling, viscoelastic pipeline, aerohydroelasticity, stability, functional, partial differential equations, numerical methods, Galerkin method.

Введение

При исследовании колебаний деформируемых тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, одним из важнейших является вопрос об устойчивости этих колебаний. Поток, воздействуя на тело, может не только возбуждать колебания, но и приводить к увеличению амплитуды, скорости или частоты колебаний до значений, нарушающих надежность эксплуатации, вплоть до разрушения конструкции или ее элементов.

Составными элементами широкого класса конструкций, приборов, аппаратов, установок, устройств, систем и т. д. являются трубопроводы, по которым протекает жидкость или газ. В связи с этим возникают вопросы надежности при проектировании этих устройств. Как правило, эти вопросы заключаются в определении области параметров механической системы, которые соответствуют области нормальной работы конструкции и не приводят к разрушению или возникновению аварийной ситуации.

Характерной особенностью задач аэрогидроупругости является невозможность определения силового воздействия потока на обтекаемое деформируемое тело заранее, до решения задачи об определении деформации тела. Математически это выражается в том, что совместное движение деформируемого тела и жидкости описывается связанной системой интегро-дифференциальных уравнений для функций, определяющих деформации тел и параметры течения жидкости. Однако в некоторых случаях удается разделить решение задачи определения силового воздействия потока на деформируемое тело и задачи исследования деформации тела на основе законов теоретической механики и оценивания воздействия жидкости (газа) на тело интегрально. Модель трубопровода, предложенная в работе, использует именно этот подход для получения дифференциального уравнения, описывающего его динамику.

В статических задачах вопрос об исследовании устойчивости формулируется следующим образом: необходимо определить, при каких статических изменениях параметров системы, последняя может совершать скачкообразный переход из одного состояния равновесия в другое (явление дивергенции системы). В этом случае происходит переход параметров через некоторые критические значения, при этом меняется качественная картина решений дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс (явление бифуркации решения).

Задача об исследовании динамической устойчивости (иначе – устойчивости по начальным данным, или устойчивости по Ляпунову) может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость–тело» (основными парааметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие усилия), малым отклонениям прогибов (деформаций) тел от положения равновесия в начальный момент времени будут соответствовать малые прогибы и в любой момент времени. Такая постановка вопроса является актуальной для многих задач, где в первую очередь важен характер поведения решений уравнения при изменении аргумента, в частности, при его неограниченном возрастании.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Исследования в этом направлении представлены в работах Белоцерковского С.М., Скрипача Б.К., Табачникова В.Г., Галиева Ш.У., Болотина В.В., Вольмира А.С., Григолюка А.Г., Григолюка Э.И., Лампера Р.Е., Шандарова Л.Г., Новичкова Ю.Н., Бисплингхоффа Р.Л., Эшли Х., Халфмана Р.Л., Фына Я.Ц., Фершинга Г., Ильюшина А.А., Кийко И.А., Алгазина С.Д., Кийко И.А., Мовчана А.А., Дж. Майлса, Пановко Я.Г., Губановой И.И., Ильгамова М.А. и других авторов.

В работах Зефирова В.Н., Колесова В.В., Милославского А.И., Светлицкого В.А., Челомея С.В., Феодосьева В.И., Казакевича М.И., Мовчана А.А., Нгуена В.Л., Томпсона Дж. М.Т., Милославского А.И. и др. исследуется динамика трубопровода.

Среди последних исследований по устойчивости конструкций и их элементов, при взаимодействии с потоком жидкости или газа, отметим исследования отечественных ученых Могилевича Л.И., Поповой А.А., Мокеева В.В., Ершова Б.А., Барметова Ю.П., Дободейча И.А., Звягина А.В., Соколова В.Г., Березнева А.В., Вельмисова П.А., Киреева С.В., Анкилова А.В. и многих других отечественных и зарубежных ученых. В частности, задачи динамической устойчивости и статической неустойчивости трубопровода рассматривались в работах [1–17].

1 Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу аэрогидроупругости о колебаниях, возникающих при протекании жидкости через трубопровод. Пусть на плоскости xOy трубопроводу соответствует на оси Ox отрезок $[0, l]$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox.

