УДК 531.36: 534.1

С.П. Безгласный, В.С. Красников

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОРОТОРНОГО ГИРОСТАТА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ[1]

Безгласный Сергей Павлович, *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» Самарского национального исследовательского университета им. акад. С.П. Королева. Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Имеет статьи в областях теоретической механики, теории устойчивости и управления, динамики космических систем. [e-mail: bezglasnsp@rambler.ru].*

Красников Виктор Сергеевич, *аспирант кафедры «Теоретическая механика» института ракетно-космической техники Самарского национального исследовательского университета им. акад. С.П. Королева. Окончил факультет Летательных аппаратов СГАУ им. акад. С.П. Королева. Имеет статьи в областях теоретической механики, теории устойчивости и управления. [e-mail: walkthrough@mail.ru].*

Аннотация

Исследована задача о построении асимптотически устойчивых программных движений однороторного гиростата, содержащего сферическую полость, целиком заполненную вязкой жидкостью. Гиростат моделируется двумя соединенными твердыми телами с общей осью вращения. Первое тело – носитель – имеет полость, заполненную жидкостью большой вязкости. Второе тело представляет собой динамически симметричный ротор. В работе построены уравнения движения гиростата в виде уравнений Лагранжа второго рода. В уравнениях воздействие жидкости на движение гиростата описывается через кинематические характеристики самого гиростата. Задача о реализации программных движений решена синтезом активных программного и стабилизирующего управлений, приложенных к гиростату. Стабилизирующее управление сконструировано по принципу обратной связи. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием метода предельных функций и предельных систем. Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем управления движущимися объектами, содержащими полость с жидкостью.

Ключевые слова: гиростат, вязкая жидкость, программное движение, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

STABILIZATION OF PROGRAM MOTIONS OF A SINGLE-ROTOR GYROSTAT WITH A CAVITY FILLED WITH VISCOUS FLUID

Sergei Pavlovich Bezglasnyi, *Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the Department of Theoretical Mechanics of Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolev (National Research University); graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University; an author of articles in the field of theoretical mechanics, theory of stability and control, dynamics of space systems. e-mail: bezglasnsp@rambler.ru.*

Viktor Sergeevich Krasnikov, *Postgraduate Student of the Department of Theoretical Mechanics of Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolev (National Research University); graduated from the Faculty of Aircrafts of Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolev; an author of articles in the field of the theoretical mechanics, theory of stability and control. e-mail: walkthrough@mail.ru.*

Abstract

The asymptotically stable program motions problem of a single-rotor gyrostat with a spherical cavity entirely filled with viscous fluid is studied. The gyrostat is modeled by a system of two connected solid bodies with common axis of rotation. The first body is a carrier that has a cavity filled with highly viscous fluid. The second body is a dynamically symmetric rotor. In the paper, the gyrostat motion equations are constructed in the Lagrange equations form of the second kind. In the equations, the influence of fluid on the motion of the gyrostat is described using the kinematic characteristics of the gyrostat. The program motions realization problem is solved by the active program and stabilizing controls attached to the gyrostat. The

1 Авторы выражают искреннюю благодарность Андрееву А.С. и Перегудовой О.А. за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

active stabilizing controls are constructed by the principle of feedback. The task is solved on the basis of a direct method of Lyapunov's functions of stability theory and a method of the limit functions and the limit systems. The results of this paper can be used for designing control systems for objects with cavities filled with fluids.

Key words: gyrostat, viscous fluid, program motion, Lyapunov's function, asymptotic stability.

Введение

Современный интерес к одной из проблем механики – задаче о возмущенном движении гиростата относительно неподвижной точки – определяется ее практическим значением для изучения динамики вращательного движения космических аппаратов. Современными отечественными и зарубежными авторами исследуются задачи об устойчивости положений равновесия и стационарных движений гиростатов на орбитах, об оптимальном управлении, о резонансных и хаотических режимах движений, об ориентации и стабилизации заданных программных движений гиростатов различной структуры, например [1–5].

