УДК 621.377

А.К. Иванов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ОРГАНАХ УПРАВЛЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ АСУ

Иванов Александр Куприянович, *доктор технических наук, заслуженный деятель науки и техники Ульяновской области, окончил физический факультет Иркутского государственного университета, аспирантуру Московского высшего технического училища им. Н.Э. Баумана, докторантуру Ульяновского государственного технического университета. Главный научный сотрудник ФНПЦ АО «НПО «Марс». Имеет монографии, учебное пособие, статьи в области математического моделирования иерархических АСУ реального времени. [e-mail: mars@mv.ru].*

Аннотация

На основе анализа процессов обработки информации в органах управления иерархической автоматизированной системы управления (АСУ) построены дифференциальные модели освещения обстановки и планирования. Модель освещения обстановки представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение первой степени с постоянными коэффициентами и описывает скорость формирования выходных информационных ресурсов путем обработки исходных данных, поступающих от подчиненных объектов. Уравнение решается методом неопределенных коэффициентов. Получены аналитические решения для одного, двух и трех источников информации. Моделью планирования является неоднородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Система уравнений описывает скорость формирования плановых документов в органе управления для подчиненных объектов. Решение находится методом вариации постоянных фундаментальной системы. Получены аналитические решения для двух подчиненных объектов. Приведены результаты расчетов объемов выходных данных при освещении обстановки в зависимости от времени при различных объемах поступающей информации от двух и трех подчиненных объектов. Рассчитаны параметры решения дифференциального уравнения для четырех подчиненных объектов.

Ключевые слова: математическое моделирование, информационные ресурсы, системы управления, дифференциальные уравнения.

DIFFERENTIAL MODELS OF INFORMATION PROCESSING IN HIERARCHICAL COMPUTER-AIDED CONTROL SYSTEM AUTHORITIES

Aleksandr Kupriianovich Ivanov, *Doctor of Engineering, Honoured Worker of Science and Engineering of the Ulyanovsk Region; graduated from the Faculty of Physics at Irkutsk State University; completed his post-graduate studies at Bauman Moscow Higher Technical School and his doctoral studies at Ulyanovsk State Technical University; Chief Staff Scientist at Federal Research-and-Production Center Joint Stock Company 'Research and Production Association 'Mars'; an author of monographs, articles, and a manual in the field of mathematical modeling of hierarchical real-time computer-aided control systems. e-mail: mars@mv.ru.*

Abstract

The analysis of information processing in hierarchical computer-aided control system authorities is the foundation on which the differential reporting situation and planning models have been constructed. The model of situation report represents heterogeneous differential equation of degree one with constant coefficients and describes the speed of creating output information resources by processing input data originating from subordinate bodies. The equation is solved by applying the method of indefinite coefficients. The analytical results for one, two, and three information sources have been obtained. The planning model represents inhomogeneous combined differential equations with constant coefficients. The combined equations describe the speed of creating routine documents by authorities for subordinate bodies. The solution can be found by applying the method of variation of fundamental system constants. The analytical results for two subordinate bodies have been obtained. The results of calculating output data amount in situation report depending on time and the amount of input data from two or three subordinate bodies were given. The parameters of the differential equation solution for four subordinate bodies have been calculated.

Key words: mathematical modeling, information resources, control systems, differential equations.

Введение

Иерархическая АСУ является сложной системой, состоящей из совокупности взаимосвязанных органов управления различных уровней, функционирующих для достижения поставленных целей. Сложность и большая стоимость АСУ, а также реализации управления приводят к тому, что выбор оптимальных решений при проектировании и управлении является задачей необходимой, но трудно реализуемой. Отсутствие математического описания взаимосвязей в АСУ, позволяющего формально ставить и решать оптимизационные задачи, заменяется на первых порах «мягкими» или «компьютерными» моделями, формализованными представлениями в ЭВМ практических приемов, опыта деятельности [1–3]. Однако на некотором этапе эти возможности исчерпываются и возникает традиционная проблема создания и использования математических моделей.

В настоящее время нет математического аппарата для создания полной модели АСУ и исследования ведутся в направлении разработки частных моделей на основе использования различных методов [4–6]. В связи с этим актуальной представляется работа по расширению состава моделируемых процессов и объектов системы управления и исследованию возможностей применения новых методов.

Центральное место в функционировании иерархических АСУ занимают процессы обработки информации в органах управления при сборе данных об обстановке и выработке управляющих решений. Учитывая динамический характер процессов обработки информации, целесообразно рассмотреть для их моделирования дифференциальные уравнения – эффективное и распространенное средство решения прикладных задач естествознания и техники [7–9]. Выбор конкретных типов дифференциальных уравнений производится путем детального исследования творческого характера формирования выводов по оценке обстановки и планов применения объектов управления [10–12]. Адекватность построенных моделей, их уточнение и развитие определяются экспериментальными исследованиями в ходе учебной или реальной деятельности должностных лиц системы управления.

1 Модель обработки информации при освещении обстановки

При освещении обстановки в органы управления иерархической системы поступает информация от подчиненных объектов нижестоящих уровней (источников информации). Обработка поступившей информации заключается в формировании обобщенных оценок по обстановке, которые передаются в вышестоящий орган управления и являются для него исходными данными по обстановке [4, 13].

Учитывая большой объем и разнообразие поступивших информационных ресурсов, творческий характер их обработки и формирования выводов, в моделях целесообразно рассматривать не движение и преобразование отдельных информационных ресурсов, а информационное пространство с некоторыми интегральными показателями.

Полагаем, что определенные количества информационных ресурсов всех источников после объединения и некоторой обработки трансформируются в такое же количество выходных информационных ресурсов. Скорость формирования выходных данных пропорциональна произведению оставшихся после обработки информационных ресурсов каждого источника.

Рассмотрим варианты моделирования для различного числа источников информации.

Один источник информации.

Общее количество информационных ресурсов, поступающих от источника, – v. Количество обработанных ресурсов, по которым сформированы выводы, – x. Скорость обработки пропорциональна количеству оставшихся информационных ресурсов:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(v - x\right),$$

где k – коэффициент пропорциональности.

После разделения переменных и интегрирования:

$$\frac{dx}{v-x} = kdt, \;\; \ln\frac{C}{v-x} = kt.$$

Начальные условия: $t=0,\, x=0$:

$$\ln\frac{C}{v-0} = k\cdot 0, \;\; C = v, \;\; \ln\frac{n}{v-x} = kt,$$

$$k = \frac{1}{t}\ln\frac{v}{v-x}, \;\; x = v\left(1 - e^{-kt}\right).$$

Два источника информации.

