УДК 531.36 : 534.1

О.А. Перегудова, Д.С. Макаров

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ТРЕХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ[1]

Перегудова Ольга Алексеевна, *доктор физико-математических наук, доцент, окончила механико-математический факультет Ульяновского государственного университета. Профессор кафедры «Информационная безопасность и теория управления» УлГУ. Имеет статьи, учебные пособия, монографию в области теории устойчивости и управления движением механических систем. [e-mail: peregudovaoa@sv.ulsu.ru].*

Макаров Денис Сергеевич, *аспирант кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета, окончил факультет математики и информационных технологий УлГУ. Младший научный сотрудник управления научных исследований УлГУ. Имеет статьи в области управления движением механических систем. [e-mail: prostodenis18@mail.ru].*

Аннотация

В статье решена задача о стабилизации программного движения трехзвенного манипулятора путем построения непрерывного нелинейного управления с прямой и обратной связью. Манипулятор состоит их трех абсолютно жестких звеньев. Первое звено опирается на горизонтальное основание и может вращаться вокруг вертикальной оси. Второе звено соединено с первым и третьим при помощи идеальных цилиндрических шарниров. Относительные перемещения второго и третьего звеньев происходят в вертикальной плоскости, которая вращается вокруг вертикальной оси за счет движения первого звена. Таким образом, манипулятор может совершать пространственные движения. Движения манипулятора описываются системой уравнений Лагранжа второго рода. Задача синтеза стабилизирующего управления движением такой системы заключается в построении управляющих моментов, позволяющих манипулятору осуществлять заданное программное движение в реальных условиях действия внешних и внутренних возмущений, неточности самой модели. В работе построена математическая модель управляемого движения манипулятора для случая непрерывных управляющих воздействий. С использованием вектор-функции Ляпунова и системы сравнения обосновано применение построенных законов управления в задаче о стабилизации спектра программных движений манипулятора. Новизна результатов состоит в решении задачи стабилизации в нестационарной и нелинейной постановке, без перехода к линеаризованной модели, а также в возможности стабилизировать не одно, а целое семейство программных движений. Найдено численное решение полученной системы дифференциальных уравнений. Построены соответствующие графики для координат звеньев манипулятора, подтверждающие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: трехзвенный манипулятор, стабилизация, программное движение, непрерывное управление, система сравнения, вектор-функция Ляпунова.

CONTROL SYNTHESIS FOR THREE-LINK MANIPULATOR

Olga Alekseevna Peregudova, *Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics at Ulyanovsk State University; Professor at the Department of Information Security and Control Theory of Ulyanovsk State University; an author of articles, textbooks, and a monograph in the field of stability theory and the motion control of mechanical systems. e-mail: peregudovaoa@sv.ulsu.ru.*

Denis Sergeevich Makarov, *a Post-Graduate Student; graduated from the Faculty of Mathematics and Information Technologies of Ulyanovsk State University; Junior Researcher at the Department of Scientific Research of Ulyanovsk State University; an author of articles in the field of the motion control of mechanical systems. e-mail: prostodenis18@mail.ru.*

Abstract

A stabilization problem of the three-link manipulator program motion by providing continuous nonlinear control with direct and feedback communication is solved in this paper. The manipulator consists of three totally rigid links. The first link is fastened on a horizontal base and can pivot about a vertical axis. The second one is interconnected with the first and the third links by the ideal cylindrical hinges. Relative movements of the second and the third links are performed in a vertical place that pivots about a vertical axis due to the first link motion. Thus, the manipulator can perform three-dimensional motion. The manipulator motions are described by the system of Lagrange equations of the second kind. The problem on synthesis of the motion control of such system involves the control moment construction that allows the manipulator to carry out the

1 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

motion given by the program in real conditions of external and internal disturbances, and the inaccuracy of the model itself. A mathematical model of the manipulator controlled motion is constructed in this paper in case of control actions in the form of continuous control actions. By applying Lyapunov's vector functions and the comparison systems the implementation of the built control laws in the stabilization task of the spectrum of the manipulator program motions was proved. The novelty of the results includes solving the stabilization problem of the non-stationary and nonlinear formulation, without using a linearized model, as well as the ability to stabilize not just one but a whole family of program motions. A numerical solution of the received system of differential equations using both continuous and discontinuous control laws is found. The corresponding graphs for the coordinates of the manipulator links proving the theoretical results are built.