Для описания колебания вязкоупругого стержня, связанного с вязкоупругим основанием (вязкоупругим упрочняющим слоем), можно предложить следующее модельное уравнение для прогиба $w(x,t)$:

$$Dw'''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + (N + m_* U^2)w'' + \\ + 2Um_*\dot{w}' + \xi\dot{w} + \theta w + \psi\dot{w}'''' - \varphi\ddot{w}''. \quad (1)$$

Коэффициенты m_0, m_*, D вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0\pi\left(R_*^2 - R_0^2\right), m_* = \rho_*\pi R_0^2,$$

$$D = \frac{\pi E}{4}\left(R_*^4 - R_0^4\right), R_* = R_0 + h_0.$$

Здесь $w(x,t)$ – деформация (прогиб) в сечении x в момент времени t; D – изгибная жесткость трубы; E – модуль упругости, U, m_*, ρ – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между опорами; R_*, R_0, h_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода и толщина, θ – коэффициент жесткости основания; m_0, ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и его плотность; N – сжимающая (растягивающая) сила; ξ, ψ – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования соответственно; коэффициент φ учитывает инерцию вращения сечений. Все коэффициенты, входящие в уравнение, постоянные, точка сверху обозначает производную по времени t, а штрих – производную по координате x.

2 Аналитическое исследование устойчивости

Умножая уравнение (1) на $\dot{w}(x,t)$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}D\left(w''\right)^2 + \frac{1}{2}\left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 - \\ -\frac{1}{2}\left(N + m_*U^2\right)\left(w'\right)^2 + \frac{1}{2}\theta w^2 + \frac{1}{2}\varphi\left(\dot{w}'\right)^2\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\Big[D\left(\dot{w}w''' - \dot{w}'w''\right) + \left(N + m_*U^2\right)\dot{w}w' + \\ + Um_*\dot{w}^2 + \psi\left(\dot{w}w''' - \dot{w}'\dot{w}''\right) - \varphi\dot{w}\ddot{w}'\Big] + \\ + \xi\dot{w}^2 + \psi\left(\dot{w}''\right)^2 = 0.$$

Введем в рассмотрение функционал:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_0^l\Big[D\left(w''\right)^2 + \left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 - \\ - \left(N + m_*U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi\left(\dot{w}'\right)^2 + \theta w^2\Big]dx.$$

Найдем производную $\dfrac{dJ}{dt}$:

$$\frac{dJ}{dt} = -\int_0^l\Big[D\left(\dot{w}w''' - \dot{w}'w''\right) + \left(N + m_*U^2\right)\dot{w}w' + \\ + Um_*\dot{w}^2 + \psi\left(\dot{w}w''' - \dot{w}'\dot{w}''\right) - \varphi\dot{w}\ddot{w}'\Big]dx - \\ - \xi\dot{w}^2 - \psi\left(\dot{w}''\right)^2.$$

Рассмотрим следующие типы закрепления концов трубопровода:

а) шарнирное закрепление

$w(0,t) = w(l,t) = 0,\ w''(0,t) = w''(l,t) = 0;$

б) жесткое закрепление

$w(0,t) = w(l,t) = 0,\ w'(0,t) = w'(l,t) = 0;$

в) один конец (любой) закреплен шарнирно, другой – жестко.

Для указанных типов закреплений

$$\frac{dJ}{dt} = -\xi\dot{w}^2 - \psi\left(\dot{w}''\right)^2 < 0.$$

Тогда $J(t) < J(0)$, то есть

$$\int_0^l\Big[D\left(w''\right)^2 + \left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 - \\ - \left(N + m_*U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi\left(\dot{w}'\right)^2 + \theta w^2\Big]_{t=t}dx \le \\ \le \int_0^l\Big[D\left(w''\right)^2 + \left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 - \\ - \left(N + m_*U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi\left(\dot{w}'\right)^2 + \theta w^2\Big]_{t=0}dx. \quad (2)$$

Имеет место неравенство Релея [18]:

$$\int_0^l\left(w''\right)^2dx \ge \lambda_1\int_0^l\left(w'\right)^2dx,$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение соответствующей краевой задачи для уравнения $\psi'''' + \lambda\psi'' = 0$. Например, для закрепления концов типа «шарнир–шарнир» краевая задача имеет вид:

$\psi'''' + \lambda\psi'' = 0,\ \psi(0) = \psi(l) = 0,\ \psi''(0) + \psi''(l) = 0.$

Общее решение дифференциального уравнения определяется выражением

$$\psi(x) = c_1 + c_2x + c_3\sin\sqrt{\lambda}x + c_4\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$c_1 = c_2 = c_4 = 0,\ \psi(x) = c_3\sin\sqrt{\lambda_n}x,\ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

где λ_n – собственные значения, а $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ – собственные функции, при этом $\min\limits_n(\lambda_n) = \lambda_1 = \dfrac{\pi^2}{l^2}$.

С учетом неравенства Релея согласно (2) получаем:

$$\int_0^l\Big[\left(D\lambda_1 - N - m_*U^2\right)\left(w'\right)^2 + \\ + \left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 + \varphi\left(\dot{w}'\right)^2 + \theta w^2\Big]_{t=t}dx \le \\ \le \int_0^l\Big[D\left(w''\right)^2 + \left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 - \\ - \left(N + m_*U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi\left(\dot{w}'\right)^2 + \theta w^2\Big]_{t=0}dx. \quad (3)$$

Из последнего неравенства следует теорема.

Теорема. Если $N < D\lambda_1 - m_* U^2$, то малым значениям начальных данных $w(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $w'(x, 0)$, $w''(x, 0)$, $\dot{w}'(x, 0)$ (прогиба, скорости, угла поворота, кривизны, угловой скорости) будут соответствовать малые (в среднем, в интегральном смысле) $w(x, t)$, $\dot{w}(x, t)$, $w'(x, t)$, $\dot{w}'(x, t)$ в любой момент времени $t > 0$.

Таким образом, условие устойчивости для закрепления типа «шарнир–шарнир» имеет вид:

$$N < \frac{\pi^2}{l^2} D - m_* U^2. \tag{4}$$

Заметим, что это достаточное (но не необходимое) условие устойчивости.

Изобразим область устойчивости на плоскости (N, U) (рис. 1).

Для точек, расположенных ниже параболы $N = \frac{\pi^2}{l^2} D - m_* U^2$, имеет место устойчивость.

Имеет место неравенство, являющееся следствием неравенства Коши-Буняковского:

$$w^2(x,t) \le l \int_0^l w'^2(x,t)\,dx.$$

Тогда согласно (3) получим:

$$\frac{1}{l}\left(D\lambda_1 - N - m_* U^2\right) w^2(x,t) + \\ + \int_0^l \left[\left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 + \varphi\left(\dot{w}'\right)^2 + \theta w^2\right]_{t=t} dx \le \\ \le \int_0^l \Big[D\left(w''\right)^2 + \left(m_0 + m_*\right)\dot{w}^2 - \\ - \left(N + m_* U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi\left(\dot{w}'\right)^2 + \theta w^2\Big]_{t=0} dx.$$

Из этого неравенства следует равномерная устойчивость для $w(x, t)$ для $\forall x \in [0, l]$. А именно, малым значениям начальных данных $w(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $w'(x, 0)$ $w''(x, 0)$, $\dot{w}'(x, 0)$ будут соответствовать малые значения $w(x, t)$ для $\forall x \in [0, l]$.

3 Численное исследование устойчивости

Аналогичным образом исследовалась устойчивость колебаний трубопровода на основе нелинейной модели, которая описывается уравнением:

$$\left(m_0 + m_*\right)\ddot{w} + \xi\dot{w} + \psi\dot{w}'''' + 2Um_*\dot{w}' + \\ + Dw'''' + Nw'' + \theta w + m_* U^2 w'' - \\ - \frac{1}{2} w'' \left[k \int_0^l \left(w'\right)^2 dx - \alpha\left(\int_0^l \left(w'\right)^2 dx\right)^{\bullet}\right] = 0. \tag{5}$$

В модели (5) были добавлены нелинейные интегральные члены, которые учитывают нелинейное продольное усилие, возникающее из-за ограничений, наложенных на перемещения концов стержня $x = 0$ и $x = l$. Первый член учитывает удлинение трубопровода, коэффициент k находится по формуле $k = E\frac{\pi}{l}\left(R_*^2 - R_0^2\right)$.

