

УДК 621.396

М.В. Самойленко

ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА ПОСЛЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ ФИЛЬТР С ИЗВЕСТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Самойленко Марина Витальевна, кандидат технических наук, окончила Московский авиационный институт и Московский физико-технический институт. Доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета). Занимается томографическим подходом в обработке сигналов, имеет 11 патентов на изобретения, 2 монографии и 9 статей. [e-mail: Samoi.Mar@mail.ru].

Аннотация

Предложен метод восстановления входного сигнала фильтра по измеренному выходному сигналу и импульсной характеристике фильтра. Известным методом решения задачи восстановления входного сигнала является метод инверсной фильтрации. Однако этот метод с неизбежностью искажает восстанавливаемый сигнал либо за счёт эффекта просачивания мощности в соседние области частот при протяженном сигнале, либо за счёт невозможности вычислить бесконечный спектр входного сигнала посредством деления спектра выходного сигнала на передаточную функцию. Предлагаемый метод реализуется без перехода в частотную область. Он основан на томографическом подходе в обработке сигналов, развиваемом автором. Согласно этому подходу, решение ищется с позиции восстановления искомой функции (входного сигнала) по множеству значений её интегралов, полученных при различающихся условиях интегрирования. В качестве таких значений используются значения выходного сигнала, измеренные в дискретные моменты времени. Множество выходных сигналов (интегралов) составляют отображение, по которому восстанавливается оригинал – входной сигнал. Полученные математические выражения позволяют восстановить его расчетным путем в дискретизированной форме, в виде вектора. При этом матрица восстановления, используемая в расчетах, формируется по дискретным значениям импульсной характеристики фильтра и может быть вычислена заранее, после чего в оперативном режиме останется провести измерения выходного сигнала и составленный из них вектор умножить на заранее вычисленную матрицу. Шаг дискретизации определяется априори и может меняться с целью повышения точности восстановления или уменьшения времени обработки. Томографический метод позволяет восстанавливать как непрерывные сигналы, так и одиночные импульсы и импульсные последовательности. Для иллюстрации его работы в статье приведены результаты компьютерного моделирования.

Ключевые слова: восстановление сигнала, томографический подход в обработке сигналов, импульсная характеристика, матрица отображения, матрица восстановления.

TOMOGRAPHIC METHOD OF SIGNAL RESTORATION AFTER PASSING THROUGH THE FILTER WITH THE KNOWN RESPONSE

Marina Vitalievna Samoilenko, Candidate of Engineering; graduated from Moscow Aviation Institute and Moscow Institute of Physics and Technology; Associate Professor at Moscow Aviation Institute (National Research University); involved in developing the tomographic approach to signal processing; an author of 11 patents for inventions, 2 monographs, and 9 articles. e-mail: Samoi.Mar@mail.ru.

Abstract

The method of the filter input signal restoration by the measured output signal and the pulse response is proposed in the article. The known method of the input signal restoration is inverse filtering, which inevitably distorts the restored signal because of the effect of power leakage into the adjacent frequency range or of the inability to calculate the infinite spectrum of the input signal by dividing the spectrum of the output signal on transmission function. The proposed method doesn't need transformation to spectrums. It is based on the tomographic approach in signal processing developed by the author. According to the method, the solution is sought through the restoration of the required function (of the input signal) by a set of its integrals values received under differing conditions of integration. The values of the output signal measured at discrete moments are used as such values. A set of output signals (integrals) forms a depiction, which is used for the following restoration of the original – the input signal. The received mathematical expressions make it possible to restore

it in a discrete form as a vector. The restore matrix used in calculations is formed on the basis of discrete values of a filter pulse response and can be calculated a priori. After that, it's enough to measure the output signal and multiply the vector composed of it on the pre-calculated matrix in operating status. The pre-selected discretization period may be changed to achieve greater accuracy or lesser processing time. The tomographic method makes it possible to restore continuous signals as well as solar pulses and pulse patterns. In order to illustrate it, the article gives some results of computer simulation.

Key words: signal restoration, tomographic approach to signal processing, pulse response, converting matrix, restore matrix.