Key words: three-link manipulator, stabilization, program motion, continuous control, comparison system, Lyapunov's vector function.

Введение

Широко распространенной подсистемой сложной робототехнической системы являются двухзвенные и трехзвенные манипуляторы [1, 2]. Задача о построении управления, реализующего заданное множество программных движений многозвенного манипулятора, имеет достаточные математические сложности. Важным является также проведение компьютерного анализа, позволяющего оценить адекватность полученных теоретических результатов. В работе [3] при помощи метода сравнения решена задача стабилизации программного движения трехзвенного манипулятора с управлением, коэффициенты которого являются кусочно-постоянными функциями времени. В работе [4] решена задача о стабилизации программного движения двухзвенного манипулятора с учетом динамики приводов. При этом актуальна проблема построения новых законов управления с получением явных оценок области начальных возмущений, а также с учетом нелинейности и нестационарности системы, с возможностью решения задачи стабилизации для целого спектра программных движений. В работе [5] решена задача о стабилизации спектра программных движений двухзвенного манипулятора с применением вектор-функции Ляпунова и системы сравнения.

В настоящей статье с использованием результатов работы [6] дано новое решение задачи синтеза управления движением трехзвенного манипулятора, обеспечивающего стабилизацию программного движения из достаточно широкого спектра возможных движений, с учетом нелинейности и нестационарности системы.

1 Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев (рис. 1). Первое звено (вертикальная колонка) опирается на основание в точке O. Второе и третье звенья расположены в вертикальной плоскости. В схвате третьего звена находится перемещаемый груз.

Введем обозначения: $q_i (i=1,\ 2,\ 3)$ – углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i (i=1,\ 2,\ 3)$ – управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i – длина i-го звена; m_i – масса i-го звена; m_0 – масса перемещаемого груза; $m_{30}=m_0+m_3$; J_{01} – момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_2 – соответственно расстояния от центров тяжести второго звена и третьего звена с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев; $k_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$ – коэффициенты моментов сил вязкого трения, действующих в шарнирах; g – ускорение свободного падения.

Уравнения движения манипулятора имеют вид:

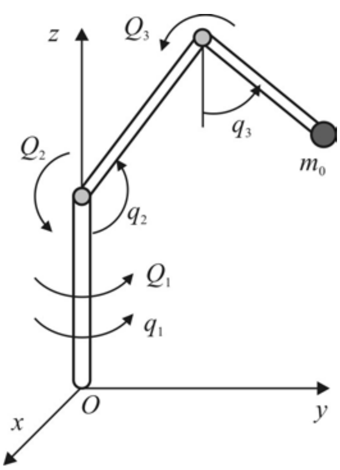

Рис. 1. Модель трехзвенного манипулятора

$$\begin{cases}
\left(J_{01}+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}\left(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3\right)^2\right)\ddot{q}_1+ \\
+2\left(m_2r_2^2\sin q_2\cos q_2+m_{30}\left(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3\right)l_2\cos q_2\right)\dot{q}_1\dot{q}_2+ \\
+2m_{30}\left(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3\right)r_3\cos q_3\dot{q}_1\dot{q}_3+k_1\dot{q}_1=Q_1, \\
\left(m_2r_2^2+m_3l_2^2\right)\ddot{q}_2+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos\left(q_2-q_3\right)\ddot{q}_3+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin\left(q_2-q_3\right)\dot{q}_3^2- \\
-\left(m_{30}\left(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3\right)l_2+m_2r_2^2\sin q_2\right)\cos q_2\dot{q}_1^2+ \\
+\left(m_2r_2+m_{30}l_2\right)g\sin q_2+k_2\dot{q}_2=Q_2, \\
\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos\left(q_2-q_3\right)\ddot{q}_2+m_{30}r_3^2\ddot{q}_3-\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin\left(q_2-q_3\right)\dot{q}_2^2- \\
-m_{30}\left(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3\right)r_3\cos q_3\dot{q}_1^2+m_{30}r_3g\sin q_3+k_3\left(\dot{q}_3-\dot{q}_2\right)=Q_3.
\end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)$ – вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и