Обобщением и развитием данной проблемы являются задачи о движениях тел с полостями, содержащими жидкость. Основополагающие исследования теории движения тела с полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, в общей постановке были проведены в 1885 году Н.Е. Жуковским [6]. Наиболее полное изложение многочисленных результатов по динамике с полостями, заполненными жидкостью, дано в книгах [7–9].

Наряду с моделями идеальной жидкости большой интерес вызывают задачи динамики твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью. В монографии Ф.Л. Черноусько [9] предложена модель, в которой влияние жидкости на движение твердого тела сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях движения Эйлера фиктивного тела. Анализу пассивных движений твердого тела с полостью с вязкой жидкостью посвящен ряд работ, в которых изучены вращения по инерции волчка с жидкостью [10], описаны колебания и сферические движения спутников с полостями с вязкой жидкостью под действием моментов гравитации и светового давления [11, 12], представлены вековые эффекты во вращательном движении планеты с жидким вязким ядром [13].

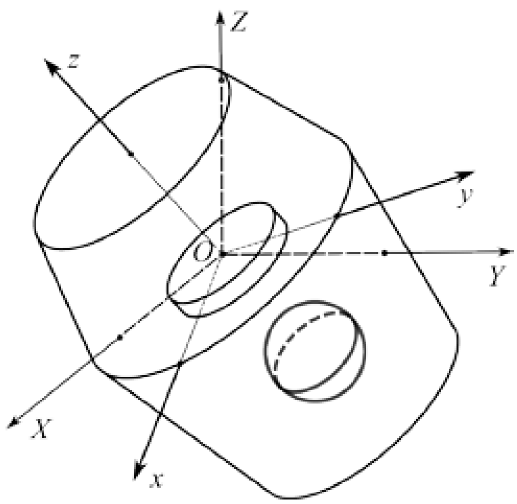

Рис. 1. Гиростат с полостью с жидкостью

Проблема управления сферическими движениями твердых тел с полостями, содержащими жидкость большой вязкости, при помощи приложенных моментов активных сил менее исследована. Например, в монографии [14] представлены приближенные решения возмущенных задач оптимального по быстродействию торможения симметричного и несимметричного тел с полостью с вязкой жидкостью. В работе [15] исследована задача оптимального торможения симметричного и несимметричного тел с полостями с жидкостью в сопротивляющейся среде. Авторы статей [16, 17] предложили решение задачи о стабилизации стационарных вращений линейным управлением по обратной связи для уравновешенного однороторного гиростата с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.

Ниже исследуются сферические движения относительно центра масс однороторного гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Ставится и решается задача об определении активных управляющих моментов, приложенных к гиростату и реализующих его асимптотически устойчивые произвольные заданные программные движения. Решение проводится построением активного управления, представляющего собой совокупность программного управления и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Исследование программного движения гиростата сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы, его стабилизация проводится на основе прямого метода Ляпунова классической теории устойчивости. С помощью метода предельных функций и предельных систем [18] используются функции Ляпунова со знакопостоянными производными, что позволяет строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций. Полученные результаты проведенных исследований могут быть использованы при проектировании систем управления подвижными механизмами, в том числе летающими объектами, содержащими элементы с жидким наполнением.

1 Постановка задачи

Рассматривается движение относительно общего центра масс O однороторного гиростата со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью. Гиростат представляет собой механическую систему, которая состоит из двух тел. Динамически симметричный абсолютно твердый ротор удерживается в твердых подшипниках на другом твердом теле, называемом несущим телом.

Пусть $OXYZ$ – абсолютная неподвижная система координат. Введем неинерциальные системы координат: $Oxyz$ – неизменно связанная с несущим телом, и $O\alpha\beta\gamma$ – неизменно связанная с ротором. Относительное движение ротора вокруг несущего тела характеризуется углом δ и скоростью относительного закручивания $\dot{\delta} = \sigma$, направленной по оси Oz (рис. 1). Ориентация несущего тела с ротором относительно системы $OXYZ$ определяется углами Эйлера φ, θ, ψ, они же и угол относительного закручивания принимаются за компоненты вектора обобщенных координат $\boldsymbol{q} = (\psi, \theta, \varphi, \delta)^{\mathrm{T}}$, где $(\ )^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования.

