

УДК 519.248:658.562.012.7

В.Н. Клячкин, Е.А. Зенцова

## ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНЫХ ПЛАНОВ ПРИ МНОГОМЕРНОМ СТАТИСТИЧЕСКОМ КОНТРОЛЕ ПРОЦЕССОВ<sup>1</sup>

**Клячкин Владимир Николаевич**, доктор технических наук, профессор, окончил механический факультет Ульяновского политехнического института. В настоящее время профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного технического университета. Имеет научные труды в области надежности и статистических методов. [e-mail: v\_kl@mail.ru].

**Зенцова Екатерина Александровна**, окончила факультет информационных систем и технологий УлГТУ, аспирантка кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ. Имеет статьи в области статистического контроля процессов. [e-mail: e\_zentsova@mail.ru].

### Аннотация

Статистический контроль технологического процесса применяется для технологического обеспечения требуемого уровня качества путем своевременного вмешательства в ход процесса при нарушении его стабильности. Качество изделия, изготавливаемого в технологическом процессе, характеризуется несколькими показателями, часть из которых коррелирована. Статистический контроль проводится отдельно для групп коррелированных и независимых показателей. Независимые показатели качества технологического процесса могут контролироваться с помощью стандартных карт Шухарта. Для контроля процесса по совокупности коррелированных показателей применяют многомерную контрольную карту Хотеллинга, основное назначение которой – отслеживание уровня настройки многопараметрического процесса. В ходе мониторинга карта позволяет обнаруживать большие смещения уровня настройки процесса, при этом малые смещения часто ею игнорируются. Для повышения эффективности обнаружения малых смещений предложено построение адаптивного плана контроля, параметры которого корректируются по результатам прогноза изменения уровня настройки в соответствии с текущим состоянием процесса. Характеристики плана стандартизированы по единым принципам с целью корректного сравнения адаптивных планов контроля.

Ключевые слова: адаптивный план контроля, контрольная карта Хотеллинга, марковские цепи.

## DESIGN OF AN ADAPTIVE CONTROL SCHEME FOR MULTIVARIATE STATISTICAL PROCESS CONTROL

**Vladimir Nikolaevich Kliachkin**, Doctor of Engineering; graduated from the Mechanical Faculty of Ulyanovsk Polytechnic Institute; Professor at the Department of Applied Mathematics and Informatics of Ulyanovsk State Technical University; an author of scientific works in the field of reliability and statistical methods. e-mail: v\_kl@mail.ru.

**Ekaterina Aleksandrovna Zentsova**, graduated from the Faculty of Information Systems and Technologies of Ulyanovsk State Technical University; Postgraduate Student at the Department of Applied Mathematics and Informatics of Ulyanovsk State Technical University; an author of scientific papers in the field of statistical process control. e-mail: e\_zentsova@mail.ru.

### Abstract

Statistical control of a technological process is used in order to guarantee the required quality level by implementing timely corrective actions when the process is instable. Quality of a product manufactured in a technological process is usually measured by multiple quality characteristics, part of them are correlated. Statistical control is carried out separately for groups of correlated and independent characteristics. Independent quality characteristics of a technological process can be controlled with standard Shewhart's control charts. In order to monitor a set of correlated characteristics, a multivariate Hotelling's control chart is used. The main purpose of this chart is to observe multivariate process settings level. This chart quickly detects large shifts in the multivariate process mean and often ignores small ones. In order to improve its performances in detecting small shifts in the mean vector, the adaptive control scheme design is proposed. Its parameters change according

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-48-732002.

to predictions based on the current process status observations. The characteristics of different adaptive control schemes are designed in a standardized fashion to ensure the comparison of these schemes is meaningful and unbiased.

Key words: adaptive control scheme, Hotelling's control chart, Markov chains.

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из главных проблем промышленного производства является обеспечение стабильно высокого качества конечного продукта в технологическом процессе. Технологический процесс – это сложная, многомерная система, которая, как правило, характеризуется несколькими показателями. Контроль отдельных показателей, без учета их взаимосвязей, либо не обеспечивает должного качества выходной продукции, либо чрезмерно завышает технологические показатели, при этом возможны многочисленные ложные тревоги.