$$X = \left\{ q^0(t) : [t_0, +\infty) \to R^3, \right.$$
$$\left. \left\| q^0(t) \right\| \le g_0, \left\| \dot{q}^0(t) \right\| \le g_1, \left\| \ddot{q}^0(t) \right\| \le g_2 \right\}$$

есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\bullet\|$ обозначена евклидова норма вектора. Уравнения движения (1) можно представить в следующей векторно-матричной форме:

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q, \qquad (2)$$

где $A(q)$ – положительно определенная матрица инерции системы:

$$C(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i C_{(i)}(q),$$

j, k-й элемент $c_{(i)jk}(q)$ матрицы $C_{(i)}(q)$ определяется в виде

$$c_{(i)jk}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right);$$

K – матрица коэффициентов моментов сил вязкого трения, действующих в системе.

Система (2) имеет следующее свойство: матрица $\dot{A}(q(t)) - 2C(q(t), \dot{q}(t))$ является кососимметричной.

Пусть $q^0(t) \in X$ – какое-либо программное движение системы (2), реализуемое программным управлением $Q = Q^{(0)}(t)$, т. е. имеет место тождество

$$A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + K\dot{q}^0(t) \equiv Q^{(0)}(t).$$

Введем возмущения $x = q - q^0(t)$ и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} + C^{(1)}(t, x, \dot{x})\dot{x} + K\dot{x} = Q^{(1)}(t, x, \dot{x}) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}), \qquad (3)$$

где $A^{(1)}(t, x) = A(x + q^0(t))$,

$$C^{(1)}(t, x, \dot{x}) = C(x + q^0(t), \dot{x} + \dot{q}^0(t)),$$
$$Q^{(1)}(t, x, \dot{x}) = Q - Q^{(0)}(t),$$
$$Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = \left(A^{(1)}(t, 0) - A^{(1)}(t, x)\right)\ddot{q}^0(t) + \left(C^{(1)}(t, 0, 0) - C^{(1)}(t, x, \dot{x})\right)\dot{q}^0(t).$$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $Q^{(1)}(t, x, \dot{x})$, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление $Q = Q^{(1)}\left(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)\right) + Q^{(0)}(t)$ обеспечивало бы стабилизацию программного движения $q^0(t) \in X$ системы (2).

2 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = \left\{ (x, \dot{x}) \in R^6 : \|x\| < \varepsilon, \|\dot{x}\| < \varepsilon, \varepsilon = const > 0 \right\}$ с помощью непрерывного управления вида

$$Q^{(1)}(x, \dot{x}) = B(\dot{x} + p(x)), \qquad (4)$$

где $B \in R^{3\times3}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению; $p(x)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, такая, что $\|p(x)\| \ge p_0(x) > 0, p_0(0) = 0.$

Возьмем для системы (3) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида

$$V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))' A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + p(x))}.$$

Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова V в силу системы (3), получим

$$\frac{d}{dt}\left(V^1(x)\right)^2 = 2V^1\dot{V}^1 = 2p'\dot{p} = 2p'\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} = -2p'\frac{\partial p}{\partial x}p + 2p'\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x} + p),$$

$$\frac{d}{dt}\left(V^2(x)\right)^2 = 2V^2\dot{V}^2 = 2(\ddot{x} + \dot{p})' A^{(1)}(\dot{x} + p) + (\dot{x} + p)'\dot{A}^{(1)}(\dot{x} + p) =$$
$$= 2\left(-C^{(1)}(t, x, \dot{x})\dot{x} - K\dot{x} + Q^{(1)}(x, \dot{x}) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x})\right)'(\dot{x} + p) + 2\dot{p}' A^{(1)}(\dot{x} + p) + (\dot{x} + p)'\dot{A}^{(1)}(\dot{x} + p).$$