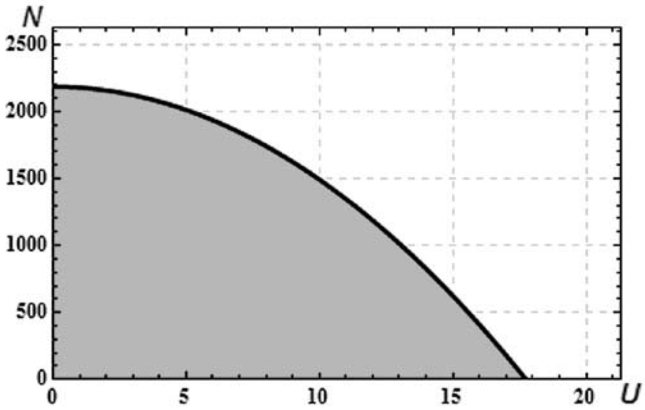

Рис. 1. Область устойчивости

Для определения неизвестной функции $w(x, t)$ уравнения (1) и (5) необходимо дополнить начальными условиями:

$$w(x, 0) = f(x),\ w'(x, 0) = g(x). \tag{6}$$

Как для линейной модели (1), так и для нелинейной (5) проведен численный эксперимент по исследованию динамики трубопровода, основанный на методе Галеркина. В предположении, что концы трубы закреплены шарнирно, решения уравнений (1), (5) отыскивались в виде:

$$w(x,t) = w_M(x,t) = \sum_{k=1}^{M} w_k(t) \sin\lambda_k x, \\ \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad x \in (0, l). \tag{7}$$

Обозначим:

$$L(w) \equiv \left(m_0 + m_*\right)\ddot{w} + 2Um_*\dot{w}' + Dw'''' + \\ + Nw'' + Kw + m_* U^2 + \xi\dot{w} + \\ + \theta w + \psi\dot{w}'''' - \varphi\ddot{w}'' - \\ - \frac{1}{2} w'' \left[k \int_0^l \left(w'\right)^2 dx - \left(\alpha \int_0^l \left(w'\right)^2 dx\right)^{\bullet}\right].$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_k(t)$, $k = \overline{1, M}$ получим на основе процедуры метода Галеркина:

$$\int_0^l L\left(w_M(x,t)\right) \sin\lambda_k x\, dx = 0, \quad k = \overline{1, M}, \tag{8}$$

Начальные условия для $w_k(t)$, $k = \overline{1, M}$ получим из (6), применяя процедуру Галеркина:

$$w_k(0)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\lambda_k x dx,\ k=\overline{1,M},$$
$$w_k'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\lambda_k x dx,\ k=\overline{1,M}. \qquad (9)$$

Получили задачу Коши для системы (8) с начальными условиями (9).

С помощью разработанного комплекса программ исследовалась динамическая устойчивость в зависимости от сжимающего воздействия N и скорости потока жидкости (газа) U. Параметры исследуемой механической системы были выбраны следующим образом: $E=210\cdot10^9$ – модуль упругости стали, $\rho_*=1000$ – плотность воды; $l=1$ – длина трубы между шарнирными опорами; $R_*=0{,}05$, $R_0=0{,}046$ – внешний и внутренний радиусы трубопровода, $\theta=40$ – коэффициент жесткости основания; $\rho_0=7800$ – плотность стали; $\xi=2$, $\psi=0{,}2$ – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования соответственно; коэффициент $\varphi=0{,}5$ учитывает инерцию вращения сечений. Функции f и g для начальных условий (6) задавались в следующем виде: $f(x)=0{,}02\sin\frac{\pi x}{l}$, $g(x)=0$. Все величины приведены в системе СИ.

