УДК 519.6

Г.Р. Кадырова

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПОШАГОВОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗА ПОВЕДЕНИЯ ОБЪЕКТА

Кадырова Гульнара Ривальевна, *кандидат технических наук, окончила радиотехнический факультет Ульяновского политехнического института. Доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ. Имеет статьи, монографии, учебные пособия в области статистического моделирования, программных информационных систем. [e-mail: g.kadyrova1403@mail.ru, gulya@ulstu.ru].*

Аннотация

В статье представлен алгоритм модифицированной версии метода пошаговой регрессии, реализованный в статистическом пакете «Система поиска оптимальных регрессий» (СПОР). Данный метод используется для поиска оптимальной структуры модели процессов или функционирования технических объектов, предназначенной, помимо их описания, для оптимизации, управления и прогноза.

Основным инструментом положительного воздействия на прогностические свойства модели является алгоритм поиска ее оптимальной структуры. Обычно при невозможности применить полный однокритериальный перебор структур прибегают к тому или иному виду неполного перебора. При этом регулярный или случайный перебор в условиях ограничения типа (≤) на количество слагаемых в модели обеспечивает достаточно эффективный учет систематических составляющих.

Проведенные исследования позволяют считать данный метод перспективным математическим подходом для сокращения размерности модели и повышения точности определения ее параметров и прогноза.

Ключевые слова: регрессионное моделирование, прогнозирование, методы структурной идентификации, пошаговая регрессия, меры качества, статистический пакет.

MODIFICATION OF THE STEP-BY-STEP REGRESSION METHOD FOR MATHEMATICAL MODELS OF THE OBJECT BEHAVIOR PREDICTION

Gulnara Rivalevna Kadyrova, *Candidate of Engineering; graduated from the Faculty of Radioengineering of Ulyanovsk Polytechnic Institute; Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Informatics of Ulyanovsk State Technical University; an author of monographs, textbooks, and articles in the field of statistical modeling, software information systems. e-mail: gulya@ulstu.ru.*

Abstract

The article presents the algorithm of the modified version of a step-by-step regression method realized in a statistical package ‘System for Searching Optimum Regressions’ (SSOR). The method is used for searching an optimal structure of a model of processes or technical objects functioning, intended for optimization, management, and prediction besides their description.

The main tool of a positive impact on prognostic properties of a model is the algorithm of searching its optimal structure. Usually, it is impossible to apply the complete one-criteria search of structures, so, some type of inexact search should be provided. At the same time, the regular or casual search in the conditions of restriction like (≤) on quantity of items in a model provides rather efficient accounting of systematic components.

The conducted researches allow to consider the method as a perspective mathematical approach to reduction of a model dimension and increase an accuracy of determination of its parameters and the prediction.

Key words: regression modeling, prediction, methods of structural identification, step-by-step regression, quality measure, statistical package.

Введение

Последние годы характеризуются широким проникновением методов прикладной статистики в самые различные области науки, техники и производства. Важную роль при этом играет необходимость иметь математические модели процессов или функционирования технических объектов, предназначенные, помимо их описания, для оптимизации, управления и прогноза.

При разработке и использовании моделей прогноза основной целью является достижение свойств наилучшей линейной оценки (состоятельности, несмещенности, эффективности) для оценки прогнозируемой величины $\hat{Y}$. Эти свойства в первую очередь обеспечиваются подбором соответствующей (оптимальной по заданному критерию) структуры модели из множества (на основе постулируемой модели) конкурирующих структур. Таким образом, решается задача не только параметрической, но и структурной идентификации.

В подавляющем числе случаев постулируемая модель

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{p-1} x_{i,p-1} + \varepsilon; \quad i = \overline{i,n} \qquad (1)$$

не является оптимальной (адекватной) наблюдениям. Если считать линейную зависимость (1) подходящей, то основной проблемой будет размерность модели.

С одной стороны, опасаясь потерять существенные факторы, исследователь старается включить в правую часть модели (1) их как можно больше. Поэтому, как правило, модель является переопределенной, что приводит: а) к экономическим издержкам, б) к включению неинформативных, малоинформативных и дублирующих переменных. Последнее приводит к возрастанию дисперсии прогноза $\hat{Y}$ для модели прогноза и к понижению точности оценивания β-коэффициентов в параметрической модели.