Отсюда получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \le -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda(t, x)}V^2,$$

$$\dot{V}^2 \le \frac{m_2}{\lambda(t, x)}V^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t, x)}V^2,$$

где положительные постоянные μ_1, μ_2, m_1, m_2 и функция $\lambda(t, x)$ определяются из следующих условий:

$$p'\frac{\partial p}{\partial x}p \ge \mu_1\|p\|^2, \left\|\frac{\partial p}{\partial x}\right\| \le m_1,$$

$$\lambda(t, x)\|\dot{x} + p\| = V^2,$$

$$\left\|Q^{(2)}(t, x, \dot{x})\right\| \le$$
$$\le \left(m_2 - \left\|C^{(1)}(t, x, \dot{x}) + K - A^{(1)}(t, x)\frac{\partial p}{\partial x}\right\|\right)\|p\|,$$

$$\lambda_{\max}\left(B + B' - K - K' + A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)' A^{(1)}(t,x)\right) \le -2\mu_2.$$

Здесь $\lambda_{\max}(\bullet)$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Тогда для системы (3) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}u^2, \qquad (5)$$
$$\dot{u}^2 = \frac{m_2}{\lambda(t,x)}u^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}u^2.$$

Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [5] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (5) будет экспоненциально устойчиво при следующем условии

$4\mu_1\mu_2 > (m_1/k + m_2 k)^2, \ k = const > 0$.

Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории:

$m_2 = 15$ кг, $m_3 = 2{,}5$ кг, $m_0 = 2$ кг, $l_2 = 1$ м, $r_2 = 0{,}5$ м, $r_3 = 0{,}5$ м, $J_{01} = 0{,}1$ кг· м², $I_1 = 0{,}006$ кг·м², $q_1^0(t) = 0{,}2t$, $q_2^0(t) = 1{,}5 + 0{,}5\sin t$, $q_3^0(t) = 0{,}5\sin(0{,}5t)$.

На рисунках 2–4 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

При использовании непрерывного управления (4) матрица коэффициентов усиления была найдена в виде $B = 35E$, где E есть единичная матрица.

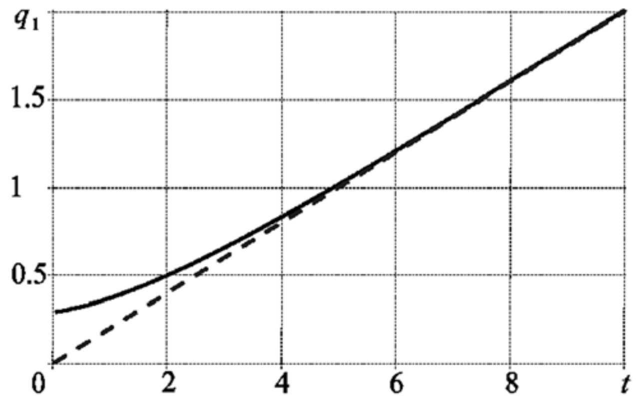

Рис. 2. Зависимость угла поворота первого звена от времени при управлении (4)

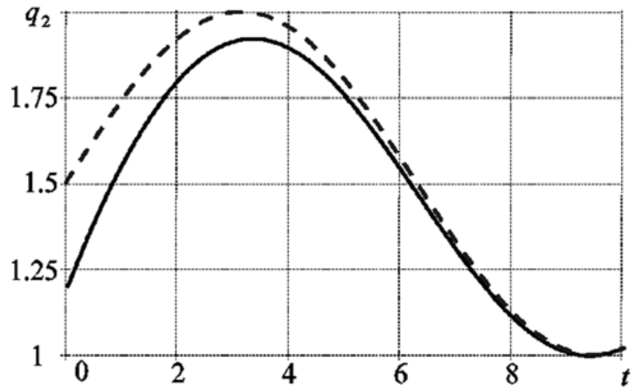

Рис. 3. Зависимость угла поворота второго звена от времени при управлении (4)