ВВЕДЕНИЕ

Как правило, электрические сигналы, несущие информацию, не могут быть восприняты «в чистом виде». Они проходят различного рода электрические цепи, часто обладающие фильтрующими свойствами. Поэтому сигналы, которые можно измерить и оцифровать – это уже некоторым образом искаженная картина передаваемого сообщения. В то же время, наиболее информативным остается первоисточник – входной сигнал. В связи с этим актуальной становится задача восстановления сигнала на входе цепи по измеренному сигналу на ее выходе. Важность решения этой задачи оценивалась уже в XIX веке: в 1871 году Рэлей поставил вопрос о возможности восстановить сигнал, поступивший на вход прибора по наблюдаемой функции на его выходе. С тех пор и по настоящее время продолжают появляться публикации на эту тему.

В целом можно выделить следующие подходы к решению задачи восстановления сигнала, прошедшего через фильтр.

1. Наиболее очевидным представляется решение интегрального уравнения, описывающего преобразование входного сигнала в выходной [1, 2]. Для линейного фильтра это интеграл свертки входного сигнала с импульсной характеристикой фильтра – интеграл Вольтерра 1-го рода. Однако очевидность этого подхода кажущаяся: для его реализации необходимо функциональное представление входного сигнала, импульсной характеристики и выходного сигнала. Но и в этом случае существование решения неочевидно, а если решение существует, то получить его достаточно сложно.

2. Вторым подходом является адаптивная фильтрация [3], для реализации которой используется модель аппроксимации входного сигнала. Далее строится адаптивный фильтр известным методом минимизации функционала, получаемого с учетом известного линейного преобразования над входным сигналом.

3. Наиболее распространенным является метод инверсной фильтрации, для реализации которого переходят к спектру выходного сигнала и к передаточной функции фильтра. В спектральной области операция свертки отображается операцией умножения. Соответственно, операция деления позволяет теоретически достаточно просто вычислить спектр входного сигнала по передаточной функции и известному спектру выходного сигнала. Обратное преобразование позволяет перейти от полученного спектра к искомому временному сигналу. Однако

определить спектр выходного сигнала бывает достаточно сложно, а преобразования – прямое выходного сигнала и обратное входного – вносят неизбежные искажения. Так, в случае длительного выходного сигнала конечный интервал измерений приводит к искусственному укорочению сигнала и, соответственно, к появлению несуществующих частот в его спектре, что приводит к искажению искомого входного сигнала. Если же входной сигнал короткий, то ширина его спектра стремится к бесконечности, восстановить такой спектр проблематично. Последние публикации [4, 5] направлены на совершенствование метода инверсной фильтрации.

В статье предлагается новый принцип восстановления входного сигнала – без решения интегрального уравнения и без использования перехода в частотную область. Он позволяет получить входной сигнал фильтра прямым однократным вычислением, в котором используются измерения выходного сигнала и априори сформированная матрица.

Основан предлагаемый метод на применении томографического подхода в обработке сигналов [6]. Математически задача томографии заключается в восстановлении искомой функции – функции-оригинала – по множеству значений ее интегралов, полученных при различающихся путях интегрирования. Множество таких интегралов представляет собой отображение, или образ, оригинала. Отличием томографического подхода в обработке сигналов от классической томографии является, в частности, использование различающихся условий интегрирования вместо различающихся путей интегрирования в классической томографии.

Целью данной статьи является изложение математического обоснования нового метода восстановления сигнала, а также демонстрация его работы на компьютерных моделях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем полагать, что искомый сигнал $f(t)$ поступает на вход линейной цепи с известной импульсной характеристикой $h(t)$. Выходной сигнал обозначим как $y(t)$; этот сигнал известен – он может быть измерен в любые моменты времени.

Ставится задача восстановления входного сигнала $f(t)$ по измеренным значениям выходного сигнала и известной импульсной характеристике фильтра на основе применения томографического подхода в обработке сигналов.

Конкретизация задачи

С позиции томографического подхода искомым входной сигнал $f(t)$ – это функция-оригинал. Для её восстановления необходимо сформировать отображение оригинала, т. е. получить множество значений интегралов функции-оригинала. В качестве таких интегралов используем интегралы свёртки, определяющие формирование выходного сигнала $y(t)$. Для произвольного t этот интеграл определяется выражением

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (1)$$

Будем решать задачу в дискретном варианте. Для этого дискретизируем с шагом T интервал восстановления сигнала и перейдем от интеграла (1) к интегральной сумме:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} Th(t-kT)f(kT), \quad (2)$$

где k – номер отсчета, K – число отсчетов на интервале восстановления.