Для управления технологическим процессом с несколькими коррелированными показателями могут использоваться многомерные методы статистического анализа. Их применение подразумевает корректирование значений параметров технологического процесса по результатам выборочного контроля для поддержания статистически управляемого и стабильного состояния процесса.

Основным инструментом многомерного статистического контроля технологического процесса является карта Хотеллинга. Ее применение предполагает отбор выборок постоянного объема через равные промежутки времени и сравнение значения выборочной статистики с критическим значением, соответствующим положению контрольной границы на карте. Превышение критического значения служит сигналом об изменении уровня настройки и требует вмешательства в ход процесса для его наладки [1, 2].

Карта Хотеллинга позволяет обнаруживать значительные смещения уровня настройки процесса, однако не обеспечивает своевременного выявления малых смещений. При этом возрастает риск принять ошибочное решение о статистической управляемости процесса и упустить возможность предупреждения роста выхода несоответствующей продукции, что приводит к большим экономическим потерям и накладывает существенное ограничение на область применения карты Хотеллинга.

Аналогичная проблема возникает и при диагностике функционирования многих технических объектов: изменение стабильности процесса эксплуатации (в частности, повышение среднего уровня нагрузки) приводит к нарушению работоспособности и отказам [3].

Для решения проблемы повышения чувствительности карты Хотеллинга к обнаружению малых смещений в работах [4–6] предлагается построение адаптивных планов контроля. Параметры адаптивных планов принимаются переменными и меняются в режиме реального времени на основе значения выборочной статистики в установленном для данного плана контроля порядке. Применение адаптивных планов позволяет на основании данных о состоянии технологического процесса в предшествующие моменты времени прогнозировать его состояние в последующий момент времени и в случае необходимости осу-

ществлять корректировку параметров технологического процесса. Другие методы повышения эффективности карты Хотеллинга рассмотрены в работах [3, 7, 8].

Впервые адаптивный подход к построению планов контроля для одномерных процессов в 1994 г. предложил Reynolds. Aparisi расширил идеи адаптивного подхода на многомерный случай. В работе [9] он построил адаптивный план контроля с переменным объемом выборок. Также им был разработан план контроля с переменными интервалами между выборками, который позволяет с наименьшими временными затратами обнаруживать большие смещения уровня настройки процесса, и план с переменным объемом выборок и переменными интервалами между выборками, более чувствительный к малым смещениям среднего уровня процесса [10, 11]. Chen и Hsieh предложили адаптивный план с переменными контрольными границами и объемом выборки [12]. Авторами были заложены основы современных алгоритмов построения адаптивных планов контроля. Существенный вклад в изучение этого вопроса внесли также Saniga, Faraz, Moghadam [4–6].

В настоящее время данное направление исследований находится в стадии интенсивного развития и остается одним из самых перспективных подходов к проблеме многомерного статистического контроля. Однако, несмотря на наличие широкого спектра исследований, вопросы практического применения методов адаптивного контроля изучены недостаточно.

Это обусловлено предъявлением к технологическому процессу ряда требований. Например, смещения вектора средних процесса должны быть вызваны нарушениями только одного типа; вероятность появления нарушений должна подчиняться закону Пуассона; величина смещения вектора средних процесса при появлении нарушения должна быть известна; должны быть учтены особые условия технологического процесса (возможность взятия выборок в произвольные интервалы времени, объем производства).

Если процесс удовлетворяет этим требованиям, то инженер-технолог оказывается перед проблемой выбора эффективного плана контроля. В большинстве случаев выбор плана основывается на оценке чувствительности построенных адаптивных планов. Однако при их построении не учитываются различия характеристик контроля: среднего количества и объема выборок, среднего числа ложных тревог при стабильном состоянии процесса. Поэтому выбор плана контроля может оказаться неоптимальным. Возникает потребность в универсальном алгоритме, способном обеспечить возможность построения адаптивных планов контроля, приспособленных к условиям конкретного технологического процесса. В качестве реализации такого алгоритма в настоящей работе предлагается адаптивный план контроля со всеми переменными параметрами.

## 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ

Построение контрольных карт заключается в определении трех параметров: объема выборок, периодичности их отбора и значений контрольных границ для статистических характеристик измеряемой величины.