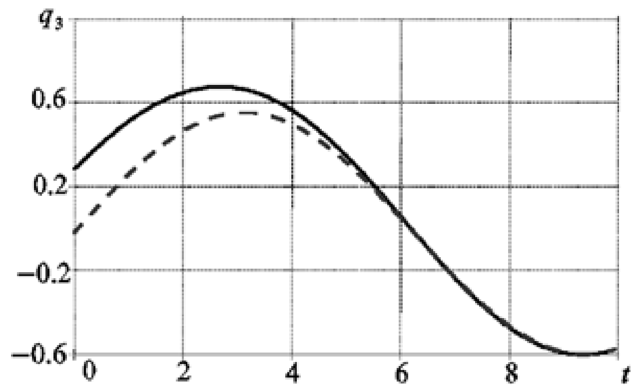

Рис. 4. Зависимость угла поворота третьего звена от времени при управлении (4)

Заключение

В статье получены следующие основные результаты:

- решены задачи синтеза непрерывного управления движением трехзвенного манипулятора, обеспечивающего стабилизацию программного движения в нелинейной и нестационарной постановке;
- обоснована методика построения вектор-функций Ляпунова и системы сравнения для систем, описывающих управляемое движение многозвенных манипуляторов;
- проведено численное моделирование, подтверждающее полученные теоретические результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot Dynamics and Control. New York : Wiley, 2004.

2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М. : Физматлит, 2006. – 328 с.

3. Перегудова О.А. О стабилизации программного движения нелинейных механических систем при помощи кусочно-непрерывных управлений манипулятором // Автоматизация процессов управления. – 2011. – № 1. – С. 78–82.

4. Андреев А.С., Макаров Д.С., Таджиев Д.А. Об управлении двузвенным манипулятором с приводом // Научно-технический вестник Поволжья. – 2013. – № 5. – С. 102–105.

5. Перегудова О.А., Макаров Д.С. Синтез управления двухзвенным манипулятором // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 4(38). – С. 36–41.

6. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы // XII Всероссийское совещание по проблемам управления "ВСПУ-2014". Москва, 16–19 июня 2014 г.: труды. – М. : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 1840–1843.

REFERENCES

1. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Dynamics and Control.* New York, Wiley Publ., 2004.

2. Chernousko F.L., Ananyevskiy I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniia nelineinymi mekhanicheskimi sistemami* [Control Methods for Nonlinear Mechanical Systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 328 p.

3. Peregudova O.A. O stabilizatsii programmnogo dvizheniia nelineinykh mekhanicheskikh sistem pri pomoshchi kusochno-nepreryvnykh upravlenii manipuliatorom [About Stabilization of Software Movement of Non-linear Mechanical Prise-wise Continuous Controls]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2011, no. 1, pp. 78–82.

4. Andreev A.S., Makarov D.S., Tadzhiev D.A. Ob upravlenii dvuzvennym manipuliatorom s privodom [Management the Two-Link Manipulator with Drive]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzhya* [The Volga Region Scientific and Engineering Bulletin], 2013, no. 5, pp. 102–105.

5. Peregudova O.A., Makarov D.S. Sintez upravleniia dvukhzvennym manipuliatorom [Control Synthesis for Double-link Manipulator]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2014, no. 4 (38), pp. 36–41.

6. Andreev A.S., Peregudova O.A. O stabilizatsii programmnykh dvizhenii golonomnoi mekhanicheskoi sistemy [On Stabilization of Program Motion of Holonomic System]. *XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniia VSPU-2014. Institut problem upravleniia im. V.A. Trapeznikova RAN* [The 12th All-Russian Symposium on Management Issues VSPU-2014. V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences], Moscow, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, 2014, pp. 1840 – 1843.