Полученная задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с начальными условиями (9) решалась с помощью пакета математических программ Wolfram Mathematica 8. Было установлено, что одно приближение в методе Галеркина ($M=1$) не дает достаточной точности численного эксперимента, т. к. не учитывает ускорение Кориолиса (член $2m_*Uw'$). Также расчеты показали, что различие между двумя и большим числом приближений (например $M=20$) в методе Галеркина несущественно, примеры соответствующих графиков приведены на рисунке 2. Поэтому при дальнейших расчетах можно ограничиться двумя приближениями.

Согласно формуле (4), при $U=0$ максимальное значение N, при котором имеет место устойчивость, находится по формуле: $N_{max}=\frac{\pi^2}{l^2}D$. Аналогично, при $N=0$ максимальное значение скорости потока, при котором сохраняется устойчивость, находится следующим образом: $U_{max}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{D}{m_*}}$. При помощи разработанного комплекса программ на плоскости (N, U) построены области устойчивости и неустойчивости колебаний. Для прямоугольного диапазона $[0;\,1{,}05\cdot U_{max}]\times[0;\,1{,}05\cdot N_{max}]$ с фиксированным шагом были выбраны 41×41 точки, в которых решалась задача определения устойчивости колебаний. Критерий неустойчивости механической системы при заданных параметрах – неограниченное возрастание амплитуды колебаний с течением времени. Результат исследования изображен на рисунке 3, серыми символами *'x'* показаны точки, в которых наблюдается возрастание амплитуды колебаний; черные круги на рисунке соответствуют точкам, в которых амплитуда колебаний с течением времени стремится к нулю; на рисунке также приведена теоретическая граница области устойчивости (4), соответствующая параболе $N=\frac{\pi^2}{l^2}D-m_*U^2$.

Согласно рисунку 3, наблюдается хорошее соответствие теоретических результатов и численного эксперимента. Полученная в результате численного эксперимента область устойчивости незначительно шире, чем рассчитанная по формуле (4), что объясняется, в частности, учетом демпфирования.

Аналогичным образом была построена область устойчивости на плоскости $(\xi,\ U)$, которая изображена на рисунке 4. График свидетельствует об увеличении допустимой скорости потока жидкости при увеличении демпфирования внешней среды.

О характере колебаний точки $x_0=l/2$ в области устойчивости в зависимости от коэффициента внешнего демпфирования ξ можно судить по графикам на рисунке 5: а) коэфициент $\xi=2$; б) коэффициент $\xi=15$. При увеличении ξ увеличивается скорость затухания колебаний.

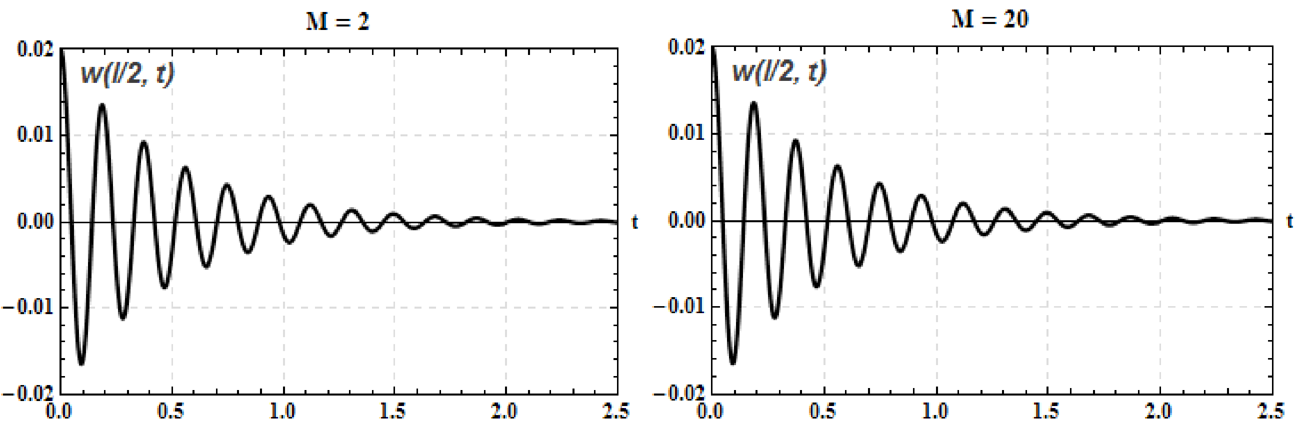

Рис. 2. Пример вычисления колебаний точки $x_0=l/2$ с разным количеством приближений M в методе Галеркина

Результаты исследования нелинейной модели показывают тот же характер зависимости устойчивости от параметров механической системы, что и для линейной модели.