Объем выборки определяется техническими (однородность и возможность извлечения выборки) и экономическими соображениями. При больших затратах на измерение, например, в случае разрушающего контроля, объем выборки берется минимальным (4–5 измерений). Это связано с тем, что при таком объеме выборки значения выборочной статистики начинают подчиняться нормальному или близкому к нему закону распределения, даже если распределение самого контролируемого показателя качества отличается от нормального. Если стоимость измерений относительно невысока и однородность процесса соблюдается, допустимо увеличение объема выборок.

Периодичность взятия выборок зависит в основном от организационных и технических условий протекания технологического процесса. В качестве факторов, влияющих на периодичность контроля, можно назвать:

- реальную возможность взятия выборок через определенный период времени (например, измерение таких показателей, как твердость заготовки или толщина покрытия, невозможно провести до завершения процессов термической обработки или нанесения покрытия);
- стабильность процесса (период между выборками должен быть существенно меньше периода времени между разладками процесса);
- потери от выпуска несоответствующей продукции, если происходит разладка процесса, не обнаруживаемая до конца периода времени между выборками;
- затраты на контроль.

Важной задачей при построении карты является определение положения контрольных границ. Они должны обеспечивать компромисс между минимизацией вероятности получения ложного сигнала от карты (ошибки I рода) и минимизацией вероятности пропуска сигнала о разладке процесса (ошибки II рода). Значения контрольных границ рассчитываются на основе оценок параметров распределения данных технологического процесса и при налаженном процессе могут быть достигнуты и превышены только с заданной малой вероятностью.

В качестве критерия оптимальности при выборе параметров карты обычно принимают один из главных ее показателей – чувствительность к нарушениям процесса. Для карты с фиксированными параметрами ее можно оценить на основе средней длины серии разлаженного процесса (количества выборок, взятых до обнаружения разладки). При наличии смещения заданного уровня средняя длина серий определяет скорость реагирования карты на нарушение процесса.

Для адаптивных контрольных карт оценкой чувствительности является величина, характеризующая среднее время между моментом разладки и ее обнаружением. Таким образом, задача оптимизации параметров стандартной или адаптивной контрольных карт сводится к

минимизации этого критерия. Она будет решаться путём рассмотрения некоторого набора планов и выбора наиболее эффективного из них.

## 2 МНОГОМЕРНАЯ КАРТА ХОТЕЛЛИНГА

При контроле многопараметрического процесса некоторые его показатели могут быть коррелированными, тогда целесообразно применение многомерных статистических методов. Основным инструментом контроля многопараметрического процесса является карта Хотеллинга, предназначенная для проверки гипотезы о том, что средний уровень процесса соответствует заданным спецификациям, т. е. проверяется стабильность процесса по среднему уровню [1].

Рассмотрим технологический процесс с  $p$  показателями качества. Пусть данные показатели коррелированы между собой и подчиняются многомерному нормальному закону распределения с вектором средних  $\mu'_0 = (\mu_{01}, \dots, \mu_{0p})$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ . Применение карты Хотеллинга для анализа стабильности такого процесса предполагает расчет и нанесение на карту значений выборочной статистики

$$T^2 = n(\bar{x} - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu_0) \quad (1)$$

для каждой мгновенной выборки, где  $n$  – объем выборки,  $\bar{x}$  – вектор средних в мгновенных выборках. При условии, что  $\mu_0$  и  $\Sigma$  известны или их оценки получены на основе большого объема данных, статистика  $T^2$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $p$  степенями свободы. Выборочные значения статистики  $T^2$ , таким образом, сравнивают с квантилью  $\chi^2$ -распределения порядка  $1 - \alpha$  ( $\alpha$  – вероятность ложной тревоги):  $k = \chi^2(\alpha, p)$ . При нормальном ходе процесса значения  $T^2$  превышают значения контрольной границы  $k$  только с заданной малой вероятностью  $\alpha$ , что сигнализирует о возможном нарушении процесса.