Количество информационных ресурсов, поступающих от первого источника, – v_1, от второго – v_2, ($v_1 \neq v_2$). Количество обработанных ресурсов от первого и от второго источников – x. Скорость обработки пропорциональна произведению необработанных ресурсов:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(v_1 - x\right)\left(v_2 - x\right).$$

Уравнение представим в виде:

$$\frac{dx}{\left(v_1 - x\right)\left(v_2 - x\right)} = kdt.$$

Рациональную дробь в левой части равенства интегрируем методом неопределенных коэффициентов [14]:

$$\int\frac{dx}{\left(v_1 - x\right)\left(v_2 - x\right)} = \int\frac{m_1}{v_1 - x}dx + \int\frac{m_2}{v_2 - x}dx,$$

откуда

$$m_1\,(v_1 - x) + m_2\,(v_2 - x) = 1,$$

и, приравнивая соответствующие коэффициенты при неизвестных и свободные члены в обеих частях равенства, получаем систему уравнений:

$$-m_1 - m_2 = 0,$$

$$v_2\, m_1 + v_1\, m_2 = 1.$$

Решая эту систему относительно неопределенных коэффициентов m_1 и m_2, имеем:

$$m_1=\frac{1}{v_2-v_1},\ m_2=\frac{1}{v_1-v_2}.$$

Подставляем полученные значения в уравнение и получаем:

$$\int\frac{m_1}{v_1-x}dx+\int\frac{m_2}{v_2-x}dx=$$
$$=\frac{1}{v_1-v_2}\int\frac{d\left(v_1-x\right)}{v_1-x}-\frac{1}{v_1-v_2}\int\frac{d\left(v_2-x\right)}{v_2-x}=$$
$$=\frac{1}{v_1-v_2}\left[\ln\left(v_1-x\right)-\ln\left(v_2-x\right)\right]=\frac{1}{v_1-v_2}\ln\frac{v_1-x}{v_2-x}.$$

Подставляем полученные значения в исходное уравнение и после интегрирования его правой части получаем общий интеграл следующего вида:

$$\frac{1}{v_1-v_2}\ln\frac{v_1-x}{v_2-x}=kt+C.$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=0$. Откуда

$$\frac{1}{v_1-v_2}\ln\frac{v_1-0}{v_2-0}=k\cdot 0+C,\quad C=\frac{1}{v_1-v_2}\ln\frac{v_1}{v_2}.$$

Коэффициент пропорциональности скорости обработки информационных ресурсов и зависимость обработанных ресурсов от времени:

$$k=\frac{1}{t\left(v_1-v_2\right)}\ln\frac{v_2\left(v_1-x\right)}{v_1\left(v_2-x\right)},\ x=\frac{v_1v_2\left[1-e^{-kt\left(v_1-v_2\right)}\right]}{v_1-v_2e^{-kt\left(v_1-v_2\right)}}.$$

Три источника информации.

Количество информационных ресурсов, поступающих от первого источника, – v_1, от второго – v_2, от третьего – v_3 ($v_1\neq v_2$, $v_1\neq v_3$, $v_2\neq v_3$). Количество обработанных ресурсов от всех источников – x. Скорость обработки пропорциональна произведению необработанных ресурсов:

$$\frac{dx}{dt}=k\left(v_1-x\right)\left(v_2-x\right)\left(v_3-x\right).$$

После разделения переменных получим

$$\frac{dx}{\left(v_1-x\right)\left(v_2-x\right)\left(v_3-x\right)}=kdt.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов

$$\frac{dx}{\left(v_1-x\right)\left(v_2-x\right)\left(v_3-x\right)}=$$
$$=\frac{m_1}{v_1-x}dx+\frac{m_2}{v_2-x}dx+\frac{m_3}{v_3-x}dx;$$

$$m_1(v_2-x)(v_3-x)+m_2(v_1-x)(v_3-x)+$$
$$+m_3(v_1-x)(v_2-x)=1,$$

получим следующую систему уравнений:

$$m_1v_2v_3+m_2v_1v_3+m_3v_1v_2=1,$$
$$m_1(v_2+v_3)+m_2(v_1+v_3)+m_3(v_1+v_2)=0,$$
$$m_1+m_2+m_3=0.$$

Решением системы являются:

$$m_1=\frac{1}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_1-v_3\right)};$$
$$m_2=\frac{1}{\left(v_2-v_1\right)\left(v_2-v_3\right)};$$
$$m_3=\frac{1}{\left(v_3-v_2\right)\left(v_3-v_1\right)}.$$

Исходное дифференциальное уравнение приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_1-v_3\right)}\frac{dx}{v_1-x}+\frac{1}{\left(v_2-v_1\right)\left(v_2-v_3\right)}\frac{dx}{v_2-x}+$$
$$+\frac{1}{\left(v_3-v_2\right)\left(v_3-v_1\right)}\frac{dx}{v_3-x}=kdt.$$

После интегрирования

$$\frac{1}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_3-v_1\right)}\int\frac{d\left(v_1-x\right)}{\left(v_1-x\right)}+$$
$$+\frac{1}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_2-v_3\right)}\int\frac{d\left(v_2-x\right)}{\left(v_2-x\right)}+$$
$$+\frac{1}{\left(v_2-v_3\right)\left(v_3-v_1\right)}\int\frac{d\left(v_3-x\right)}{\left(v_3-x\right)}=k\int dt$$

получаем решение в общем виде:

$$\frac{1}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_3-v_1\right)}\ln\left(v_1-x\right)+$$
$$+\frac{1}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_2-v_3\right)}\ln\left(v_2-x\right)+$$
$$+\frac{1}{\left(v_2-v_3\right)\left(v_3-v_1\right)}\ln\left(v_3-x\right)=kt+C.$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=0$. Откуда

$$C=\frac{\ln v_1}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_3-v_1\right)}+\frac{\ln v_2}{\left(v_1-v_2\right)\left(v_2-v_3\right)}+$$
$$+\frac{\ln v_3}{\left(v_2-v_3\right)\left(v_3-v_1\right)}.$$

Коэффициент пропорциональности скорости обработки:

$$k=\frac{\ln\left(\frac{v_1-x}{v_1}\right)^{v_2-v_3}+\ln\left(\frac{v_2-x}{v_2}\right)^{v_3-v_1}+\ln\left(\frac{v_3-x}{v_3}\right)^{v_1-v_2}}{t\left(v_1-v_2\right)\left(v_2-v_3\right)\left(v_3-v_1\right)}.$$

Общий случай, n источников информации.

Количество информации, поступающей от n источников: $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $v_i\neq v_j$; $i,j\in\overline{1,n}$; $i\neq j$.