С другой стороны, недоопределенная модель, не содержащая значимых факторов, приводит к систематической ошибке Δ в прогнозе. И здесь возникает проблема соизмерения смещения Δ с величиной случайной ошибки прогноза в переопределенной модели. Чаще всего случайная ошибка оказывается большей, чем систематическая. К тому же в некоторых методах оценивания, отличных от метода наименьших квадратов (МНК), модель намеренно обременяется смещением для уменьшения ошибки прогноза.

Таким образом, выдвигая гипотезу (1), исследователь сталкивается с множеством конкурирующих моделей (структур), содержащих $x_0 (x_0 = 1)$ и некоторое количество регрессоров из множества $\{x_1, \ldots, x_{p-1}\}$. Так как каждая переменная $x_j \left(j = \overline{1, p-1}\right)$ может либо входить в уравнение, либо нет, то всего получается 2^{p-1} моделей. Из этого множества структур необходимо выбрать по заданному критерию качества одну или несколько конкурирующим моделей.

Если используется стандартный регрессионный анализ (РА), то в прикладной статистике после анализа модели в целом и отдельных ее слагаемых прибегают к однокритериальному поиску оптимальной структуры. При невозможности применить полный перебор структур используют тот или иной известный вид неполного перебора по одному из критериев качества модели $(\sigma, R, F$ и т. д.$)$ [1].

Наиболее предпочтительными для структурной идентификации является ошибка на контрольной выборке. Данный критерий в максимальной степени отражает реальные случайные и систематические ошибки прогноза (отклика) и не имеет систематического хода по отношению к размерности. Ошибка на контрольной выборке, естественно, в той степени «истинна», в какой «истинны» контрольные значения y_i, обремененные, в свою очередь, разнообразными ошибками.

Применение подхода регрессионного моделирования (РМ) [2] требует разработки многокритериальных алгоритмов поиска. В общем случае для получения адекватной модели обработки данных необходимо решить многокритериальную задачу оптимизации путем последовательной адаптации к нарушениям условий РА–МНК.

В ряде случаев достаточно эффективными оказываются двухкритериальные методы. По литературным источникам известен только один метод, чрезвычайно трудный для программной реализации, а именно: метод пошаговой регрессии (ПР) (схема включения с исключением). Реализованная в рамках СПОР [3–5] модифицированная версия этого подхода предусматривает использование, помимо F-критерия, ряд других мер сравнения [6, 7].

1 Процедура ПР

Пошаговая множественная регрессия является статистическим методом анализа связи между зависимой переменной (y) и множеством независимых переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и осуществляет выбор независимых переменных в порядке их значимости. Критерий значимости основывается на уменьшении сумм квадратов. Независимая переменная, наиболее влияющая на это уменьшение на данном шаге, вводится в регрессию. В качестве зависимой переменной может быть принята любая переменная из исходного множества. Некоторое множество переменных может быть принудительно введено в регрессию, и некоторое другое множество может быть отброшено.

В основе рассматриваемой процедуры лежит алгоритм пошаговой множественной регрессии [8], который значительно расширен и модернизирован.

Одним из существенных элементов модернизации явилось добавление в алгоритм операции исключения регрессора, включенного в модель на данном шаге и ухудшающего значение критерия, по которому производится поиск оптимальной модели. В качестве критерия поиска оптимальной модели может использоваться как ошибка на обучающей выборке, так ошибка на контрольной выборке. Таким образом, в модель добавляется регрессор, который вызывает наибольшее уменьшение остаточной суммы квадратов и, если его включение ухудшает критерий, по которому происходит поиск, то он исключается из модели и из дальнейшего рассмотрения. Если в качестве критерия поиска задана t-статистика, то на каждом шаге работы алгоритма анализируются коэффициенты модели на значимость по t-критерию. В случае появления на i-м шаге незначимого коэффициента переменная, имеющая наименьшее значение t-критерия для своего коэффициента, исключается из числа переменных, вводимых в модель.

В алгоритме также предусматривается режим последовательного включения всех регрессоров в модель в порядке их значимости для оценки влияния регрессоров на зависимую переменную (режим отсутствия критерия поиска).