Главные моменты инерции тела с жидкостью, вычисленные в связанной системе координат $Oxyz$, обозначаются A_1, B_1, C_1; главные моменты инерции ротора в связанной системе координат $O\alpha\beta\gamma$, обозначаются I_1, I_2, I_3. Так как ротор динамически симметричен, то $I_1 = I_2$. Обозначим $A = A_1 + I_1$, $B = B_1 + I_2$, $C = C_1 + I_3$.

Пусть жидкость в полости несущего тела имеет большую кинематическую вязкость $\nu^{-1} << 1$. Пусть форма полости представляет собой сферу.

В настоящей работе будут исследоваться сферические движения рассмотренной механической системы относительно общего центра масс. Ставится задача о реализации внешними управляющими силами, прикладываемыми к системе, асимптотически устойчивых произвольно заданных программных движений.

Программным движением будет называться пара векторных функций $\left(\mathbf{r}^*(t), \dot{\mathbf{r}}^*(t)\right)$, где $\mathbf{r}^*(t)$ – ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функция размерности $n = 4$, описывающая заданное угловое движение гиростата относительно общего центра масс O и вращение ротора относительно носителя.

В общем случае вектор-функция $\mathbf{r}^*(t)$, задающая программное движение, может не являться решением системы дифференциальных уравнений, описывающих движения управляемой механической системы. Поэтому управления мы разделим на две группы: силы, реализующие программное движение, и силы, стабилизирующие его.

2 Уравнения движения гиростата

Пусть $\omega = (p, q, r)^{\mathrm{T}}$ – вектор абсолютной угловой скорости несущего тела. Кинетическая энергия гиростата

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2I_3 r\sigma_3 + I_3\sigma_3^2, \tag{1}$$

с учетом кинематических уравнений Эйлера

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi, \end{cases} \tag{2}$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} 2T = &\left(A\sin^2\theta \sin^2\varphi + B\sin^2\theta\cos^2\varphi + C\cos^2\theta\right)\dot\psi^2 + \\ &+ \left(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi\right)\dot\theta^2 + C\dot\varphi^2 + \\ &+ 2\left(A - B\right)\dot\psi\dot\theta \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi + \\ &+ 2C\dot\psi\dot\varphi\cos\theta + 2I_3\dot\psi\sigma_3\cos\theta + 2I_3\dot\varphi\sigma_3 + I_3\sigma_3^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Тем самым она является квадратичной формой обобщенных скоростей $2T = 2T_2 = \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, задаваемой симметричной матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \left\{a_{ij}\right\}$ с элементами:

$$\begin{aligned} &a_{11} = A\sin^2\theta\sin^2\varphi + B\sin^2\theta\cos^2\varphi + C\cos^2\theta, \\ &a_{12} = a_{21} = \left(A - B\right)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi, \\ &a_{13} = a_{31} = C\cos\theta,\ a_{14} = a_{41} = I_3\cos\theta, \\ &a_{22} = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi,\ a_{23} = a_{32} = 0, \\ &a_{24} = a_{42} = 0,\ a_{33} = C,\ a_{34} = a_{43} = I_3,\ a_{44} = I_3\,. \end{aligned} \tag{4}$$

С учетом структуры кинетической энергии (3), запишем уравнения Лагранжа второго рода в матричном виде:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{Q}^e + \mathbf{Q}^p + \mathbf{Q}^s, \tag{5}$$

где через $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ обозначен вектор-столбец с компонентами, вычисляемыми по формуле:

$$\Lambda_i = \sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot q_k \dot q_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot q_k \dot q_j,\ i = \overline{1,4}. \tag{6}$$

Считаем, что вектор обобщенных сил в правой части уравнений (5) представляет собой сумму обобщенного гиростатического момента $\mathbf{Q}^e = \left(Q^e_\psi, Q^e_\theta, Q^e_\varphi, Q^e_\delta\right)^{\mathrm{T}}$, управляющих программных воздействий $\mathbf{Q}^p = \left(Q^p_\psi, Q^p_\theta, Q^p_\varphi, Q^p_\delta\right)^{\mathrm{T}}$ для реализации программных движений и стабилизирующих обобщенных сил $\mathbf{Q}^s = \left(Q^s_\psi, Q^s_\theta, Q^s_\varphi, Q^s_\delta\right)^{\mathrm{T}}$.