Количество обработанных ресурсов от всех источников – x. Скорость обработки пропорциональна произведению необработанных ресурсов:

$$\frac{dx}{dt}=k\left(v_1-x\right)\left(v_2-x\right)\ldots\left(v_n-x\right).$$

После разделения переменных получим
$$\frac{dx}{(v_1-x)(v_2-x)\ldots(v_n-x)}=kdt.$$
Используя метод неопределенных коэффициентов
$$\frac{dx}{(v_1-x)(v_2-x)\ldots(v_n-x)}=$$
$$=\frac{m_1}{v_1-x}dx+\frac{m_2}{v_2-x}dx+\ldots+\frac{m_n}{v_n-x}dx;$$
$$m_1\,(v_2-x)(v_3-x)\ldots(v_n-x)+$$
$$+m_2\,(v_1-x)(v_3-x)\ldots(v_n-x)+\ldots+$$
$$+m_{n-1}\,(v_1-x)(v_2-x)\ldots(v_{n-2}-x)(v_n-x)+$$
$$+m_n\,(v_1-x)(v_2-x)\ldots(v_{n-2}-x)(v_{n-1}-x)=1,$$
получим следующую систему уравнений:
$$m_1v_2v_3\ldots v_n+m_2v_1v_3\ldots v_n+\ldots+m_nv_1v_2\ldots v_{n-1}=1,$$

$$m_1(v_2v_3\ldots v_{n-1}+v_2\,v_3\ldots v_{n-2}\,v_n+\ldots+v_3v_4\ldots v_n)+$$
$$+m_2(v_1v_3\ldots v_{n-1}+v_1v_3\ldots v_{n-2}v_n+\ldots+v_3v_4\ldots v_n)+\ldots+$$
$$+m_{n-1}(v_1v_2\ldots v_{n-2}+v_1v_2\ldots v_{n-3}v_n+\ldots+v_2v_3\ldots v_n)+$$
$$+m_n(v_1v_2\ldots v_{n-2}+v_1v_2\ldots v_{n-3}v_{n-1}+\ldots+v_2v_3\ldots v_{n-1})=0,$$

$$m_1(v_2\,v_3\ldots v_{n-2}+v_2v_3\ldots v_{n-3}v_n+\ldots+v_4v_5\ldots v_n)+$$
$$+m_2(v_1v_3\ldots v_{n-2}+v_1v_3\ldots v_{n-3}v_n+\ldots+v_4v_5\ldots v_n)+\ldots+$$
$$+m_{n-1}(v_1v_2\ldots v_{n-2}+v_1v_2\ldots v_{n-4}v_n+\ldots+v_3v_4\ldots v_n)+$$
$$+m_n(v_1v_2\ldots v_{n-3}+v_1v_2\ldots v_{n-4}v_{n-1}+\ldots+v_3v_4\ldots v_{n-1})=0,$$
………………………………………………………
$$m_1(v_2+v_3+\ldots+v_n)+m_2(v_1+v_3+\ldots+v_n)+\ldots+$$
$$+m_{n-1}(v_1+v_2+\ldots+v_n)+m_n(v_1+v_2+\ldots+v_{n-1})=0,$$

$$m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+m_n=0.$$

Если определитель системы
$$D=\det[V_{ij}];$$
$$V_{11}=v_2v_3\ldots v_n,\ldots,V_{12}=v_1v_3\ldots v_n,\ldots,V_{1n}=v_1v_2\ldots v_{n-1};$$
$$V_{21}=v_2v_3\ldots v_{n-1}+v_2v_3\ldots v_{n-2}v_n+\ldots+v_3v_4\ldots v_n;$$
$$V_{22}=v_1v_3\ldots v_{n-1}+v_1v_3\ldots v_{n-2}v_n+\ldots+v_3v_4\ldots v_n;$$
………………………………………………………
$$V_{2n-1}=v_1v_2\ldots v_{n-2}+v_1v_2\ldots v_{n-3}v_n+\ldots+v_2v_3\ldots v_n;$$
$$V_{2n}=v_1v_2\ldots v_{n-2}+v_1v_2\ldots v_{n-3}v_{n-1}+\ldots+v_2v_3\ldots v_{n-1};$$
………………………………………………………
$$V_{n-11}=v_2+v_3+\ldots+v_n,\ldots,V_{n-1n}=v_1+v_2+\ldots+v_{n-1};$$
$$V_{n1}=V_{n2}=\ldots=V_{nn}=1$$
не равен нулю, то система имеет единственное решение [15]:
$$m_k=D_k/D,\ (k=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$
где D_k – определитель, получающийся из D при замене элементов $V_{1k},\ V_{2k},\ldots,V_{nk}$ k-го столбца соответствующими свободными членами 1, 0, …, 0.

Исходное дифференциальное уравнение приводится к следующему виду:
$$\frac{m_1dx}{v_1-x}+\frac{m_2dx}{v_2-x}+\ldots+\frac{m_ndx}{v_n-x}=kdt.$$
После интегрирования
$$-m_1\int\frac{d\left(v_1-x\right)}{\left(v_1-x\right)}-m_2\int\frac{d\left(v_2-x\right)}{\left(v_2-x\right)}-\ldots-$$
$$-m_n\int\frac{d\left(v_n-x\right)}{\left(v_n-x\right)}=k\int dt$$
получаем решение в общем виде:
$$-m_1\ln(v_1-x)-m_2\ln(v_2-x)-\ldots-m_n\ln(v_n-x)=kt+C.$$
Начальные условия: при $t=0$ $x=0$. Откуда
$$C=-m_1\ln v_1-m_2\ln v_2-\ldots-m_n\ln v_n.$$
Коэффициент пропорциональности скорости обработки
$$k=\frac{1}{t}\left[\ln\left(\frac{v_1-x}{v_1}\right)^{-m_1}+\ln\left(\frac{v_2-x}{v_2}\right)^{-m_2}+\ldots+\ln\left(\frac{v_n-x}{v_n}\right)^{-m_n}\right].$$

2 Модель обработки информации при управлении

Процесс управления в иерархической системе заключается в формировании на объектах всех уровней планов применения подчиненных объектов на основании обработки всей имеющейся информации об обстановке и поступивших распоряжений от вышестоящего объекта [4, 16, 17].

Как и при моделировании освещения обстановки будем учитывать общие закономерности преобразования информационных ресурсов.

Полагаем, что из общего количества информационных ресурсов в органе управления после обработки формируется определенное количество информационных ресурсов для каждого подчиненного объекта. Скорость формирования для каждого объекта пропорциональна количеству необработанных ресурсов.

Рассмотрим варианты моделирования для различного числа подчиненных объектов, получателей информации.

Один подчиненный объект.

Общее количество информационных ресурсов на объекте – v. Количество обработанных ресурсов, по которым сформированы информационные ресурсы для подчиненного объекта, – x. Скорость формирования пропорциональна количеству оставшихся информационных ресурсов:
$$dx/dt=k(v-x),$$
где k – коэффициент пропорциональности.

После разделения переменных и интегрирования:
$$dx/(v-x)=kdt,\quad \ln C/(v-x)=kt.$$
Два подчиненных объекта.

Количество информационных ресурсов, формируемых для первого подчиненного объекта, – x_1, для второго – x_2. Общий объем обрабатываемых на объекте информационных ресурсов – v. Скорость формирования ресурсов для подчиненных объектов пропорциональна количеству необработанных данных:

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1\left(v - x_1 - x_2\right);$$
$$\frac{dx_2}{dt} = k_2\left(v - x_1 - x_2\right),$$

где k_1, k_2 – коэффициенты пропорциональности.