Предположим, что разладка процесса происходит вследствие смещения среднего значения одного из показателей качества. Величину данного смещения тогда можно оценить по формуле:

$$d^2 = (\mu_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_0), \quad (2)$$

где  $d$  – расстояние Махаланобиса;  $\mu_1$  – вектор средних при неуправляемом состоянии процесса, и только одна компонента этого вектора отлична от  $\mu_0$ . Статистика  $T^2$  при этом подчиняется нецентральному  $\chi^2$ -распределению с  $p$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\eta = nd^2$  [4].

## 3 ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНЫХ ПЛАНОВ КОНТРОЛЯ

Адаптивный план контроля позволяет производить упреждающую корректировку процесса при выявлении тенденции изменения его уровня настройки с течением времени.

Чувствительность контроля к нарушениям процесса повышается путем нанесения дополнительной предупре-

ждающей границы  $w$ , что предполагает разбиение области значений статистики на три подобласти. Кроме целевой области (процесс стабилен) и критической (обнаружено нарушение процесса), выделяется еще предупреждающая область (переходное состояние процесса). Попадание значения статистики в предупреждающую область является сигналом о возможной разладке процесса, что требует усиленного наблюдения за ходом технологического процесса.

Применение адаптивного плана контроля позволяет фиксировать даже самые небольшие сдвиги уровня процесса на основе дополнительной информации, получаемой от точек, попавших в предупреждающую зону. При этом сохраняется возможность определения резких сдвигов в уровне процесса, когда значение выборочной статистики выходит за пределы контрольной границы.

Рассмотрим адаптивный план контроля VP (Variable Parameters) со всеми переменными параметрами, построенный на основе стандартной карты Хотеллинга. Пусть  $(k_{\min}, h_{\min}, n_{\min})$  – минимальный выборочный план,  $(k_{\max}, h_{\max}, n_{\max})$  – максимальный выборочный план, такие, что  $0 < h_{\min} < h_{\max}$ ,  $0 < k_{\min} < k_{\max}$ ,  $n_{\min} < n_{\max}$ , где  $k_{\min}, k_{\max}$  – значения контрольных границ,  $h_{\min}, h_{\max}$  – длины интервалов между взятием выборок,  $n_{\min}, n_{\max}$  – объемы выборок для соответствующих выборочных планов. Выбор плана зависит от положения предыдущего значения статистики  $T^2$  на контрольной карте [7]. При попадании значения статистики в целевую область  $[0, w)$  выбирается минимальный план, при попадании в предупреждающую область  $[w, k_j)$  – максимальный. Целевая и предупреждающая области определяются значениями предупреждающей границы  $w$  и контрольной границы  $k_j$ , при этом  $j = 1$ , если значение статистики было получено согласно минимальному плану,  $j = 2$  – согласно максимальному. Порядок смены выборочных планов при использовании VP  $T^2$  контрольной карты определяет следующая функция:

$$(k_i, h_i, n_i) = \begin{cases} (k_{\max}, h_{\max}, n_{\max}) & \text{при } 0 \leq T_{i-1}^2 < w, \\ (k_{\min}, h_{\min}, n_{\min}) & \text{при } w \leq T_{i-1}^2 < k_{i-1}. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку адаптивные планы контроля, рассматриваемые в данной работе, являются частными случаями контрольной карты Хотеллинга VP, вид функции смены выборочных планов для каждого плана контроля будет зависеть от набора его переменных параметров.

Мерой, позволяющей сравнивать между собой адаптивные планы контроля, является величина *AATS* (Adjusted Average Time to Signal) – среднее время между появлением и обнаружением неслучайной причины, вызвавшей разладку процесса. При условии, что технологический процесс представлен серией циклов, время от начала цикла до появления первого сигнала от карты, следующего за разладкой процесса, может быть оценено с помощью величины *ATC* (Average Time to Signal), характеризующей

среднюю продолжительность цикла [6]. Рассматривая интервал времени до появления неслучайной причины как экспоненциально распределенную случайную величину с параметром  $\lambda$ , можно оценить время от начала цикла до момента разладки процесса как  $1/\lambda$ . Тогда

$$AATS = ATC - 1/\lambda. \quad (4)$$

#### 4 ПОДХОД НА ОСНОВЕ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Для оценивания эффективности плана требуется найти характеристику средней продолжительности цикла *ATC*. Свойство отсутствия памяти у экспоненциального распределения позволяет оценить величину *ATC*, используя подход, основанный на аппарате марковских цепей [5]. Переход в одно из состояний марковской цепи осуществляется после получения результатов выборочных наблюдений и нанесения на карту значения статистики. Возможны следующие переходные состояния:

Состояние 1:  $0 \leq T^2 < w$ , процесс статистически управляем;

Состояние 2:  $w \leq T^2 < k_j$ , процесс статистически управляем;

Состояние 3:  $0 \leq T^2 < w$ , процесс статистически неуправляем;

Состояние 4:  $w \leq T^2 < k_j$ , процесс статистически неуправляем;

Состояние 5:  $T^2 \geq k_j$ , процесс статистически неуправляем.

С учетом предположения о том, что процесс не может вернуться в управляемое состояние без вмешательства извне, матрица переходных вероятностей марковской цепи имеет вид:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $p_{ij}$  – определяет вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Обозначим через  $F(x, p, \eta_i)$  функцию нецентрального  $\chi^2$ -распределения с  $p$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\eta_i = n_i d^2$ ;  $q_i = \exp(-\lambda h_i)$  при  $i = 1, 2$ . Тогда вероятности  $p_{ij}$  можно представить так:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \Pr(T^2 < w | T^2 < k_{\max}) \times q_1 = \\ &= \frac{F(w, p, 0)}{F(k_{\max}, p, 0)} \times q_1, \\ p_{12} &= \Pr(w \leq T^2 < k_{\max} | T^2 < k_{\max}) \times q_1 = \\ &= q_1 - \frac{F(w, p, 0)}{F(k_{\max}, p, 0)} \times q_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{13} &= \Pr(T^2 < w) \times (1 - q_1) = \\
 &= F(w, p, \eta_1) \times (1 - q_1), \\
 p_{14} &= \Pr(w \leq T^2 < k_{\max}) \times (1 - q_1) = \\
 &= [F(k_{\max}, p, \eta_1) - F(w, p, \eta_1)] \times (1 - q_1), \\
 p_{15} &= \Pr(T^2 \geq k_{\max}) \times (1 - q_1) = \\
 &= [1 - F(k_{\max}, p, \eta_1)] \times (1 - q_1), \\
 p_{21} &= \Pr(T^2 < w | T^2 < k_{\min}) \times q_2 = \\
 &= \frac{F(w, p, 0)}{F(k_{\min}, p, 0)} \times q_2, \\
 p_{22} &= \Pr(w \leq T^2 < k_{\min} | T^2 < k_{\min}) \times q_2 = \\
 &= q_2 - \frac{F(w, p, 0)}{F(k_{\min}, p, 0)} \times q_2, \\
 p_{23} &= \Pr(T^2 < w) \times (1 - q_2) = \\
 &= F(w, p, \eta_2) \times (1 - q_2), \\
 p_{24} &= \Pr(w \leq T^2 < k_{\min}) \times (1 - q_2) = \\
 &= [F(k_{\min}, p, \eta_2) - F(w, p, \eta_2)] \times (1 - q_2), \\
 p_{25} &= \Pr(T^2 \geq k_{\min}) \times (1 - q_2) = \\
 &= [1 - F(k_{\min}, p, \eta_2)] \times (1 - q_2), \\
 p_{33} &= \Pr(T^2 < w) = F(w, p, \eta_1), \\
 p_{34} &= \Pr(w \leq T^2 < k_{\max}) = \\
 &= F(k_{\max}, p, \eta_1) - F(w, p, \eta_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{35} &= \Pr(T^2 \geq k_{\max}) = 1 - F(k_{\max}, p, \eta_1), \\
 p_{43} &= \Pr(T^2 < w) = F(w, p, \eta_2), \\
 p_{44} &= \Pr(w \leq T^2 < k_{\min}) = \\
 &= F(k_{\min}, p, \eta_2) - F(w, p, \eta_2), \\
 p_{45} &= \Pr(T^2 \geq k_{\min}) = 1 - F(k_{\min}, p, \eta_2).
 \end{aligned}$$

Таким образом, АТС рассчитывается по формуле:  
 $ATC = b'(I - Q)^{-1}h,$  (6)

где  $Q$  – матрица, полученная из матрицы  $P$  удалением элементов, соответствующих поглощающему состоянию,

$I$  – единичная матрица размером  $4 \times 4$ ;

$b' = (0, 1, 0, 0)$  – вектор начальных вероятностей;

$h' = (h_{\max}, h_{\min}, h_{\max}, h_{\min})$  – вектор значений длин интервалов между взятием выборок.