Обозначим $w_k(t) = Th(t-kT)$, $f_k = f(kT)$ и перепишем (2) следующим образом:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} w_k(t)f_k = \vec{w}^T(t)\vec{f}. \quad (3)$$

В полученном выражении

$\vec{w}(t) = [w_0(t) \ w_1(t) \ \dots \ w_{K-1}(t)]^T$ – весовой вектор, определяемый импульсной характеристикой фильтра,

$\vec{f} = [f(0) \ f(T) \ \dots \ f((K-1)T)]^T$ – вектор-оригинал (вектор сигнала).

Вектор-оригинал представляет собой дискретизированную на интервале восстановления функцию-оригинал (входной сигнал). Определив этот вектор, мы тем самым получим искомым сигнал в дискретной форме. Таким образом, в дискретизированном варианте задача заключается в нахождении вектора-оригинала \vec{f} . Для этого будем использовать вместо интегралов функции-оригинала интегральные суммы вектора-оригинала, представленные выражением (3). В этом выражении от момента времени t зависят выходной сигнал, который можно измерить, и весовой вектор $\vec{w}(t)$, который определяется импульсной характеристикой фильтра и шагом дискретизации, а вектор-оригинал \vec{f} от t не зависит.

Метод решения

Сформируем отображение вектора-оригинала, которое будет состоять из множества значений интегральных сумм вида (3). Для этого измерим выходной сигнал в разные моменты времени. Примем моменты измерений равными $0, T, 2T, \dots$. При этом отображение вектора-оригинала будет представлено набором измеренных значений выходного сигнала, которые в соответствии с (3) опишем соотношениями:

$$\begin{aligned} y(0) &= \vec{w}^T(0)\vec{f}, \\ y(T) &= \vec{w}^T(T)\vec{f}, \\ y(2T) &= \vec{w}^T(2T)\vec{f}, \\ &\vdots \\ y[(N-1)T] &= \vec{w}^T[(N-1)T]\vec{f}, \end{aligned} \quad (4)$$

где N – число измерений.

Объединим измеренные выходные сигналы в вектор-

отображение $\vec{y} = [y(0) \ y(T) \ \dots \ y((N-1)T)]^T$. Исходя из физического смысла задачи, определим длину этого вектора, при которой корректно отображается вектор-оригинал. Измерения вектора \vec{y} проводятся с тем же значением T , что и шаг дискретизации интервала восстановления. Вследствие того, что выходной сигнал является свёрткой входного сигнала, который на интервале восстановления представлен вектором \vec{f} , включающим K дискрет, следует, что и число измеренных значений выходного сигнала должно быть равно K . Это обусловлено следующим. При числе измерений $N < K$ только N дискрет вектора-оригинала будут учтены, а остальные останутся не определёнными; если же $N > K$, значения «лишних» $N-K$ дискрет выходного сигнала окажутся не соответствующими вектору-оригиналу, так как в действительности образуются не только входным сигналом на интервале восстановления, но и входным сигналом, выходящим за этот интервал. Такие заключения обусловлены характером интеграла свёртки.

Определим весовые векторы, входящие в правые части (4). Для этого обозначим дискретные значения импульсной характеристики, как показано на рисунке 1.

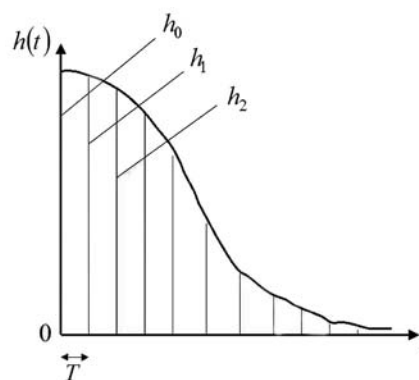


Рис. 1. Обозначения дискрет импульсной характеристики.