Решения полученной линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищется в виде:

$$x_1 = a_1e^{\lambda t},\ x_2 = a_2e^{\lambda t}.$$

После подстановки в систему уравнений получаем:

$$a_1\lambda e^{\lambda t} = k_1(v - a_1e^{\lambda t} - a_2e^{\lambda t});$$
$$a_2\lambda e^{\lambda t} = k_2(v - a_1e^{\lambda t} - a_2e^{\lambda t}).$$

Сначала находится фундаментальное решение однородной системы уравнений:

$$a_1\lambda e^{\lambda t} - k_1a_1e^{\lambda t} - k_1a_2e^{\lambda t} = 0;$$
$$a_2\lambda e^{\lambda t} - k_2a_1e^{\lambda t} - k_2a_2e^{\lambda t} = 0.$$

После сокращения на $e^{\lambda t}$ получаем систему алгебраических уравнений с неизвестными a_1, a_2:

$$a_1(\lambda + k_1) + a_2k_1 = 0;$$
$$a_1k_2 + a_2(\lambda + k_2) = 0.$$

Для получения нетривиального решения необходимо определить корни характеристического уравнения:

$$Det\begin{bmatrix} \lambda + k_1 & k_1 \\ k_2 & \lambda + k_2 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\left(\lambda + k_1\right)\left(\lambda + k_2\right) - k_1k_2 = 0;$$
$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\left(k_1 + k_2\right),$$

где λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения.

Каждому корню соответствует решение системы алгебраических уравнений:

$$\lambda_1 = 0;$$
$$a_1k_1 + a_2k_1 = 0;$$
$$a_1k_2 + a_2k_2 = 0;$$
$$a_1 = 1,\ a_2 = -a_1 = -1;$$
$$\lambda_2 = -(k_1 + k_2);$$
$$-a_1k_2 + a_2k_1 = 0;$$
$$a_1k_2 - a_2k_1 = 0;$$
$$a_1 = 1,\ a_2 = k_2/k_1 \cdot a_1 = k_2/k_1.$$

Фундаментальное решение однородной системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$x_1 = C_1 + C_2e^{-(k_1+k_2)t};$$
$$x_2 = C_1 + C_2\frac{k_2}{k_1}e^{-(k_1+k_2)t},$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Решение исходной неоднородной системы дифференциальных уравнений находится вариацией постоянных:

$$x_1 = C_1\left(t\right) + C_2\left(t\right)e^{-(k_1+k_2)t};$$
$$x_2 = -C_1\left(t\right) + C_2\left(t\right)\frac{k_2}{k_1}e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Из [14] следует

$$\frac{dC_1}{dt} + \frac{dC_2}{dt}e^{-(k_1+k_2)t} = k_1v;$$
$$-\frac{dC_1}{dt} + \frac{dC_2}{dt}\frac{k_2}{k_1}e^{-(k_1+k_2)t} = k_2v.$$

Отсюда

$$\frac{dC_1}{dt} = 0,\ \frac{dC_2}{dt} = k_1ve^{(k_2+k_1)\cdot t}.$$

Интегрируя, получим

$$C_1 = A_1,\ C_2 = \frac{k_1v}{k_2 + k_1}e^{(k_2+k_1)t} + A_2,$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования A_1, A_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$, $x_1 = x_2 = 0$. Откуда

$$A_1 + \frac{k_1v}{k_1 + k_2} + A_2 = 0;$$
$$-A_1 + \frac{k_2}{k_2 + k_1} + \frac{k_2}{k_1}A_2 = 0;$$
$$A_1 = 0,\ A_2 = -\frac{k_1v}{k_2 + k_1}.$$

Окончательное решение системы дифференциальных уравнений:

$$x_1 = \frac{k_1v}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_2+k_1)t}\right);$$
$$x_2 = \frac{k_2v}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_2+k_1)t}\right).$$

Три подчиненных объекта.

Количество информационных ресурсов, формируемых для первого подчиненного объекта, – x_1, для второго – x_2, для третьего – x_3. Общий объем обрабатываемых на объекте информационных ресурсов – v. Скорость формирования ресурсов для подчиненных объектов пропорциональна количеству необработанных данных:

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1\left(v - x_1 - x_2 - x_3\right);$$
$$\frac{dx_2}{dt} = k_2\left(v - x_1 - x_2 - x_3\right);$$
$$\frac{dx_3}{dt} = k_3\left(v - x_1 - x_2 - x_3\right),$$

где k_1, k_2, k_3 – коэффициенты пропорциональности.

Решения полученной линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищутся в виде:

$$x_1 = a_1e^{\lambda t},\ x_2 = a_2e^{\lambda t},\ x_3 = a_3e^{\lambda t}.$$

После подстановки в систему уравнений получаем:

$$a_1\lambda e^{\lambda t} = k_1(v - a_1e^{\lambda t} - a_2e^{\lambda t} - a_3e^{\lambda t});$$
$$a_2\lambda e^{\lambda t} = k_2(v - a_1e^{\lambda t} - a_2e^{\lambda t} - a_3e^{\lambda t});$$
$$a_3\lambda e^{\lambda t} = k_3(v - a_1e^{\lambda t} - a_2e^{\lambda t} - a_3e^{\lambda t}).$$

Сначала находится фундаментальное решение однородной системы уравнений:

$$a_1\lambda e^{\lambda t} - k_1a_1e^{\lambda t} - k_1a_2e^{\lambda t} - k_1a_3e^{\lambda t} = 0;$$

$$a_2\lambda e^{\lambda t}-k_2a_1e^{\lambda t}-k_2a_2e^{\lambda t}-k_2a_3e^{\lambda t}=0;$$
$$a_3\lambda e^{\lambda t}-k_3a_1e^{\lambda t}-k_3a_2e^{\lambda t}-k_3a_3e^{\lambda t}=0.$$

После сокращения на $e^{\lambda t}$ получаем систему алгебраических уравнений с неизвестными a_1, a_2, a_3:

$$a_1(\lambda+k_1)+a_2k_1+a_3k_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2(\lambda+k_2)+a_3k_2=0;$$
$$a_1k_3+a_2k_3+a_3(\lambda+k_3)=0.$$

Для получения нетривиального решения необходимо получить корни характеристического уравнения:

$$Det\begin{bmatrix}\lambda+k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & \lambda+k_2 & k_2\\ k_3 & k_3 & \lambda+k_3\end{bmatrix}=0;$$

$$(\lambda+k_1)(\lambda+k_2)(\lambda+k_3)+k_1k_2(\lambda+k_3)+ +k_2k_3(\lambda+k_1)-k_1k_3(\lambda+k_2)-2k_1k_2k_3=$$
$$\lambda[\lambda^2+\lambda(k_1+k_2+k_3)+2(k_1k_2+k_2k_3)]=0;$$
$$\lambda_1=0;$$
$$\lambda_{2,3}=\frac{-(k_1+k_2+k_3)\pm\sqrt{(k_1+k_2+k_3)^2-8(k_1k_2+k_2k_3)}}{2},$$

где λ_1, $\lambda_{2,3}$ – корни характеристического уравнения.