Реализованный метод пошаговой регрессии позволяет по требованию пользователя вычислить ошибку на «скользящей» контрольной выборке [1] для найденной оптимальной модели.

Основной функцией в рассматриваемой процедуре является функция STEP, которая выполняет анализ пошаговой множественной регрессии зависимой переменной и множества независимых переменных. На каждом шаге регрессии $i=\overline{1,q}$, где q – число независимых переменных, применяется сокращенный метод Дулиттла для вычисления статистик.

Для отбора в уравнение регрессии независимых переменных вводится константа PCT, которая принимает значение в интервале [0,1]. При PCT = 0 все переменные будут включены в уравнение регрессии, при PCT = 1 ни одна из переменных не будет включена в уравнение, а при 0 < PCT < 1 в уравнение войдут лишь те переменные, для которых квадрат частного коэффициента корреляции не меньше PCT. Однако если это условие нарушается, а пользователь все же желает ввести переменную, то он должен в векторе кодов переменных задать для этой переменной код 1. Если же по каким-либо причинам он не желает вводить некоторую переменную в уравнение регрессии, то должен присвоить ей код 2. Все это предоставляет исследователю возможность обрабатывать большую матрицу данных, часть из столбцов которой не используется в задаче без дополнительного формирования матрицы X специально для конкретного уравнения регрессии.

Алгоритм ПР заключается в следующем. Выбираются независимые переменные, входящие в регрессию. Во-первых, при вычислении величины уменьшения сумм квадратов по каждой переменной

$$C_j=\frac{s_{jy}^2}{s_{jj}}, \tag{2}$$

где $j=\overline{1,q}$ – индексы для независимых переменных (j не равны индексам устраненных переменных и переменных, введенных перед i-м шагом);

y – зависимая переменная;

s_{jj}, s_{jy} – элементы матрицы S – сумм взаимных отклонений от среднего (вычисляются в процедуре CORR).

И, во-вторых, при отыскании наибольшего значения C_j.

Ряд $S_i=C_j$ обозначает суммы квадратов, которые будут уменьшены на i-м шаге.

Отношение S_i ко всей сумме получаем как

$$p=\frac{S_i}{D}, \tag{3}$$

где $D=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2$, n – число наблюдений.

Если p меньше, чем константа, указанная пользователем как предел независимых переменных, то анализ прекращается без ввода оставшихся отобранных переменных; в противном случае вычисления продолжаются.

Накапливаемая сумма уменьшенных квадратов образуется как

$$S_{cum}=S_{cum}+S_i, \tag{4}$$

а накапливаемые сокращенные отношения – в виде

$$P_{cum}=P_{cum}+p. \tag{5}$$

Коэффициент множественной корреляции вычисляется как

$$R=\sqrt{P_{cum}} \tag{6}$$

и исправляется для степеней свободы по формуле:

$$R_c=\sqrt{1-\frac{\left(1-R^2\right)\left(n-1\right)}{n-k}}$$

при k независимых переменных в регрессии.

Значение F для анализа дисперсии задается в виде:

$$F=\frac{S_{cum}/k}{D-S_{cum}/\left(n-k-1\right)}. \tag{7}$$

Стандартная ошибка оценки получается с помощью формулы:

$$S=\sqrt{\frac{D-S_{cum}}{n-k-1}} \tag{8}$$

и исправляется на

$$S_c=S\sqrt{\frac{n-1}{n-k}}.$$

Затем вычисляются следующие величины:

$$s_{jj}=s_{jj}+\frac{s_{ij}^2}{s_{ii}}, \tag{9}$$

где i – переменная, вводимая на i-м шаге,

$j=\overline{v_1,\ldots,v_{i-1}}$ – переменные, введенные перед i-м шагом;

$$g_{ik}=\frac{s_{ik}}{s_{ii}}, \tag{10}$$

где $k=\overline{1,m}$ – индексы для переменных, включая y (k не равен индексу отброшенной переменной и переменной, введенной на i-м шаге).