Заключение

Разработан комплекс программных средств для численного моделирования динамики трубопровода с учетом взаимодействия с потоком жидкости (газа), вязоупругим основанием (упрочняющим слоем) и влияния продольного сжимающего (растягивающего) усилия. Для сформулированных моделей построен функционал и на его основе проведены аналитические исследования динамической устойчивости трубопровода. Получены в аналитической форме достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на значение сжимающего усилия N и скорости потока жидкости (газа) U. Проведено также численное исследование устойчивости колебаний трубопровода, определен вид колебаний в зависимости от параметров задачи. На плоскости (N, U) построены области устойчивости и неустойчивости колебаний, полученные как аналитическим способом, так и в результате численного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paidoussis M. P., Issid N. T. Dymanic stability of piped conveying fluid // J.Sound and Vibr., 1974. – vol. 33, pp. 267–294.

2. Vel'misov P. A., Garnefska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time // Rev. Mat. Estat., Sao Paulo, 19: 2001. – pp. 159–178.

3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Корнеев А.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – № 4. – С. 29–36.

4. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – 322 с.

5. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. О динамической устойчивости трубопровода // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике : Тр. Международ. «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007» (г. Ульяновск, 17–18 мая 2007 г.). – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 4. – С. 10–14.

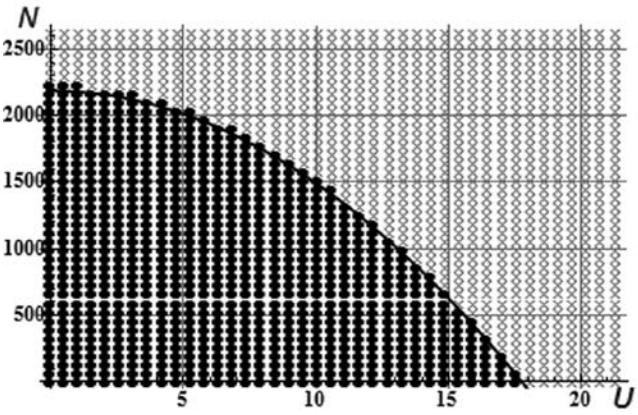

Рис. 3. Область устойчивости на плоскости (N, U)

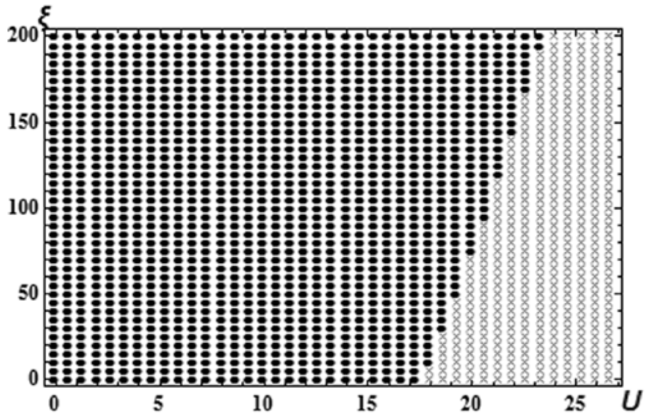

Рис. 4. Область устойчивости на плоскости (ξ, U)