Каждому корню соответствует решение системы алгебраических уравнений:

$$\lambda_1=0;$$
$$a_1k_1+a_2k_1+a_3k_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2k_2+a_3k_2=0;$$
$$a_1k_3+a_2k_3+a_3k_3=0;$$
$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=-2;$$
$$\lambda_2=\frac{-(k_1+k_2+k_3)+\sqrt{(k_1+k_2+k_3)^2-8(k_1k_2+k_2k_3)}}{2},$$
$$a_1(\lambda_2+k_1)+a_2k_1+a_3k_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2(\lambda_2+k_2)+a_3k_2=0;$$
$$a_1k_3+a_2k_3+a_3(\lambda_2+k_3)=0;$$
$$a_1=1,\ a_2=f_2^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3),$$
$$a_3=f_3^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3);$$
$$\lambda_3=\frac{-(k_1+k_2+k_3)-\sqrt{(k_1+k_2+k_3)^2-8(k_1k_2+k_2k_3)}}{2},$$
$$a_1(\lambda_3+k_1)+a_2k_1+a_3k_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2(\lambda_3+k_2)+a_3k_2=0;$$
$$a_1k_3+a_2k_3+a_3(\lambda_3+k_3)=0;$$
$$a_1=1,\ a_2=f_2^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3),$$
$$a_3=f_3^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3),$$

где $f_i^{(j)}(.)$ – функциональная зависимость a_i при λ_j.

Фундаментальное решение однородной системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$x_1=C_1+C_2e^{\lambda_2t}+C_3e^{\lambda_3t};$$
$$x_2=C_1+C_2f_2^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2t}+ +C_3f_2^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3t};$$
$$x_3=-2C_1+C_2f_3^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2t}+ +C_3f_3^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3t};$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Решение исходной неоднородной системы дифференциальных уравнений находится вариацией постоянных [14]:

$$x_1=C_1(t)+C_2(t)e^{\lambda_2t}+C_3(t)e^{\lambda_3t};$$
$$x_2=C_1(t)+C_2(t)f_2^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2t}+ +C_3(t)f_2^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3t};$$
$$x_3=-2C_1(t)+C_2(t)f_3^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2t}+ +C_3(t)f_3^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3t}.$$

Откуда следует система уравнений относительно производных постоянных, которые считаем зависимыми от t:

$$\frac{dC_1}{dt}+\frac{dC_2}{dt}e^{\lambda_2t}+\frac{dC_3}{dt}e^{\lambda_3t}=k_1v;$$
$$\frac{dC_1}{dt}+\frac{dC_2}{dt}f_2^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2t}+ +\frac{dC_3}{dt}f_2^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3t}=k_2v;$$
$$\frac{dC_1}{dt}+\frac{dC_2}{dt}f_3^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2t}+ +\frac{dC_3}{dt}f_3^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3t}=k_3v.$$

В результате получим:

$$\frac{dC_1}{dt}=\varphi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t);$$
$$\frac{dC_2}{dt}=\varphi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t);$$
$$\frac{dC_3}{dt}=\varphi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t).$$

После интегрирования находим C_1, C_2, C_3 с точностью до постоянных A_1, A_2, A_3:

$$C_1=\int\varphi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)\,dt+A_1= =\Psi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_1;$$
$$C_2=\int\varphi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)\,dt+A_2= =\Psi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_2;$$
$$C_3=\int\varphi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)\,dt+A_3= =\Psi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_3.$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2, A_3 определяются из начальных условий: при $t=0$, $x_1=x_2=x_3=0$. Откуда

$$0=\Psi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_1+ +\Psi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_2+ +\Psi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_3;$$
$$0=\Psi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_1+ +[\Psi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_2]\times \times f_2^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)+$$

$$+[\Psi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_3]\times$$
$$\times f_2^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3);$$
$$0=\Psi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_1+$$
$$+[\Psi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_2]\times$$
$$\times f_3^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)+$$
$$+[\Psi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t=0)+A_3]\times$$
$$\times f_3^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3).$$

Окончательное решение системы дифференциальных уравнений:

$$x_1=\Psi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_1+$$
$$+[\Psi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_2]e^{\lambda_2 t}+$$
$$+[\Psi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_3]e^{\lambda_3 t};$$
$$x_2=\Psi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_1+$$
$$+[\Psi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_2]\times$$
$$\times f_2^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2 t}+$$
$$+[\Psi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_3]\times$$
$$\times f_2^{(3)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3 t};$$
$$x_3=\Psi_1(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_1+$$
$$+[\Psi_2(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_2]\times$$
$$\times f_3^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_2 t}+$$
$$+[\Psi_3(\lambda_2,\lambda_3,k_1,k_2,k_3,v,t)+A_3]\times$$
$$\times f_3^{(3)}(\lambda_3,k_1,k_2,k_3)e^{\lambda_3 t}.$$

Общий случай, n подчиненных объектов.

Количество информационных ресурсов, формируемых для подчиненных объектов: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Общий объем обрабатываемых на объекте информационных ресурсов – v. Скорость формирования ресурсов для подчиненных объектов пропорциональна количеству необработанных данных:

$$\frac{dx_1}{dt}=k_1(v-x_1-x_2-\ldots-x_n);$$
$$\frac{dx_2}{dt}=k_2(v-x_1-x_2-\ldots-x_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt}=k_n(v-x_1-x_2-\ldots-x_n),$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – коэффициенты пропорциональности.

Решения полученной линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищутся в виде:

$$x_1=a_1e^{\lambda t},\ x_2=a_2e^{\lambda t},\ \ldots,\ x_n=a_ne^{\lambda t}.$$

После подстановки в систему уравнений получаем:

$$a_1\lambda e^{\lambda t}=k_1(v-a_1e^{\lambda t}-a_2e^{\lambda t}-\ldots-a_ne^{\lambda t});$$
$$a_2\lambda e^{\lambda t}=k_2(v-a_1e^{\lambda t}-a_2e^{\lambda t}-\ldots-a_ne^{\lambda t});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n\lambda e^{\lambda t}=k_n(v-a_1e^{\lambda t}-a_2e^{\lambda t}-\ldots-a_ne^{\lambda t}).$$

Сначала находится фундаментальное решение однородной системы уравнений:

$$a_1\lambda e^{\lambda t}-k_1a_1e^{\lambda t}-k_1a_2e^{\lambda t}-\ldots-k_1a_ne^{\lambda t}=0;$$
$$a_2\lambda e^{\lambda t}-k_2a_1e^{\lambda t}-k_2a_2e^{\lambda t}-\ldots-k_2a_ne^{\lambda t}=0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n\lambda e^{\lambda t}-k_na_1e^{\lambda t}-k_na_2e^{\lambda t}-\ldots-k_na_ne^{\lambda t}=0.$$

После сокращения на $e^{\lambda t}$ получаем систему алгебраических уравнений с неизвестными $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$a_1(\lambda+k_1)+a_2k_1+\ldots+a_nk_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2(\lambda+k_2)+\ldots+a_nk_2=0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1k_n+a_2k_n+\ldots+a_n(\lambda+k_n)=0.$$

Для получения нетривиального решения необходимо вычислить корни характеристического уравнения:

$$Det\begin{bmatrix}\lambda+k_1 & k_1 & \ldots & k_1\\ k_2 & \lambda+k_2 & \ldots & k_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ k_n & k_n & \ldots & \lambda+k_n\end{bmatrix}=0;$$

$\lambda_1(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $\lambda_2(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $\ldots$, $\lambda_n(k_1,k_2,\ldots,k_n)$,

где $\lambda_i(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, $i\in\overline{1, n}$ – корни характеристического уравнения, считаем, что имеется n разных корней.