Коэффициенты регрессии вычисляются по формулам:

$$b_i = g_{iy}; \tag{11}$$

$$b_{i-1} = g_{(i-1)\,y} - b_i g_{(i-1)\,i};$$

$$b_{i-2} = g_{(i-2)\,y} - b_i g_{(i-2)\,i} - b_{i-1} g_{(i-2)\,(i-1)} \text{ и т. д.,}$$

и значение пересечения как

$$b_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{x}_j, \tag{12}$$

где k – число независимых переменных в регрессии.

Стандартная ошибка коэффициентов регрессии вычисляется

$$S_{b_j} = \sqrt{s_{jj}} \cdot S, \tag{13}$$

где $j = \overline{v_1, ..., v_i}$ – индексы для переменных в регрессии, а значение t по формуле:

$$t_j = \frac{b_j}{S_{b_j}}. \tag{14}$$

Уменьшение элементов s_{jk} для устранения введенной переменной на i-м шаге осуществляется по формуле:

$$s_{jk} = s_{jk} - s_{ji} g_{ik}, \tag{15}$$

где i – переменная, введенная на i-м шаге; $j = \overline{1,m}$ (j не равны индексам отброшенных переменных и переменных в регрессии), $k = \overline{1,m}$ (k не равны индексам отброшенных переменных и переменной, введенной на i-м шаге); причем

$$s_{ji} = \frac{s_{ji}}{-s_{ii}}, \tag{16}$$

$$s_{ii} = \frac{1}{s_{ii}}. \tag{17}$$

Таким образом, для введения в уравнение регрессии очередного регрессора был использован метод выметания [9] для преобразования матрицы S. Оператор выметания обратим, так что двукратное применение выметания по одному и тому же элементу матрицы равносильно неприменению этого оператора. Это свойство было использовано для возврата матрицы в предыдущее состояние в случае, если после введения в регрессию очередного регрессора значение регрессора, по которому производится поиск оптимальной модели, ухудшается, т. е. для исключения включенного регрессора из уравнения регрессии.

В качестве критерия поиска можно выбрать критерии качества модели, вычисляемые на обучающей выборке (t, σ, F, R), или ошибку на контрольной выборке, или ошибку на «скользящей» контрольной выборке.

Отметим, что на каждом шаге исследуются t-статистики для всех включенных регрессоров, а не только для той, которая только что была введена в уравнение. Можно сказать, что регрессор, который на предыдущем шаге был наилучшим кандидатом для включения в уравнение, на более позднем шаге может оказаться ненужным. Это вызывается теми связями, которые существуют между этой и другими переменными, содержащимися теперь в уравнении. Чтобы проверять это, на каждом шаге для каждого регрессора, содержащегося в уравнении, вычисляется t-статистика и находится наименьшая из них (она может быть связана с любой переменной, включенной в модель только что или ранее), которая затем сравнивается с заранее заданной величиной $t_{критическое}$. Если проверяемая переменная меньше заданного порогового значения, она исключается из уравнения. После этого регрессионное уравнение пересчитывается с учетом всех оставшихся в нем регрессоров.

Следует отметить, что ПР может быть вызвана как в автоматическом режиме для обработки целого ряда выборок данных, так и при обработке отдельной выборки.

Главное меню модуля формирования запроса для автоматического режима работы процедуры ПР включает запрос следующих параметров:

1. маска входных файлов данных;
2. расширение выходных файлов результатов;
3. критерии поиска модели;
4. константа РСТ;
5. общая модель (да – расчет по всем заданным выборкам данных для одной и той же модели; нет – по каждой ищется своя модель; в этом случае необходимо иметь файлы с задаваемыми моделями, под которыми понимаются файлы с информацией о структурах исходных моделей);
6. вывод всех шагов или вывод только оптимальной модели.

2 Критерии качества модели

Одной из важнейших задач при анализе данных является задача выбора критерия сравнения конкурирующих описаний.

В рамках СПОР предоставляется, помимо критериев качества модели на обучающей выборке (t, σ, F, R), возможность вычисления ошибки на контрольной выборке и ошибки на «скользящей» контрольной выборке [1].