С учетом этих обозначений

$$\vec{w}(0) = T \begin{bmatrix} h_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}(T) = T \begin{bmatrix} h_1 \\ h_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{w}(2T) = T \begin{bmatrix} h_2 \\ h_1 \\ h_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{w}(N-1) = T \begin{bmatrix} h_{K-1} \\ h_{K-2} \\ h_{K-3} \\ \vdots \\ h_0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Представим теперь систему линейных алгебраических уравнений (4) в виде векторно-матричного уравнения отображения

$$\vec{y} = \mathbf{W}^T \vec{f}, \quad (6)$$

где $\mathbf{W}^T = [\vec{w}(0) \ \vec{w}(T) \ \dots \ \vec{w}((K-1)T)]^T$ – матрица отображения.

Структура матрицы отображения определяется структурой составляющих её весовых векторов (5) и имеет, соответственно, вид нижней треугольной матрицы:

$$\mathbf{W}^T = T \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{(K-1)} & h_{(K-2)} & h_{(K-3)} & \dots & h_0 \end{bmatrix}.$$

Мы описали математически вектор-отображение таким образом, что по нему стало возможным восстановить вектор-оригинал. Для этого достаточно решить уравнение отображения (6). В наиболее общем виде это решение имеет вид:

$$\vec{f}_{\text{вос}} = (\mathbf{W}^T)^+ \vec{y}, \quad (7)$$

где индекс + обозначает псевдообратную матрицу, а $(\mathbf{W}^T)^+$ представляет собой матрицу восстановления.

При $h_0 \neq 0$ матрица восстановления невырожденная, вследствие чего $(\mathbf{W}^T)^+ = (\mathbf{W}^T)^{-1}$ и восстановленный сигнал находится по формуле:

$$\vec{f}_{\text{вос}} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \vec{y}. \quad (8)$$

Выражения (7) или (8) являются решением поставленной задачи: вектор $\vec{f}_{\text{вос}}$ включает K компонент, которые представляют дискретные значения восстановленного входного сигнала на интервале восстановления с шагом дискретизации T .

Как явствует из выражений (7) и (8), задача восстановления сигнала, прошедшего через фильтр с известной импульсной характеристикой, решается посредством вычислительной обработки измеренных значений выходного сигнала. При этом матрица \mathbf{W} для известного фильтра может быть сформирована заранее. Соответственно, заранее можно вычислить матрицу восстановления $(\mathbf{W}^T)^+$ или $(\mathbf{W}^T)^{-1}$. После этого в оперативном режиме останется провести нужное число замеров и умножить их на вычисленную заранее матрицу. Априори определяется и шаг дискретизации T , который, при необходимости, может быть изменён для более качественного или более быстрого восстановления.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для иллюстрации работы предложенного метода далее приведены результаты экспериментов по восстановлению сигналов трёх видов – одиночного импульса, непрерывного непериодического сигнала и импульсной последовательности. Моделирование проводилось в среде MATLAB. В экспериментах шаг интегрирования составляет $T = 200$ мкс. Имитация выходного сигнала осуществляется посредством вычисления свертки входного сигнала и импульсной характеристики фильтра с шагом, составляющим $1/5T$. Интервал восстановления, на котором определяется восстанавливаемый сигнал $f(t)$, взят от 0 до 50 мс.

На рисунке 2 приведены эпюры, иллюстрирующие восстановление экспоненциального импульса, прошедшего через RC-цепь при сьеме выходного напряжения с конденсатора. Импульсная характеристика цепи определяется выражением [7]:

$$h(t) = \frac{1}{RC} \exp[-t / (RC)].$$

Параметры цепи: $C = 1,2$ мкФ, $R = 10$ кОм. Начало экспоненциального импульса $t_0 = 10$ мс.

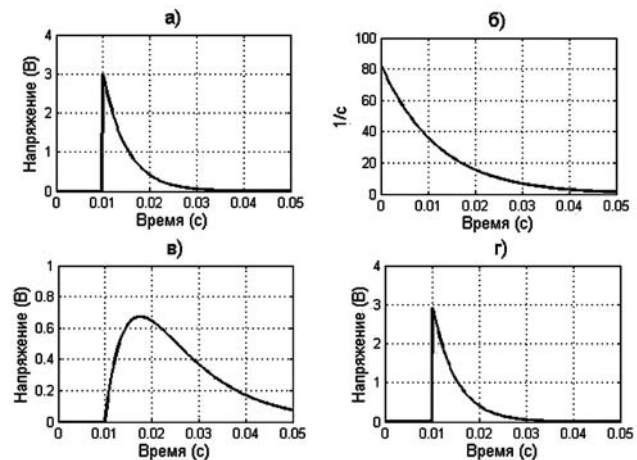


Рис. 2. Восстановление экспоненциального импульса, прошедшего через интегрирующую RC-цепь:

- а – входной импульс $f(t)$;
- б – импульсная характеристика цепи $h(t)$;
- в – выходной сигнал $y(t)$;
- г – восстановленный входной сигнал $f_{\text{вос}}(t)$

На рисунке 3 показано восстановление непрерывного сигнала после прохождения через последовательный колебательный контур. Входной сигнал контура, который восстанавливается изложенным выше методом, моделируется формулой:

$$f(t) = \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

где $\omega_1 = 200$ рад/с, $\varphi_1 = \pi/3$, $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_1$, $\varphi_2 = 0$.

Импульсная характеристика колебательного контура определяется формулой:

$$h(t) \approx \omega_0 \exp(-\alpha t) \sin(\omega_0 t),$$

где $\alpha = 50$ Гц – коэффициент затухания,

$\omega_0 = 1581$ рад/с – собственная частота контура.

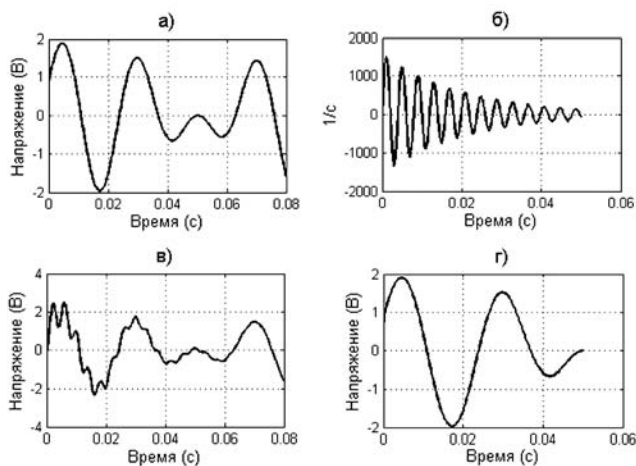


Рис. 3. Восстановление непрерывного сигнала, прошедшего через последовательный колебательный контур:

- а – входной импульс $f(t)$;
- б – импульсная характеристика цепи $h(t)$;
- в – выходной сигнал $y(t)$;
- г – восстановленный входной сигнал $f_{\text{вос}}(t)$

Заметим, что входной и выходной сигналы показаны на более длительных интервалах, чем интервал восстановления. Это сделано с целью наглядно продемонстрировать работоспособность метода при восстановлении протяжённых сигналов.

На рисунке 4 показано восстановление импульсной последовательности после прохождения через тот же колебательный контур.

На всех экспериментальных эпюрах первые рисунки (а) приведены только для сравнения, в восстановлении же участвуют сигналы, эпюры которых приведенные на

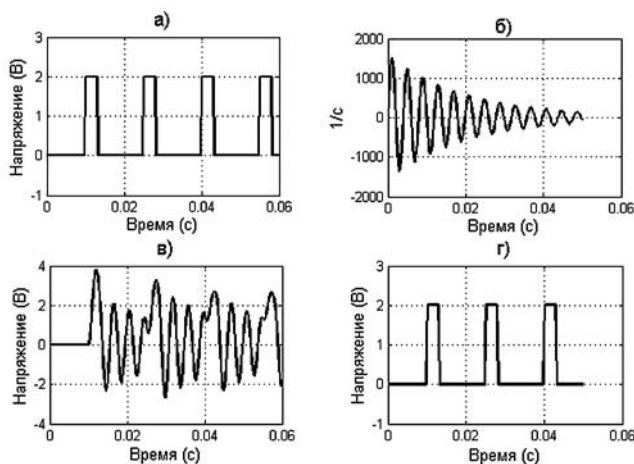


Рис. 4. Восстановление импульсной последовательности, прошедшей через последовательный колебательный контур:

- а – входной сигнал $f(t)$;
- б – импульсная характеристика цепи $h(t)$;
- в – выходной сигнал $y(t)$;
- г – восстановленный входной сигнал $f_{\text{вос}}(t)$

рисунках б) и в): по импульсной характеристике (б) вычисляется матрица восстановления; по выходному сигналу (в) формируется вектор измерений; перемножение их в соответствии с выражением (7) дает восстановленный сигнал. Во всех экспериментах восстановленные таким образом сигналы приведены на рисунках г).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведено теоретическое описание принципиально нового метода решения задачи восстановления входного сигнала по измеренному выходному сигналу. Метод основан на применении томографического подхода в обработке сигналов.