Для корректного сравнения адаптивных планов контроля их выборочные планы при управляемом состоянии процесса должны иметь схожие характеристики [6]. Таким образом, для построения VP-плана контроля необходимо выполнение двух условий.

1) Для фиксированного (FRS – Fixed Ratio Sampling) и адаптивного (VP) планов контроля требуется обеспечить равное среднее количество выборок ANS (Average Number of Samples) и равные средние значения объема выборок. Согласно свойствам марковских цепей среднее количество выборок для VP-карты рассчитывается по формуле:

$$ANS = b'(I - Q)^{-1}(1, 1, 0, 0)'. \quad (7)$$

В работе [5] показано, что значения ANS и АТС для FRS-карты с параметрами  $(k_0, h_0, n_0)$  можно определить так:

$$ANS = 1/(1 - q_0), \quad (8)$$

$$ATC = \left( \frac{q_0}{1 - q_0} + \frac{1}{1 - \beta_0} \right) \times h_0, \quad (9)$$

где  $q_0 = \exp(-\lambda h_0)$ ,  $\beta_0 = F(k_0, p, \eta)$ .

Из уравнений (7) и (8) параметр  $w$  можно выразить так:

$$w = F^{-1} \left( \frac{F(k_{\min}, p, 0)F(k_{\max}, p, 0)(q_0 - q_2)}{F(k_{\min}, p, 0)q_1(q_0 - q_2) - F(k_{\max}, p, 0)q_2(q_0 - q_1)}, p, 0 \right). \quad (10)$$

2) VP- и FRS-карты должны иметь равные вероятности ошибки I рода. Пусть вероятность того, что выбран минимальный выборочный план, равна  $p_0$ , максимальный –  $(1 - p_0)$ . Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}
 h_{\max} p_0 + h_{\min} (1 - p_0) = h_0, \\
 n_{\max} p_0 + n_{\min} (1 - p_0) = n_0, \\
 \alpha_1 p_0 + \alpha_2 (1 - p_0) = \alpha_0.
 \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда выражения для расчета  $n_{\min}$  и  $k_{\min}$  примут вид:

$$n_{\min} = \frac{n_0 - p_0 n_{\max}}{1 - p_0}, \quad (12)$$

$$k_{\min} = F^{-1} \left[ \frac{F(k_0, p, 0) - p_0 F(k_{\max}, p, 0)}{1 - p_0}, p, 0 \right], \quad (13)$$

где  $p_0 = \frac{h_0 - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}$ .

## 5 ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Выделим некоторые частные случаи VP-плана контроля:

1) VSICL (Variable Sampling Intervals and Control Limits) – адаптивный план контроля с переменной периодичностью выборок и переменными контрольными границами ( $n_{\min} = n_{\max} = n_0$ );

2) VSSCL (Variable Sample Size and Control Limits) – адаптивный план контроля с переменным объемом выборок и переменными контрольными границами ( $h_{\min} = h_{\max} = h_0$ );

3) VSSI (Variable Sampling Intervals and Sample Size) – адаптивный план контроля с переменным объемом выборок и переменной периодичностью выборок ( $k_{\min} = k_{\max} = k_0$ );

4) VSI (Variable Sampling Intervals) – адаптивный план контроля с переменной периодичностью выборок ( $n_{\min} = n_{\max} = n_0, k_{\min} = k_{\max} = k_0$ ) [4, 8];

5) VSS (Variable Sample Size) – адаптивный план контроля с переменным объемом выборок ( $h_{\min} = h_{\max} = h_0, k_{\min} = k_{\max} = k_0$ ).