Качество модели РА обычно определяют по следующим критериям:

– средней квадратической ошибке σ, которая применяется как для оценки адекватности модели, так и для сравнения различных моделей друг с другом;

– выборочному коэффициенту множественной корреляции R, который используют как меру линейной связи (1): чем больше значение R $(0 \le R \le 1)$, тем сильнее связь, то есть тем лучше аппроксимирующая функция соответствует наблюдениям, также высокое значение R гарантирует пригодность модели для прогноза;

– F-критерию, при $F > 4F_T(\alpha; p-1, n-p)$ (F_T – критическое значение, взятое из таблицы для F-критерия) модель признается заслуживающей внимания на предмет ее использования для прогноза.

Данные критерии качества характеризуют адекватность модели только по отношению к использованной для ее построения выборки точек (обучающая выборка).

Это первый этап исследования модели, на котором экспериментатор должен быть убежден, что модель соответствует наблюдениям.

Если модель предназначена для прогноза, то надо быть уверенным в ее пригодности для определения области, не совпадающей с выборочными точками y_i.

Для оценки внешней адекватности (точности прогноза) используются контрольные точки. Исходная выборка делится на обучающую и контрольную. На первой выборке строится модель или множество моделей; на второй – выполняется оценка ее адекватности или дискриминация по статистикам.

Ошибка на контрольной выборке основана на анализе расхождений между прогнозом $\hat{Y}$ и известным наблюденным значением Y для объектов, не участвовавших в получении модели.

Поскольку, работая с малыми выборками, нет возможности разделить ее на обучающую и контрольную с достаточно большим количеством точек, для оценки внешней адекватности мы предлагаем использовать критерий, основанный на «скользящей» контрольной выборке. Если последовательно каждый из объектов выборки выводить из нее, полагая этот объект контрольным, и пересчитывать заново параметры модели, то разности между y_i и $\hat{y}_i$ для скользящей контрольной точки Δ_i= «наблюдение минус прогноз» ($i=\overline{1,n}$; где n – общее количество объектов) могут быть использованы для вычисления ошибки на «скользящей» контрольной выборке.

Последовательное исключение объектов, соответствующее удалению определенных строк из матрицы данных X, дает возможность сформулировать искусственно новую выборку (проверочную или контрольную) того же объема, что и исходная.

Более подробно критерии сравнения конкурирующих моделей рассмотрены в [1].

3 Численное исследование

Исследовался метод ПР для поиска оптимальной модели по заданному критерию в рамках пакета СПОР. Были обработаны данные 45 выборок методом ПР по критерию – ошибка на контрольной выборке σ_Δ. Решалась задача численного исследования: насколько результаты, полученные рассматриваемым методом хуже по прогностическим свойствам результатов, полученных полным перебором. Сравнительный анализ показал, что лишь в 19% всех случаев наблюдается преимущество метода полного перебора. Поскольку в реальных случаях обработки малых выборок нет возможности использовать перебор структур по ошибке на контрольной выборке, оценим результаты пошаговой регрессии по t-критерию и результатами полного перебора по ошибке на «скользящей» контрольной выборке. Сравнительный анализ методов показал, что модели, полученные методом полного перебора по критерию $\sigma_{СЭ}$, лишь в 14% всех случаев имеют лучшие прогностические свойства по сравнению с моделями, полученными пошаговой регрессией по t-критерию (выборки №№ 12, 15, 23, 31, 33, 36); максимальное ухудшение на 0,65 (выборка № 33) зарегистрировано для одного случая, отношение дисперсий в этом случае равно 15,786; в 6% всех случаев имеем улучшение точности прогноза на 0,001–0,13; в остальных случаях результаты либо полностью совпадают (62% всех случаев), либо отличаются по значению σ_Δ в третьем–четвертом знаках после запятой (17% всех случаев). Результаты сравнительного анализа приведены в диаграмме 1 (по отношению дисперсий $\left(\sigma_\Delta^{ПР}\right)^2 \Big/ \left(\sigma_\Delta^{ПП}\right)^2$,