Каждому корню соответствует решение системы алгебраических уравнений:

$$\lambda_1(k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$a_1(k_1+\lambda_1(k_1,k_2,\ldots,k_n))+a_2k_1+\ldots+a_nk_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2(k_2+\lambda_1(k_1,k_2,\ldots,k_n))+\ldots+a_nk_2=0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1k_n+a_2k_n+\ldots+a_n(k_n+\lambda_1(k_1,k_2,\ldots,k_n))=0;$$
$$a_1=f_1^{(1)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$a_2=f_2^{(1)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=f_n^{(1)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$

$$\lambda_2(k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$a_1(k_1+\lambda_2(k_1,k_2,\ldots,k_n))+a_2k_1+\ldots+a_nk_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2(k_2+\lambda_2(k_1,k_2,\ldots,k_n))+\ldots+a_nk_2=0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1k_n+a_2k_n+\ldots+a_n(k_n+\lambda_2(k_1,k_2,\ldots,k_n))=0;$$
$$a_1=f_1^{(2)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$a_2=f_2^{(2)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=f_n^{(2)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_n(k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$a_1(k_1+\lambda_n(k_1,k_2,\ldots,k_n))+a_2k_1+\ldots+a_nk_1=0;$$
$$a_1k_2+a_2(k_2+\lambda_n(k_1,k_2,\ldots,k_n))+\ldots+a_nk_2=0;;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1k_n+a_2k_n+\ldots+a_n(k_n+\lambda_n(k_1,k_2,\ldots,k_n))=0;$$
$$a_1=f_1^{(n)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$a_2=f_2^{(n)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = f_n^{(n)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

Фундаментальное решение однородной системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$x_1 = C_1 f_1^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + C_2 f_1^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n f_1^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t};$$

$$x_2 = C_1 f_2^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + C_2 f_2^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n f_2^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t};$$

…………………………………………

$$x_n = C_1 f_n^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + C_2 f_n^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n f_n^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t},$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – постоянные интегрирования.

Решение исходной неоднородной системы дифференциальных уравнений находится вариацией постоянных:

$$x_1 = C_1(t) f_1^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + C_2(t) f_1^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n(t) f_1^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t};$$

$$x_2 = C_1(t) f_2^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + C_2(t) f_2^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n(t) f_2^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t};$$

…………………………………………

$$x_n = C_1(t) f_n^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + C_2(t) f_n^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n(t) f_n^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t}.$$

Откуда следует система уравнений относительно производных постоянных, которые считаем зависимыми от t:

$$\frac{dC_1}{dt} f_1^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} f_1^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \frac{dC_n}{dt} f_1^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t} = k_1 v;$$

$$\frac{dC_1}{dt} f_2^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} f_2^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \frac{dC_n}{dt} f_2^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t} = k_1 v;$$

…………………………………………

$$\frac{dC_1}{dt} f_n^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} f_n^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots + \frac{dC_n}{dt} f_n^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_n t} = k_1 v.$$

В результате получим

$$\frac{dC_1}{dt} = \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t);$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t);$$

…………………………………………..

$$\frac{dC_n}{dt} = \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t).$$

После интегрирования находим $C_1, C_2, \ldots, C_n$ с точностью до постоянных $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$C_1 = \int \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t)\, dt + A_1 = \Psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n \lambda_2, v, t) + A_1;$$

$$C_2 = \int \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t)\, dt + A_2 = \Psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n \lambda_2, v, t) + A_2;$$

…………………………………………………

$$C_n = \int \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t)\, dt + A_n = \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n \lambda_2, v, t) + A_n.$$

Постоянные интегрирования $A_1, A_2, \ldots, A_n$ определяются из начальных условий: при $t = 0, x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Откуда

$$0 = [\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_1] \times f_1^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) + [\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_2] \times f_1^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) + \ldots + [\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_n] \times f_1^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n);$$

$$0 = [\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_1] \times f_2^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) + [\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_2] \times f_2^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) + \ldots + [\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_n] \times f_2^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n);$$

…………………………………………………

$$0 = [\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_1] \times f_n^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n) + [\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_2] \times f_n^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) + \ldots + [\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t=0) + A_n] \times f_n^{(n)}(\lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

Окончательное решение системы дифференциальных уравнений:

$$x_1 = [\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t) + A_1] \times f_1^{(1)}(\lambda_1, k_1, k_2, \ldots, k_n)\, e^{\lambda_1 t} + [\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, v, t) + A_2] \times f_1^{(2)}(\lambda_2, k_1, k_2, \ldots, k_n) e^{\lambda_2 t} + \ldots +$$

$$+[\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,v,t)+A_n]\times \times f_1^{(n)}(\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n)e^{\lambda_n t};$$
$$x_2=[\Psi_1(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,v,t)+A_1]\times \times f_2^{(1)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n)\,e^{\lambda_1 t}+$$
$$+[\Psi_2(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,v,t)+A_2]\times \times f_2^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,\ldots,k_n)e^{\lambda_2 t}+\ldots+$$
$$+[\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,v,t)+A_n]\times \times f_n^{(n)}(\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n)e^{\lambda_n t};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=[\Psi_1(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,v,t)+A_1]\times \times f_n^{(1)}(\lambda_1,k_1,k_2,\ldots,k_n)\,e^{\lambda_1 t}+$$
$$+[\Psi_2(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,v,t)+A_2]\times \times f_n^{(2)}(\lambda_2,k_1,k_2,\ldots,k_n)e^{\lambda_2 t}+\ldots+$$
$$+[\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,v,t)+A_n]\times \times f_n^{(n)}(\lambda_n,k_1,k_2,\ldots,k_n)e^{\lambda_n t};$$

3 Примеры расчетов

Зависимость объема выходных информационных ресурсов при освещении обстановки и двух источниках имеет следующий вид:

$$x=\frac{v_1v_2\left[1-e^{-kt(v_1-v_2)}\right]}{v_1-v_2e^{-kt(v_1-v_2)}}.$$

В таблице 1 приведены результаты для различного количества информационных ресурсов от источников и при различных коэффициентах пропорциональности скорости формирования выходных данных.