Значение предупреждающей границы для VSICL-, VSSI-, VSI-карт рассчитывается по формуле (10). Для VSSCL- и VSS-карт выражение для расчета предупреждающей границы  $w$  принимает вид:

$$w = F^{-1} \left( \frac{F(k_{\min}, p, 0)F(k_{\max}, p, 0)(n_0 - n_{\min})}{F(k_{\min}, p, 0)q_0(n_0 - n_{\min}) - F(k_{\max}, p, 0)q_0(n_0 - n_{\max})}, p, 0 \right). \quad (14)$$

Таким образом, построение VP-плана для заданных параметров FRS-плана ( $k_0, h_0, n_0$ ) заключается в определении параметров ( $k_{\max}, h_{\max}, h_{\min}, n_{\max}$ ), которые в совокупности с рассчитанными параметрами  $k_{\min}, n_{\min}$  и  $w$  минимизируют среднее время между появлением и обнаружением неслучайной причины, вызвавшей разладку процесса *AATS*.

$\min AATS$

при

$$\begin{aligned} 0,1 \leq h_{\min} \leq h_0 \leq h_{\max} \leq 8, \\ 0 \leq w \leq k_{\min} \leq k_0 \leq k_{\max}, \\ n_{\max} \leq n_0 \leq n_{\min} \in Z^+. \end{aligned} \quad (15)$$

Значение длины максимального интервала между взятием выборок  $h_{\max}$  ограничено сверху продолжительностью рабочей смены, т. е.  $h_{\max} \leq 8$  (часов), значение минимального интервала  $h_{\min}$  ограничено снизу значением 0,1 (часов), т. к. более короткие интервалы сложно применять на практике. Здесь  $Z^+$  – множество положительных целых чисел.

Аналогично формулируется постановка задачи для построения других адаптивных планов контроля. Требуется минимизировать среднее время между моментом разладки и ее обнаружением путём рассмотрения некоторого набора планов и выбора наиболее эффективного из них. Для решения задачи оптимизации могут быть использованы методы генетических алгоритмов. Они относятся к классу методов эволюционной оптимизации, отличительной особенностью которых является высокая сходимость.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм построения адаптивных планов контроля на основе карты Хотеллинга с предупреждающей границей, позволяющий учитывать особенности

анализируемого технологического процесса. Алгоритм является универсальным и позволяет строить несколько адаптивных планов контроля. Параметры планов определяются на основе характеристик процесса с использованием аппарата марковских цепей. Для каждого процесса может быть определен тип возможного нарушения и оценена величина смещения уровня настройки процесса при его появлении. В отличие от стандартной карты Хотеллинга, построение адаптивных планов контроля производится с учетом данной величины смещения, что гарантирует повышение эффективности обнаружения нарушений процесса при использовании адаптивных планов. Для оптимального выбора среди планов контроля в работе определены условия их корректного сравнения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клячкин В.Н. Модели и методы статистического контроля многопараметрического технологического процесса. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 196 с.
2. Montgomery D.C. Introduction to statistical quality control. – New York : John Wiley and Sons, 2009. – 754 p.
3. Клячкин В.Н., Кравцов Ю.А., Жуков Д.А. Оценка эффективности диагностики состояния объекта по наличию неслучайных структур на карте Хотеллинга // Автоматизация процессов управления. – 2015. – № 1 (39). – С. 50–56.
4. Faraz A., Kazemzadeh R.B., Heuchenne G. and E. Saniga. The Optimal Design of the VSI Control Chart // JIRSS. – 2010. – V. 9. – pp. 1–19.
5. Faraz A., Saniga E.A. Unification and Some Corrections to Markov Chain Approaches to Develop Variable Ratio Sampling Scheme Control Charts // Statistical Papers. – 2009. – V. 52. – pp. 799–811.
6. Seif A., Faraz A., Heuchenne C., Saniga E.A. A Statistically adaptive sampling policy to the Hotelling's Control Chart: Markov Chain Approach // Communications in Statistics: Theory & Methods. – 2016. – V. 45. – pp. 3919–3929.

7. Зенцова Е.А. Модель минимизации затрат для модифицированной контрольной карты Хотеллинга // Информатика, моделирование, автоматизация проектирования : сб. науч. тр. VII Всерос. школы-семинара аспирантов, студентов и молодых ученых ИМАП-2015. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – С. 138–144.