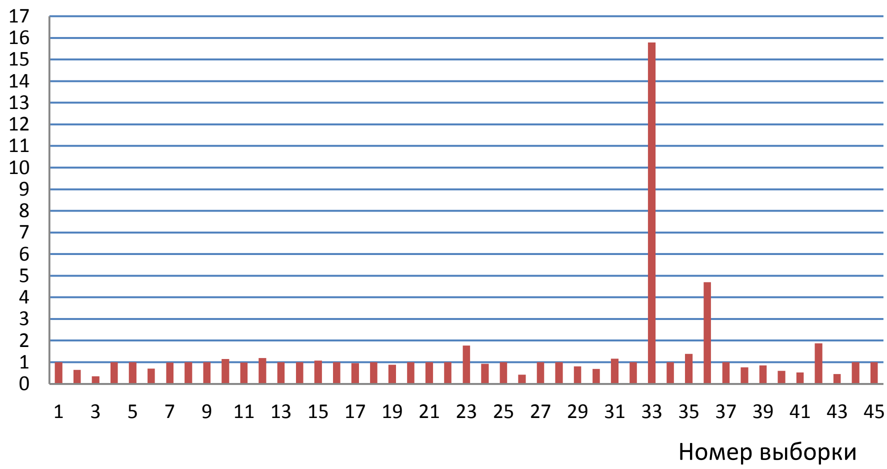

Диаграмма 1. Сравнительный анализ по отношению дисперсий

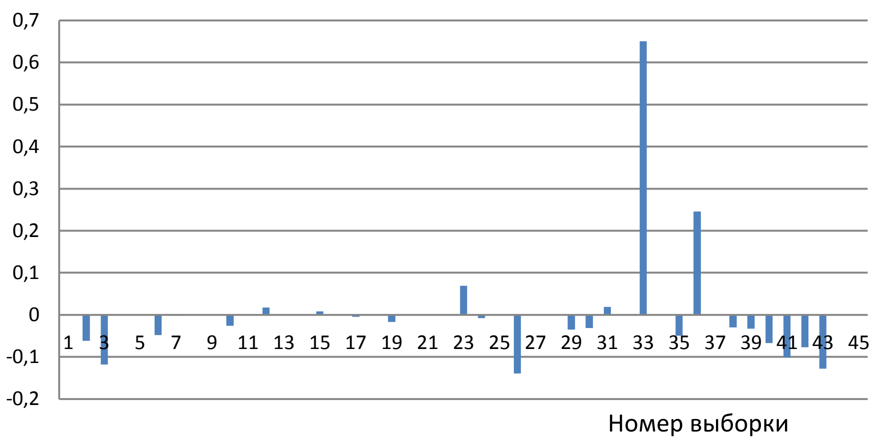

Диаграмма 2. Сравнительный анализ по разности случайных ошибок

где $\sigma_{\Delta}^{ПР}$ – значение σ_{Δ} моделей, оптимальных по пошаговой регрессии по t-критерию, а $\sigma_{\Delta}^{ПП}$ – значение σ_{Δ} моделей, оптимальных по полному перебору по критерию $\sigma_{СЭ}$) и диаграмме 2 (по разности случайных ошибок $\sigma_{\Delta}^{ПР} - \sigma_{\Delta}^{ПП}$).

Таким образом, метод ПР дает хорошие результаты, а если учитывать, что полный перебор требует больших временных затрат, особенно для больших выборок данных, можно сделать вывод о перспективности использования метода ПР.

Заключение

Использование статистического пакета СПОР [10] для оценки и прогнозирования состояния технического объекта позволяет осуществлять эффективный поиск адекватной модели за счет автоматизации процесса адаптации вычислительных схем к нарушениям условий применения РА–МНК.

Путем вычислительного эксперимента показана перспективность использования метода ПР пакета СПОР в качестве метода адаптации нарушений условий РА-МНК и в качестве метода структурной идентификации при поиске оптимальной модели прогноза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадырова Г.Р. Оценка и прогнозирование состояния технического объекта по регрессионным моделям // Автоматизация процессов управления. – 2015. – № 4 (42). – С. 90–95.

2. Валеев Г.Р., Кадырова Г.Р. Система поиска оптимальных регрессий. – Казань : ФЭН, 2003. – 160 с.

3. Валеев Г.Р., Кадырова Г.Р. Автоматизированная система для решения задач метода наименьших квадратов // Известия Вузов. Сер.: Геодезия и аэрофотосъемка. – 1999. – № 6. – С. 9–14.

4. Валеев С.Г., Кадырова Г.Р., Турченко А.А. Программная система поиска оптимальных регрессий // Вопросы современной науки и практики. Сер. Технические науки. – 2008. – № 4(14), Т. 2. – С. 97–101.