Запишем гиростатический момент жидкости $\mathbf{Q}^e$, действующий на носитель гиростата:

$$\begin{cases} Q^e_\psi = m_x \sin\theta\sin\varphi + m_y\sin\theta\cos\varphi + m_z\cos\theta, \\ Q^e_\theta = m_x\cos\varphi - m_y\sin\varphi, \\ Q^e_\varphi = m_z, \\ Q^e_\delta = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Его компоненты согласно модели Ф.Л. Черноусько [9] можно выразить через компоненты абсолютной угловой скорости несущего тела, и аналогично работам [15, 18] величины m_x, m_y, m_z приближенно вычисляются по формулам:

$$m_x = \frac{\varepsilon P}{ABC_1}\left[p\left\{q^2\left(C_1 - A - B\right)\left(B - A\right)B + r^2\left(C_1 + A - B\right)\left(A - C\right)C_1\right\} - C_1 I_3^2\sigma^2 p + C_1\left(B - 2C\right)I_3 pr\sigma\right];$$

$$m_y = \frac{\varepsilon P}{ABC_1}\left[q\left\{r^2\left(A - C - B\right)\left(C - B\right)C_1 + p^2\left(A - C_1 + B\right)\left(B - A\right)A\right\} - C_1 I_3^2 q\sigma^2 + C_1\left(A - 2C\right)I_3 qr\sigma\right];$$

$$m_z = \frac{\varepsilon P}{ABC_1}\left[p^2\left(B - A - C_1\right)A\left\{(A - C)r - I_3\sigma\right\} + q^2 B\left(B - A + C_1\right)\left\{(C - B)r + I_3\sigma\right\}\right],$$

где $\varepsilon=\rho\nu^{-1}$ – малый параметр системы, ρ – плотность вязкой жидкости в полости несущего тела, ν – кинематическая вязкость жидкости. Константа $P=\dfrac{8\pi a^7}{525}$ задает тензор вязких сил в случае сферической формы радиуса a полости с жидкостью.

Вычислив величины (6), получим уравнения движения гиростата в скалярном виде:

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta+C\cos^2\theta\right)\ddot{\psi}+(A-B)\ddot{\theta}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi+C\ddot{\varphi}\cos\theta+\\
&+\left(A\sin^2\varphi+Bcos^2\varphi-C\right)\dot{\psi}\dot{\theta}\sin 2\theta+(A-B)\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin^2\theta\sin 2\varphi+(A-B)\dot{\theta}^2\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi+\\
&+(A-B)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos 2\varphi\sin\theta-C\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta-I_3\dot{\theta}\dot{\delta}\sin\theta=Q_\psi^e+Q_\psi^p+Q_\psi^s;\\
&(A-B)\ddot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi+\left(A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi\right)\ddot{\theta}-\left(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi-C\right)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+\\
&+(A-B)\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos2\varphi\sin\theta+C\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta+2(B-A)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi+I_3\dot{\psi}\dot{\delta}\sin\theta=Q_\theta^e+Q_\theta^p+Q_\theta^s;\\
&C\ddot{\psi}\cos\theta+C\ddot{\varphi}+I_3\ddot{\delta}-(A-B)\dot{\psi}^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi-C\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta-(A-B)\dot{\psi}\dot{\theta}\cos2\varphi\sin\theta-\\
&-(B-A)\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi=Q_\varphi^e+Q_\varphi^p+Q_\varphi^s;\\
&I_3\ddot{\psi}\cos\theta+I_3\ddot{\varphi}+I_3\ddot{\delta}-I_3\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta=Q_\delta^e+Q_\delta^p+Q_\delta^s.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