8. Зенцова Е.А. Построение модели затрат для контрольной карты Хотеллинга // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика. – Воронеж : Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2015. – Т. 3, № 8–3 (19–3) – С. 270–273.

9. Aparisi F. Hotelling's  $T^2$  Control Chart with Adaptive Sample Sizes // International Journal of Production Research. – 1996. – V. 34. – pp. 2853–2862.

10. Aparisi F. Hotelling's  $T^2$  control chart with variable sampling interval // International Journal of Production Research. – 2001. – V. 39 (14). – pp. 3127–3140.

11. Aparisi F. Sampling plans for the multivariate  $T^2$  control chart // Quality Engineering. – 1997. – V. 10 (1). – pp. 141–147.

12. Chen Y.K., Hsieh K.L. Hotelling's  $T^2$  charts with variable sample size and control limit // European Journal of Operational Research. – 2007. – V. 182 (3). – pp. 1251–1262.

#### REFERENCES

1. Kliachkin V.N. *Modeli i metody statisticheskogo kontrolya mnogoparametricheskogo tekhnologicheskogo protsessa* [Statistical Check Models and Methods of Multiparameter Technological Process]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011. 196 p.

2. Montgomery D.C. *Introduction to Statistical Quality Control*. New York. John Wiley and Sons, 2009. 754 p.

3. Kliachkin V.N., Kravtsov Iu.A., Zhukov D.A. Otsenka effektivnosti diagnostiki sostoiianiia obekta po nalichiiu nesluchainykh struktur na karte Khotellinga [Evaluation of Object Status Diagnosing Efficiency to Non-random Structures Existence on the Hotelling's Chart]. *Avtomatizatsiia*

*protsesov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2015, no. 1 (39), pp. 50–56.

4. Faraz A., Kazemzadeh R.B., Heuchenne G., and E. Saniga. The Optimal Design of the VSI Control Chart. *JIRSS*, 2010, vol. 9, pp. 1–19.

5. Faraz A., Saniga E.A. Unification and Some Corrections to Markov Chain Approaches to Develop Variable Ratio Sampling Scheme Control Charts. *Statistical Papers*, 2009, vol. 52, pp. 799–811.

6. Seif A., Faraz A., Heuchenne C., Saniga E.A. Statistically Adaptive Sampling Policy to the Hotelling's Control Chart: Markov Chain Approach. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 2016, vol. 45, pp. 3919–3929.

7. Zentsova E.A. Model minimizatsii zatrat dlia modifitsirovannoi kontrolnoi karty khotellinga [The Cost Minimization Model for the Modified Hotelling's Control Chart]. *Informatika, modelirovanie, avtomatizatsiia proektirovaniia. Sb. nauch. tr. VII Vseros. shkoly-seminara aspirantov, studentov i molodykh uchenykh IMAP-2015* [Informatics, Modelling, Computer-Aided Design. Proc. of the 7th Russian Workshop for Postgraduates, Students, and Young Scientists. IMAP-2015]. Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2015, pp. 138–144.

8. Zentsova E.A. Postroenie modeli zatrat dlia kontrolnoi karty Khotellinga [Costs Modelling for the Hotelling's Control Chart]. *Aktualnye napravleniia nauchnykh issledovaniy XXI veka. Teoriia i praktika* [Actual Research Tendencies of the 21st Century. Theory and Practice]. Voronezh, Morozova Voronezh State University of Forestry Engineering Publ., 2015, vol. 3, no. 8–3 (19–3), pp. 270–273.

9. Aparisi F. Hotelling's Control Chart with Adaptive Sample Sizes. *International Journal of Production Research*, 1996, vol. 34, pp. 2853–2862.

10. Aparisi F. Hotelling's Control Chart with Variable Sampling Interval. *International Journal of Production Research*, 2001, vol. 39 (14), pp. 3127–3140.

11. Aparisi F. Sampling Plans for the Multivariate Control Chart. *Quality Engineering*, 1997, vol. 10 (1), pp. 141–147.

12. Chen Y.K., Hsieh K.L. Hotelling's Charts with Variable Sample Size and Control Limit. *European Journal of Operational Research*, 2007, vol. 182 (3), pp. 1251–1262.