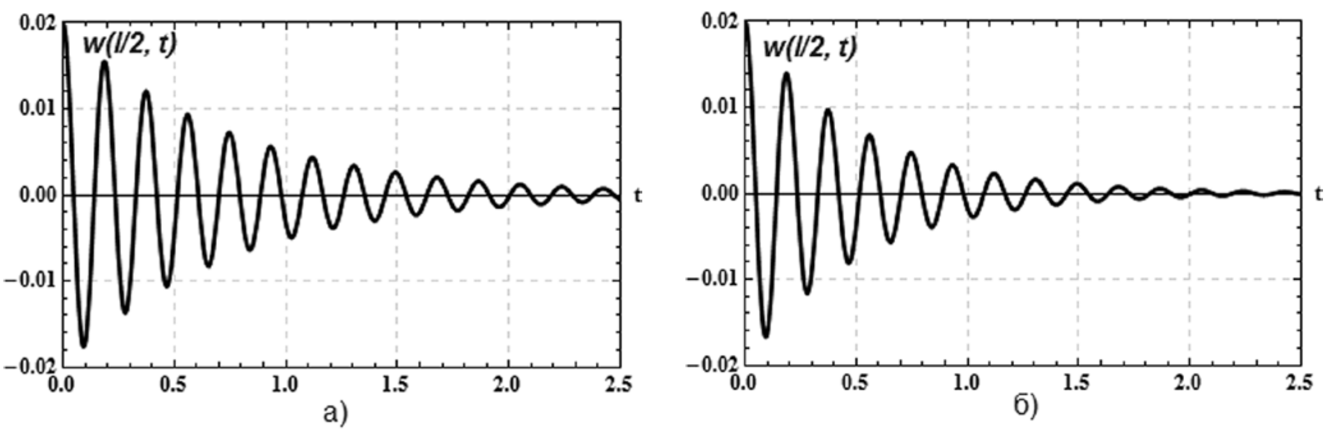

Рис. 5. Пример колебаний точки $x_0 = l/2$ с разными значениями параметра ξ

6. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М. : Физматгиз, 1961. – 339с.
7. Вельмисов П.А., Логинов Б.В., Милушева С.Д. Исследование устойчивости трубопровода // Приложение на математиката в техниката: Сб. доклади и научни съобщения. XXI национальная школа. – Болгария, Варна, 1995. – С. 299–304.
8. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – № 4. – С. 26–29.
9. Вельмисов П.А., Киреев С.В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – 200 с.
10. Вельмисов П.А. Васильева А.А., Семенова Е.П. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии // Тр. 7 Международ. конф. «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов (2–5 февраля 2009 г., г. Ульяновск)». –Ульяновск : УлГУ, 2009. – С. 68–70.
11. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. О некоторых математических моделях механической системы «Трубопровод – датчик давления» // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – Самара : СамГТУ, 2011. – № 1. – С. 137–144.
12. Математическое моделирование механической системы «Трубопровод – датчик давления» / А.В. Анкилов [и др.]. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 188 с.
13. Мовчан А.А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Прикладная математика и механика. – 1965. – Вып. 4. – С. 760–762.
14. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха. – М. : Машиностроение, 1982. – 280 с.
15. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике : пер. с англ. – М. : Мир, 1985. – 254 с.
16. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. – Издво АН СССР, 1951. – Т. 10. – С. 169–170.
17. Челомей С.В. О динамике устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 252, № 2. – С. 307–310.
18. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М. : Наука. – 1968.