3 Построение программных и стабилизирующих управлений

Пусть необходимо, чтобы гиростат с полостью с вязкой жидкостью совершал заданное программное движение $\mathbf{r}(t)=(\psi^*(t),\theta^*(t),\varphi^*(t),\delta^*(t))^T$, где $\psi^*(t),\theta^*(t),\varphi^*(t),\delta^*(t)$ – заданные функции времени, описывающие угловое движение гиростата относительно общего центра масс. Подставляя программное движение $\mathbf{r}(t)$ в уравнение (5) при условии $\mathbf{Q}^s=0$, определяются управляющие силы, реализующие это движение:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}^p=\mathbf{A}\left(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t)\right)\ddot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\Lambda}\left(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t)\right)-\\
-\mathbf{Q}^e\left(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t)\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Подстановкой обобщённых сил (9) в уравнение (5) или систему (8) записываются уравнения движения управляемой системы, для которой программное движение является решением. Однако в общем случае вопрос об устойчивости такой системы является открытым. В связи с этим возникает задача о его стабилизации, состоящая в определении активных обобщенных сил $\mathbf{Q}^s$, которые должны обеспечить асимптотическую устойчивость по Ляпунову заданного программного движения.

Решение задачи о стабилизации программных движений, как, например, в работах [19–21], сводится к задаче о стабилизации нулевого решения неавтономной механической системы. Такая формулировка позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [22].

Введя отклонения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}=\mathbf{q}-\mathbf{r}(t)=\\
&=(\psi-\psi^*(t),\ \theta-\theta^*(\mathrm{t}),\ \varphi-\varphi^*(t),\ \delta-\delta^*(\mathrm{t}))^{\mathrm{T}}=\\
&=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

запишем уравнения возмущенного движения гиростата

$$
\mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}}+\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}'+\boldsymbol{\Lambda}''=\mathbf{Q}^e+\mathbf{Q}^p+\mathbf{Q}^s,
\tag{10}
$$

в которых обобщенные моменты вычислены по формулам (7) и (9), а через $\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}',\boldsymbol{\Lambda}''$ обозначены соответственно квадратичная, линейная и нулевая по скоростям отклонений векторные формы с компонентами:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_i&=\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j,\quad i=\overline{1,4};\\
\Lambda_i'&=\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{r}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{r}_j+\\
&\quad+\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{x}_j,\quad i=\overline{1,4};\\
\Lambda_i''&=\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j,\quad i=\overline{1,4}.
\end{aligned}
$$

Явный вид этих компонент и скалярный вид уравнений возмущенного движения гиростата не приводится в силу их громоздкости.

Задачу о построении стабилизирующего управления будем решать прямым методом Ляпунова с использованием положительно определенной функции Ляпунова:

$$
V(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}},
\tag{11}
$$

где $\mathbf{C}$ – ограниченная неисчезающая постоянная симметричная матрица размера 4×4. Производная по времени функции (11) в силу уравнения (10) записывается равенством

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}=\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\Bigg(&\mathbf{C}\mathbf{x}-\boldsymbol{\Lambda}''-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{x}}-\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{x}}\right)\dot{\mathbf{r}}+\\
&+\left(\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{x}}\right)\dot{\mathbf{x}}-\mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}}+\frac{1}{2}\mathbf{N}+\mathbf{Q}^e+\mathbf{Q}^p+\mathbf{Q}^s\Bigg),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где обозначено

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}N = -\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{x}}\right)\dot{\mathbf{x}},$$

$$N_i = \sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j,$$

$$i=\overline{1,4}.$$

Стабилизирующее управление выберем в виде:

$$\mathbf{Q}^s = -\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda}'' + {} + \mathbf{\Lambda}' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}^e - \mathbf{Q}^p, \qquad (13)$$