Зависимость времени формирования выходных информационных ресурсов от их объема при освещении обстановки и трех источниках имеет следующий вид:

$$t=\frac{\ln\left(\frac{v_1-x}{v_1}\right)^{v_2-v_3}+\ln\left(\frac{v_2-x}{v_2}\right)^{v_3-v_1}+\ln\left(\frac{v_3-x}{v_3}\right)^{v_1-v_2}}{k\left(v_1-v_2\right)\left(v_2-v_3\right)\left(v_3-v_1\right)}.$$

В таблице 2 приведены результаты для различного количества информационных ресурсов от источников и при различных коэффициентах пропорциональности скорости формирования выходных данных.

Зависимость времени формирования выходных информационных ресурсов от их объема при освещении обстановки и четырех источниках имеет следующий вид:

Таблица 1

Объем выходных данных при двух источниках

t	$v_1=20,\ v_2=15$				$v_1=20,\ v_2=18$			
	$k=0{,}02$	$k=0{,}03$	$k=0{,}04$	$k=0{,}05$	$k=0{,}02$	$k=0{,}03$	$k=0{,}04$	$k=0{,}05$
	x	x	x	x	x	x	x	x
1	4,4	5,9	7,0	8,0	5,2	6,9	8,2	9,2
2	7,0	8,7	9,9	10,8	8,2	10,1	11,4	12,4
3	8,7	10,4	11,5	12,3	10,1	11,9	13,2	14,0
4	9,9	11,5	12,5	13,1	11,4	13,2	14,2	15,0
5	10,8	12,3	13,1	13,6	12,4	14,0	15,0	15,6
6	11,5	12,8	13,5	14,0	13,2	14,6	15,5	16,0
7	12,0	13,2	13,9	14,3	13,7	15,1	15,9	16,4
8	12,5	13,5	14,1	14,4	14,2	15,5	16,2	16,6
9	12,8	13,8	14,3	14,6	14,6	15,8	16,4	16,8
10	13,1	14,0	14,4	14,7	15,0	16,0	16,6	17,0
11	13,3	14,2	14,5	14,7	15,2	16,3	16,8	17,1
12	13,5	14,3	14,6	14,8	15,5	16,4	16,9	17,3
13	13,7	14,4	14,7	14,9	15,7	16,6	17,1	17,4
14	13,9	14,5	14,8	14,9	15,9	16,7	17,2	17,4
15	14,0	14,6	14,8	14,9	16,0	16,8	17,3	17,5
16	14,1	14,6	14,8	14,9	16,2	16,9	17,3	17,6
17	14,2	14,7	14,9	14,9	16,3	17,0	17,4	17,6
18	14,3	14,7	14,9	15,0	16,4	17,1	17,5	17,7
19	14,4	14,8	14,9	15,0	16,5	17,2	17,5	17,7
20	14,4	14,8	14,9	15,0	16,6	17,3	17,6	17,7

Таблица 2

Время формирования выходных данных при трех источниках

x	$v_1=16, v_2=18, v_3=20$				$v_1=16, v_2=20, v_3=24$			
	$k=0{,}002$	$k=0{,}003$	$k=0{,}004$	$k=0{,}005$	$k=0{,}001$	$k=0{,}002$	$k=0{,}003$	$k=0{,}04$
	t	t	t	t	t	t	t	t
1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0	0,0
2	0,2	0,1,	0,1	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1
3	0,3	0,2	0,2	0,1	0,5	0,3	0,2	0,1
4	0,5	0,3	0,3	0,2	0,7	0,4	0,2	0,2
5	0,7	0,5	0,4	0,3	1,0	0,5	0,3	0,3
6	1,0	0,7	0,5	0,4	1,4	0,7	0,5	0,3
7	1,3	0,9	0,7	0,5	1,8	0,9	0,6	0,5
8	1,8	1,2	0,9	0,7	2.4	1,2	0,8	0,6
9	2,4	1,6	1,2	1,0	3,2	1,6	1,1	0,8
10	3,3	2,2	1,6	1,3	4,2	2,1	1,4	1,0
11	4,5	3,0	2,3	1,8	5,6	2,8	1,9	1,4
12	6,6	4,4	3,3	2,6	7,7	3,9	2,6	1,9
13	10,1	6,7	5,1	4,0	11,1	5,5	3,7	2,8
14	17,2	11,5	8,6	6,9	17,1	8,5	5,7	4,3
15	36,0	24,0	18,0	14,4	30,7	15,3	10,2	7,7

$$t=\frac{1}{k}\left[\ln\left(\frac{v_1-x}{v_1}\right)^{-m_1}+\ln\left(\frac{v_2-x}{v_2}\right)^{-m_2}+\right.$$
$$\left.+\ln\left(\frac{v_3-x}{v_3}\right)^{-m_3}+\ln\left(\frac{v_4-x}{v_4}\right)^{-m_4}\right].$$

Коэффициенты m_1, m_2, m_3, m_4 находятся решением следующей системы линейных уравнений:

$$m_1v_2v_3v_4+m_2v_1v_3v_4+m_3v_1v_2v_4+m_4v_1v_3=1;$$
$$-m_1(v_2v_3+v_2v_4+v_3v_4)-m_2(v_1v_3+v_1v_4+v_3v_4)-$$
$$-m_3(v_1v_2+v_1v_4+v_2v_4)-m_4(v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)=0;$$
$$-m_1(v_2+v_3+v_4)-m_2(v_1+v_3+v_4)-$$
$$-\mathrm{m}_3(v_1+v_2+v_4)-m_4(v_1+v_2+v_3)=0;$$
$$m_1+m_2+m_3+m_4=0.$$

При $v_1=2$, $v_2=4$, $v_3=6$, $v_4=8$ получим:

$$192m_1+96m_2+64m_3+48m_4=1;$$
$$104m_1+76m_2+56m_3+44m_4=0;$$
$$18m_1+16m_2+14m_3+12m_4=0;$$
$$m_1+m_2+m_3+m_4=0.$$

Откуда

$m_1=-0{,}02$, $m_2=0{,}06$, $m_3=-0{,}06$, $m_4=0{,}02$.