5. Кадырова Г.Р. Программная система поиска оптимальных регрессионных моделей прогноза // Путь науки. – 2014.– № 7 (7). – С. 10–11.

6. Кадырова Г.Р. Пакет адаптивного регрессионного моделирования для описания, оптимизации, управления и прогноза функционирования технического объекта // Современные проблемы проектирования, производства и эксплуатации радиотехнических систем. – 2015. – № 1–2 (9). – С. 217–219.

7. Кадырова Г.Р. Возможности программной системы регрессионного моделирования для оценивания модели и поиска ее оптимальной структуры // Радиоэлектронная техника. – 2015. – № 2 (8). – С. 228–233.

8. Сборник научных программ на Фортране. Вып. 1. – М. : Статистика, 1974. – 316 с.

9. Себер Д. Линейный регрессионный анализ. – М. : Мир, 1980. – 450 с.

10. Кадырова Г.Р. Система поиска оптимальной модели. Состояние дел и перспективы развития // Потенциал современной науки. – 2015. – № 4 (12). – С. 8–10.

REFERENCES

1. Kadyrova G.R. Otsenka i prognozirovanie sostoianiia tekhnicheskogo obekta po regressionnym modeliam [Evaluation and Prediction of Technical Object Condition with the Use of Regression Models]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2015, no. 4 (42), pp. 90–95.

2. Valeev G.R., Kadyrova G.R. *Sistema poiska optimalnykh regressii* [The System for Optimal Regressions Search]. Kazan, FJEN Publ., 2003. 160 p.

3. Valeev G.R., Kadyrova G.R. Avtomatizirovannaia sistema dlia resheniia zadach metoda naimenshih kvadratov [Computer-Aided System for Solving the Problem of the Least Square Method]. Izvestiya Vuzov. Ser.: Geodeziia i aerofotosemka [Geodesy and Aerophotography], 1999, no. 6, pp. 9–14.

4. Valeev S.G., Kadyrova G.R., Turchenko A.A. Programmnaia sistema poiska optimalnykh regressii [Software for Optimal Regressions Search]. *Voprosy sovremennoi nauki i praktiki. Ser. Tekhnicheskie nauki* [Problems of Contemporary Science and Practice Journal. Technical Sciences Series], 2008, no. 4 (14), vol. 2, pp. 97–101.

5. Kadyrova G.R. Programmnaia sistema poiska optimalnykh regressionnykh modelei prognoza [Program Search System of Optimal Regression Prediction Models]. *Put nauki* [The Way of Science], 2014, no. 7 (7), pp. 10–11.

6. Kadyrova G.R. Paket adaptivnogo regressionnogo modelirovaniia dlia opisaniia, optimizatsii, upravleniia i prognoza funktsionirovaniia tekhnicheskogo obekta [An Adaptive Regression Modeling Software Package for Description, Optimization, and Forecasting of Technical Object Functioning]. *Sovremennye problemy proektirovaniia, proizvodstva i ekspluatatsii radiotehnicheskikh system* [State-of-the-Art Issues on Design, Production, and Operation of Radioengineering Systems], 2015, no. 1-2 (9), pp. 217–219.

7. Kadyrova G.R. Vozmozhnosti programmnoi sistemy regressionnogo modelirovaniia dlia otsenivaniia modeli i poiska ee optimalnoi struktury [Regression Modeling Software for the Model Estimation and its Optimal Structure Search]. *Radioelektronnaia tekhnika* [Radioelectronics], 2015, no. 2 (8), pp. 228–233.

8. Sbornik nauchnykh programm na Fortrane. Vyp. 1 [Collection of Scientific Software on Fortran. Iss. 1]. Moscow, Statistika Publ., 1974. 316 p.

9. Seber D. *Lineinyi regressionnyi analiz* [Linear Regression Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1980. 450 p.

10. Kadyrova G.R. Sistema poiska optimalnoi modeli. Sostoianie del i perspektivy razvitiia [The Search System of the Optimal Model. State and Prospects of Development]. *Potentsial sovremennoi nauki* [The Potential of Modern Science], 2015, no. 4 (12), pp. 8–10.