REFERENCES

1. Paidoussis M. P., Issid N. T. Dymanic Stability of Piped Conveying Fluid. J. *of Sound and Vibr*., 1974, vol. 33, pp. 267–294.
2. Velmisov P. A., Garnefska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the Asymptotic Stability of a Pipeline in the Presence of Delay in Time. *Rev. Mat. Estat., Sao Paulo*, vol. 19, 2001, pp. 159–178.
3. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Korneev A.V. Issledovanie dinamicheskoi ustoichivosti truboprovoda s uchetom zapazdyvaniia vneshnikh vozdeistvii [Research of the Dynamic Stability of a Pipeline Subject to External Effects Delay]. *Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Ulyanovsk State Technical University], Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2014, no. 4, pp. 29–36.
4. Ankilov A.V., Velmisov P.A. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoi ustoichivosti deformiruemykh elementov konstruktsi pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii* [Mathematical Modeling in Problems of Dynamic Stability of Elastic Element of Deformed Elements of Constructions Upon Aerohydrodynamic Influence], Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2013. 322 p.
5. Ankilov A.V., Velmisov P.A. O dinamicheskoi ustoichivosti truboprovoda [On Dynamic Stability of a Pipeline]. *Matematicheskie metody i modeli v nauke, tekhnike, estestvoznanii i ekonomike: Tr. Mezhdunarod. 'Konferentsii po logike, informatike, naukovedeniyu' (KLIN-2007)* (Ulyanovsk, 17–18 May, 2007) [Proc of Int. 'Conf. on Logic, Informatics, and Humanities – (CLIN-2007)], Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2007, vol. 4, pp. 10–14.
6. Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoi ustoichivosti* [Nonconservative Problems of the Elastic Stability Theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 339 p.
7. Velmisov P.A., Loginov B.V., Milusheva S.D. Issledovanie ustoichivosti truboprovoda [Investigation of the Pipeline Stability]. *Prilozhenie na matematikata v tekhnikata: Sb. dokladi i nauchni sobshcheniia. XXI natsionalnaia shkola* [Applied Mathematics and Engineering: Proc. of the 21th National School], Bulgaria, Varna, 1995, pp. 299–304.
8. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Issledovanie dinamiki truboprovoda s uchetom zapazdyvaniia vneshnikh vozdeistvii [The Investigation of Tubing Dynamics Subject to External Action Lagging]. *Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of UlSTU], Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2004, no. 4, pp. 26–29.
9. Velmisov P.A., Kireev S.V. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh staticheskoi neustoichivosti uprugikh elementov konstruktsii pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii* [Mathematical Modeling in Problems of Static Instability of Elastic Element of Constructions Upon Aero-Hydrodynamic Influence]. Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2011. 200 p.
10. Velmisov P.A., Vasilyeva A.A., Semenova E.P. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki uprugikh elementov pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii [Mathematical Modeling for Elastic Elements Dynamic under the Influence of Aerohydrodynamic]. *Tr. 7 Mezhdunarod. Konf. 'Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh, ekonomicheskikh, tekhnicheskikh, sotsialnykh sistem i protsessov (2–5 February, 2009, Ulyanovsk)'* [Proc. of the 7th Int. Conf. 'Mathematical Modeling for Physical, Economical, Technical, Social Systems and Processes', 2009], Ulyanovsk, UlSU Publ., 2009, pp. 68–70.

11. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. O nekotorykh matematicheskikh modeliakh mekhanicheskoi sistemy 'Truboprovod – datchik davleniia' [On Some Mathematical Models of Mechanical System 'Pipeline – Pressure Sensor']. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser.: tekhnicheskie nauki* [Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series], Samara, SamSTU Publ., 2011, no. 1, pp. 137–144.

12. Ankilov A.V. et al. *Matematicheskoe modelirovanie mekhanicheskoi sistemy 'Truboprovod – datchik davleniia'* [Mathematical Modeling for Mechanical System 'Pipeline – Pressure Sensor']. Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2008. 188 p.

13. Movchan A.A. Ob odnoi zadache ustoichivosti truby pri protekanii cherez nee zhidkosti [On a Stability Problem of a Pipeline Containing Flowing Fluid]. *Prikladnaia metematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Informatics], 1965, Iss. 4, pp. 760–762..

14. Svetlitskiy V.A. *Mekhanika truboprovodov i shlangov: Zadachi vzaimodeistviia sterzhnei s potokom zhidkosti ili vozdukha* [Pipelines and Flexible Tubes Mechanics: Interaction with a Fluid Flow or Air]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 280 p.

15. Thompson J.M.T. *Neustoichivosti i katastrofy v nauke i tekhnike : per. s angl.* [Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering]. Moscow, Mir Publ., 1985. 254 p.

16. Feodosiev V.I. O kolebaniiakh i ustoichivosti truby pri protekanii cherez nee zhidkosti [On Vibration and Stability of a Pipeline Containing Flowing Fluid]. *Inzh. sb. Izd-vo AN SSSR* [Engineering Proc. of the Academy of Sciences of the U.S.S.R.], 1951, vol. 10, pp. 169–170.

17. Chelomey S.V. O dinamike ustoichivosti uprugikh sistem [On Dynamic of Elastic Systems Stability]. *Dokl. AN SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the U.S.S.R.], 1980, vol. 252, no. 2, pp. 307–310.

18. Kollatz L. *Zadachi na sobstvennye znacheniia* [Eigenvalue Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1968.