где матрица $\mathbf{D}$ является ограниченной и неисчезающей и выбирается согласно неравенству $d_0\mathbf{E} \le \mathbf{D} \le d_1\mathbf{E}$, $(0 < d_0 < d_1 - \mathrm{const})$, символом $\mathbf{E}$ обозначена единичная матрица. Слагаемое $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{x}}$ – вектор с компонентами $\sum_{j,k=1}^{4}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j$, $i=\overline{1,4}$. Тогда производная (12) функции Ляпунова в окрестности нулевого решения имеет оценку

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} \le -d_0\left\|\dot{\mathbf{x}}\right\|^2 \le 0$$

и является отрицательно определенной функцией по скоростям. Обоснование асимптотической устойчивости программного движения производится с помощью теоремы из работы [22], развивающей метод функции Ляпунова и позволяющей использовать функции Ляпунова не со знакоопределенной, а со знакопостоянной производной. Множество $\{\dot{\mathbf{x}}=0\}$ не содержит решений предельной в смысле [22] к системе (10) со стабилизирующим управлением (13) системы, кроме тривиального решения $\mathbf{x}=\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$. Таким образом, на основе теоремы из [22] имеет место асимптотическая устойчивость исследуемого программного движения $\mathbf{r}(t)=(\psi^*(t), \theta^*(t), \varphi^*(t), \delta^*(t))^T$.

Заключение

В работе решена задача о построении асимптотически устойчивых программных движений однороторного гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно его центра масс. Получено множество управлений программных и стабилизирующих управлений, реализующих и делающих асимптотически устойчивыми многообразие произвольно заданных программных движений гиростата с полостью. Управление было построено аналитически в явном виде в классе непрерывных функций. Исследуемая задача решалась на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с применением метода предельных функций и предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянной производной.

Полученные в работе результаты развивают и обобщают соответствующие результаты из работ [9, 16–18] и другие и могут быть использованы при проектировании систем управления подвижными механизмами, в том числе летающими объектами, содержащими элементы с жидким наполнением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сазонов В.В. Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Космические исследования. – 2013. – Т. 51, № 2. – С. 145–158.

2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 328 с.

3. Elipe A., Lanchares V. Exact solution of a triaxial gyrostat with one rotor // Celestial mechanics & dynamical astronomy. – 2008. – V. 101, Issue 1–2. – pp. 49–68.

4. Безгласный С.П. Активная ориентация гиростата с переменными моментами инерции // ПММ. – 2014. – Т. 78, вып. 6. – С. 766–777.

5. Безгласный С.П., Худякова М.А. Об ориентации гиростата с переменными моментами инерции // Автоматизация процессов управления. – 2013. – № 2 (32). – С. 22–28.

6. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 2. – М.; Л. : Гостехиздат, 1949. – С. 152–309.

7. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М. : Наука, 1965. – 439 с.

8. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. – М. –Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2014. – 496 с.

9. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М. : ВЦ АН СССР, 1968. – 232 с.

10. Вильке В.Г. Эволюция движения симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 1993. – № 1. – С. 71–76.

11. Осипов В.З., Суликашвили Р.С. О колебаниях твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите // Тр. ин-та. Тбилис. мат. ин-т Груз. ССР. – 1978. – Т. 58. – С. 175–186.

12. Быстрые вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и светового давления / Л.Д. Акуленко [и др.] // Космические исследования. – 2011. – Т. 49, вып. 5. – С. 453–463.

13. Сидоренко В.В. Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астрономический вестник. – 1993. – Т. 27, № 2. – С. 119–127.

14. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М. : Наука, 1987. – 368 с.

15. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений несимметричного тела

с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. ТиСУ. – 2012. – № 1. – С. 40–49.

16. Алексеев А.В., Безгласный С.П., Красников В.С. Стабилизация стационарных движений однороторного гиростата с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости // Вестник Самарского гос. аэрокосмического университета им. акад. С.П. Королёва (национального исследовательского университета). – 2012. – № 5–1 (36). – С. 13–18.