В качестве независимой переменной берем x, и по формуле при различных значениях коэффициента k находим соответствующие значения времени t. Результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3

Время формирования выходных данных при четырех источниках

x	$k=0{,}001$	$k=0{,}002$	$k=0{,}003$
	t	t	t
1/12	0,2	0,1	0,1
2/12	0,5	0,2	0,2
3/12	0,7	0,4	0,2
4/12	1,0	0,5	0,3
5/12	1,3	0,7	0,4
6/12	1,7	0,8	0,6
7/12	2,1	1,0	0,7
8/12	2,5	1,2	0,8
9/12	3,0	1,5	1,0
10/12	3,5	1,8	1,2
11/12	4,2	2,1	1,4
12/12	4,9	2,4	1,6
13/12	5,7	2,8	1,9
14/12	6,6	3,3	2,2
15/12	7,8	3,9	2,6
16/12	9,1	4,5	3,0
17/12	10,7	5,3	3,6
18/12	12,6	6,3	4,2
19/12	15,1	7,6	5,0
20/12	18,3	9,2	6,1

Заключение

Построены дифференциальные модели процессов обработки информации в органах управления иерархической АСУ. Модель процессов освещения обстановки представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение первой степени с постоянными коэффициентами, решаемое методом неопределенных коэффициентов. Модель построена в предположении, что скорость обработки информации, поступающей в орган управления от подчиненных объектов, пропорциональна объему поступивших данных и каждый выходной информационный ресурс получен в результате обработки соответствующих информационных ресурсов источников. Для числа источников от одного до трех найдены аналитические решения дифференциального уравнения, для произвольного числа источников представлена схема получения результатов на основе решения алгебраических уравнений. Модель процессов планирования представляет собой линейную систему дифференциальных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. Предполагается, что процесс разработки планов в органах управления представляет собой деление определенного объема информационных ресурсов на информационные ресурсы для подчиненных объектов. Скорость формирования информационных ресурсов пропорциональна объему необработанной информации. Неоднородная система уравнений решена методом вариации постоянных фундаментального решения соответствующей однородной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банщиков А.В. Алгоритмы качественного исследования сложных систем // Кибернетика. – 1992. – № 1. – С. 128–138.

2. Коротких В.В. К символическому описанию процессов сложных систем // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 1. – С. 20–31.

3. Растригин Л.А. Экстраполяционные методы проектирования и управления. – М. : Машиностроение, 1986. – 116 с.

4. Иванов А.К. Моделирование иерархических систем. – Ульяновск: УлГТУ, 2014. – 275 с.

5. Иванов А.К., Маклаев В.А., Алексейчик В.В. Модели функциональной архитектуры. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 247 с.

6. Иванов А.К. Математическое моделирование процессов управления. – Ульяновск : УлГТУ, 2002. – 172 с.

7. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М. : Наука, 1987. – 160 с.

8. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. – Нижний Новгород : Издательство Нижегородского университета, 2007. – 421 с.

9. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. – Минск : Издательство «Вышэйшая школа», 1973. – 560 с.

10. Иванов А.К., Кукин Е.С., Куприянов А.А. Анализ функционирования информационных систем // Автоматизация процессов управления. – 2013. – № 1 (31). – С. 66–76.

11. Иванов А.К. Анализ функционирования иерархических АСУ реального времени // Автоматизация процессов управления. – 2013. – № 3 (33). – С. 11–21.

12. Единое информационно-функциональное пространство ВМФ: от идеи до реализации / под общ. ред. В.И. Кидалова. – СПб. : Ника, 2003. – 490 с.

13. Иванов А.К. Математические модели освещения обстановки в иерархической системе управления // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 1 (35). – С. 3–16.

14. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.

15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М. : Наука, 1973. – 831 с.

16. Иванов А.К. Алгоритм планирования в иерархической системе управления // Автоматизация процессов управления. – 2011. – № 1 (23). – С. 62–71.

17. Иванов А.К. Оценка времени планирования в иерархической системе управления // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 4 (38). – С. 22–35.

REFERENCES

1. Banshchikov A.V. Algoritmy kachestvennogo issledovaniia slozhnykh sistem [Algorithms for Qualitative Investigation of Complex Systems]. *Kibernetika* [Cybernetics], 1992, no. 1, pp. 128–138.

2. Korotkikh V.V. K simvolicheskomu opisaniiu protsessov slozhnykh sistem [On Symbolic Process Description of Complex Systems]. *Izvestiia RAN. Tekhnicheskaia kibernetika* [Proceedings of RAS. Engineering Cybernetics], 1994, no. 1, pp. 20–31.

3. Rastrigin L.A. *Ekstrapoliatsionnye metody proektirovaniia i upravleniia* [Extrapolation Methods of Designing and Control]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 116 p.

4. Ivanov A.K. *Modelirovanie ierarkhicheskikh sistem* [Modeling of Hierarchical Systems]. Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2014. 275 p.

5. Ivanov A.K., Maklaev V.A., Alekseychik V.V. *Modeli funktsionalnoi arkhitektury* [Functional Architecture Models]. Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2012. 247 p.

6. Ivanov A.K. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov upravleniia* [Mathematical Modeling of Control Processes]. Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2002. 172 p.

7. Amelkin V.V. *Differentsialnye uravneniia v prilozheniiakh* [Differential Equations in Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 160 p.

8. Ibragimov N.Kh. *Prakticheskii kurs differentsialnykh uravnenii i matematicheskogo modelirovaniia* [A Practical Course of Differential Equations and Mathematical Modeling]. Nizhny Novgorod, Izdatelstvo Nizhegorodskogo universiteta Publ., 2007. 421 p.

9. Ponomarev K.K. *Sostavlenie differentsialnykh uravneni* [Generation of Differential Equations]. Minsk, Vysheishaia shkola Publ., 1973. 560 p.

10. Ivanov A.K., Kukin E.S., Kupriyanov A.A. Analiz funktsionirovaniia informatsionnykh sistem [Analysis of Information Systems Functioning]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2013, no. 1(31), pp. 66–76.

11. Ivanov A.K. Analiz funktsionirovaniia ierarkhicheskikh ASU realnogo vremeni [Operational Analysis of Real-Time Hierarchic C2 Systems]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2013, no. 3(33), pp. 11–21.

12. Edinoe informatsionno-funktsionalnoe prostranstvo VMF: ot idei do realizatsii. Pod obshch. red. V.I. Kidalova [Navy's Single Information-Functional Space: from Idea to Implementation, edited by V.I. Kidalov]. St. Petersburg, Nika Publ., 2003. 490 p.

13. Ivanov A.K. *Matematicheskie modeli osveshcheniia obstanovki v ierarkhicheskoi sisteme upravleniia* [Mathematical Models for Situation Coverage in a Hierarchical Control System]. Avtomatizatsiia protsessov upravleniia [Automation of Control Processes], 2014, no. 1(35), pp. 3–16.

14. Petrovsky I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsialnykh uravnenii*. Pod red. A.D. Myshkisa, O.A. Oleynik [Lectures on Ordinary Differential Equations. Edited by .D. Myshkis, O.A. Oleynik]. Moscow, Izd-vo MGU Publ., 1984. 296 p.

15. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematics Handbook for Researcher and Engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 831 p.

16. Ivanov A.K. Algoritm planirovaniia v ierarkhicheskoi sisteme upravleniia [Planning Algorithm in a Hierarchical Control System]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2011, no. 1(23), pp. 62–71.

17. Ivanov A.K. Otsenka vremeni planirovaniia v ierarkhicheskoi sisteme upravleniia [Planning Time Estimation in a Hierarchical Control System]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2014, no. 4(38), pp. 22–35.