17. Безгласный С.П. Стабилизация стационарных движений гиростата с полостью, содержащей вязкую жидкость // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2014. – № 4. – С. 7–10.

18. Bezglasnyi S., Krasnikov V. Realization of Gyrostat Program Motion with Cavity Filled with Viscous Fluid // Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists 2016, 16-18 March. – Hong Kong, 2016. – pp. 191–194.

19. Андреев А.С., Бойкова Т.А. Об устойчивости неустановившегося движения механической системы // ПММ. – 2004. – Т. 68, вып. 4. – С. 678–686.

20. Безгласный С.П., Мысина О.А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Известия Саратовского университета. Новая Серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8, № 4. – С. 44–52.

21. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы // АиТ. – 2016. – № 3. – С. 66–80.

22. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. – 1984. – Т. 48, вып. 2. – С. 225–232.

REFERENCES

1. Sazonov V.V. Periodicheskie dvizheniia sputnika-girostata otnositelno tsentra mass pod deistviem gravitatsionnogo momenta [Periodic Motions of a Satellite-Gyrostat Relative to its Center of Mass under the Action of Gravitational Torque]. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 2013, vol. 51, no. 2, pp. 145–158.

2. Chernousko F.L., Ananievskii I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniia nelineinymi mekhanicheskimi sistemami* [Control Methods for Nonlinear Mechanical Systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 328 p.

3. Elipe A., Lanchares V. Exact Solution of a Triaxial Gyrostat with one Rotor. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy,* 2008, vol. 101, iss. 1–2, pp. 49–68.

4. Bezglasnyi S.P. Aktivnaia orientatsiia girostata s peremennymi momentami inertsii [Active Orientation of a Gyrostat with Variable Moments of Inertia]. *PMM* [J. Appl. Math. Mech.], 2014, vol. 78, iss. 6, pp. 766–777.

5. Bezglasnyi S.P., Khudiakova M.A. Ob orientatsii girostata s peremennymi momentami inertsii [Gyrostat orientation with Variable Moment of Inertia]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2013, no. 2 (32), pp. 22–28.

6. Zhukovskii N.E. O dvizhenii tverdogo tela, imeiushchego polosti, napolnennye odnorodnoi kapelnoi zhidkostiu [Motions of a Solid Having Cavities Filled with Homogeneous Dropping Liquid]. *Sobr. soch.* T 2.[Collected Edition, vol. 2]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949, pp. 152–309.

7. Moiseev N.N., Rumiantsev V.V. *Dinamika tela s polostiami, soderzhashchimi zhidkost* [Dynamics of Solids Having Cavities Filled with Liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 439 p.

8. Markeev A.P. *Dinamika tela, soprikasaiushchegosia s tverdoi poverkhnostiu* [Dynamics of Solids Being in Contact with a Solid Surface]. Moscow, Izhevsk, Institut kompiuternykh issledovanii Publ., 2014. 496 p.

9. Chernousko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostiami, soderzhashchimi viazkuiu zhidkost* [Motions of a Solid Having Cavities Filled with Viscous Fluid]. Moscow, Computer Sci. Department of the USSR AS Publ., 1968. 232 p.

10. Vilke V.G. Evoliutsiia dvizheniia simmetrichnogo tverdogo tela so sfericheskoi polostiu, zapolnennoi viazkoi zhidkostiu [Motion Evolution of a Solid with Spherical Cavities Filled with Viscous Fluid]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics and Mechanics Bull.], 1993, no. 1, pp. 71–76.

11. Osipov V.Z., Sulikashvili R.S. O kolebaniiakh tverdogo tela so sfericheskoi polostiu, tselikom zapolnennoi viazkoi zhidkostiu, na ellipticheskoi orbite [On Vibrations of Solids with a Spherical Cavity Filled with Viscous Fluid on Elliptic Orbit]. *Tr. in-ta. Tbilis. mat. in-t Gruz. SSR* [Proc. of Tbilisi Mathematical Institute of the Georgian SSR]. 1978, vol. 58, pp. 175–186.

12. Akulenko L.D. et al. Bystrye vrashcheniia sputnika s polostiu, zapolnennoi viazkoi zhidkostiu, pod deistviem momentov sil gravitatsii i svetovogo davleniia [Rapid Rotations of a Satellite with a Cavity Filled with Viscous Fluid under the Action of Moments of Gravity a Light Pressure Forces]. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 2011, vol. 49, iss. 5, pp. 453–463.

13. Sidorenko V.V. Evoliutsiia vrashchatelnogo dvizheniia planety s zhidkim iadrom [Secular Changes in the Rotational Motion of Planets with a Liquid Core]. *Astronomicheskii vestnik* [Solar System Research], 1993, vol. 27, no. 2, pp. 119–127.

14. Akulenko L.D. *Asimptoticheskie metody optimalnogo upravleniia* [Asymptotical Methods for Optimizing Control]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 368 p.

15. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Rachinskaia A.L. Optimalnoe tormozhenie vrashchenii nesimmetrichnogo tela s polostiu, zapolnennoi viazkoi zhidkostiu, v soprotivliaiushcheisia srede [Optimal Deceleration of Rotations of an Asymmetric Body with a Cavity Filled with Viscous Fluid in a Resistive Medium]. *Izv. RAN. TiSU* [Journal of Computer and Systems Sciences International], 2012, no. 1, pp. 40–49.

16. Alekseev A.V., Bezglasnyi S.P., Krasnikov V.S. Stabilizatsiia statsionarnykh dvizhenii odnorotornogo girostata s polostiu, zapolnennoi zhidkostiu bolshoi

viazkosti [Stabilization of Steady Motions of a Single Rotor Gyrostat with a Cavity Filled with a Liquid of High Viscosity]. *Vestnik Samarskogo gos. aerokosmicheskogo universiteta im. akad. S.P. Koroleva (natsionalnogo issledovatelskogo universiteta)* [Vestnik of Samara Aerospace University], 2012, no. 5–1 (36), pp. 13–18.

17. Bezglasnyi S.P. Stabilizatsiia statsionarnykh dvizhenii girostata s polostiu, soderzhashchei viazkuiu zhidkost [Stabilization of Stationary Motions of a Gyrostat with a Cavity Filled with Viscous Fluid]. *Izv. vuzov. Aviatsionnaia tekhnika* [Russian Aeronautics], 2014, no. 4, pp. 7–10.

18. Bezglasnyi S., Krasnikov V. Realization of Gyrostat Program Motion with Cavity Filled with Viscous Fluid. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science. Proc. of the Int. Multi-Conf. of Engineers and Computer Scientists 2016, 16-18 March*. Hong Kong, 2016, pp. 191–194.

19. Andreev A.S., Boikova T.A. Ob ustoichivosti neustanovivshegosia dvizheniia mekhanicheskoi sistemy [On the Stability of Stationary Motions of a Mechanical System]. *PMM* [J. Appl. Math. Mech.], 2004, vol. 68, iss. 4, pp. 678–686.

20. Bezglasnyi S.P., Mysina O.A. Stabilizatsiia programmnykh dvizhenii tverdogo tela na podvizhnoi platforme [The Stabilization of Program Motions of a Rigid Body on a Moving Platform]. *Izvestiia Saratovskogo universiteta. Novaia Seriia. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2008, vol. 8, no. 4, pp. 44–52.

21. Andreev A.S., Peregudova O.A. O stabilizatsii programmnykh dvizhenii golonomnoi mekhanicheskoi sistemy [On Stabilization of Program Motions of a Holonomic System]. *AiT* [Automation and Remote Control], 2016, no. 3, pp. 66–80.

22. Andreev A.S. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti i neustoichivosti nulevogo resheniia neavtonomnoi sistemy [Asymptotical Stability and Instability of Zeroth Solution of a Non-autonomous System]. *PMM* [J. Appl. Math. Mech.], 1984, vol. 48, iss. 2, pp. 225–232.