Принципиальным отличием этого метода является возможность восстановления входного сигнала непосредственно по измерениям выходного сигнала и импульсной характеристике фильтра. Приведённое решение не требует ни преобразований из временной области в частотную и обратно, ни итерационной адаптивной процедуры обработки данных. Решение получается прямым вычислением по формуле (7).

При этом, как было отмечено выше, матрица восстановления может быть вычислена заранее, до проведения измерений. В оперативном режиме остаётся лишь измерить выходной сигнал, объединить измерения в вектор-отображение и умножить его на заранее вычисленную матрицу. Эта возможность метода даёт основание предполагать его более высокое быстродействие по сравнению как с инверсной фильтрацией, так и с методом адаптации.

Предложенное решение позволяет избежать таких эффектов, как просачивание мощности в соседние области частот, а также позволяет восстанавливать сигналы, обладающие бесконечным спектром: метод применим для восстановления как непрерывных сигналов, так и импульсных последовательностей и одиночных импульсов. Особенно эффективным представляется его применение для восстановления ограниченных во времени сигналов, например, одиночных импульсов, поскольку эти сигналы могут быть полностью, от начала и до конца, представлены вектором \vec{f} , чего невозможно достичь в отношении их бесконечных спектров, которые используются при восстановлении известным методом инверсной фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпенко Е.Ю. О применении вейвлетов и линейной фильтрации для решения задач восстановления сигналов // Математические машины и системы. – 2008. – Вып. № 2, т. 1. – С. 116–121.
2. Методы математической физики. Интегральные уравнения : методические указания / Иван. гос. хим.-технол. ун-т ; сост. Г.А. Зуева. – Иваново, 2006. – 32 с.
3. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М. : «Наука», 1968. – 400 с.
4. Зражевский А.Ю., Коротков В.А. Восстановление одномерных финитных сигналов, прошедших через фильтр

низких частот // Журнал радиоэлектроники.– 2013. – № 3. – URL: <http://jre.cplire.ru/mac/mar13/10/text.pdf>.

5. Зражевский А.Ю., Коротков В.А. Исследование восстановления сигнала, прошедшего через неидеальный фильтр низких частот. // Журнал радиоэлектроники. 2013.– № 4. – URL: <http://jre.cplire.ru/iso/apr13/4/text.pdf>.

6. Самойленко М.В. Обработка сигналов в задачах локационных измерений и оценивания.– М. : Издательский дом «Спектр», 2016.– 260 с.

7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – 2-е издание.– М. : Высшая школа, 1988.– 448 с.

REFERENCES

1. Karpenko E. Iu. O primeneniі veivletov i lineinoi filtratsii dlia resheniia zadach vosstanovleniia signalov [On Application of Wavelet and Linear Filtering for Solving Signal Regeneration Tasks]. *Matematicheskie mashiny i sistemy* [Mathematical Machines and Systems], 2008, iss. 2, vol. 1, pp. 116–121.

2. Zuev G.A. *Metody matematicheskoi fiziki. Integralnye uravneniia: metodicheskie ukasaniia* [Methods of Mathematical Physics. Integral Equations: Instructional

Guidelines]. Ivanovo, Ivanovo State University of Chemistry and Engineering Publ., 2006. 32 p.

3. Tsyppkin Ya.Z. *Adaptatsiia i obuchenie v avtomaticheskikh sistemakh* [Customization and Training in Automatic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 400 p.

4. Zrazhevskii A.Iu, Korotkov V.A. Vosstanovlenie odnomernykh finitnykh signalov, proshedshikh cherez filtr nizkikh chastot [Restoration of One-Dimensional Finite Signals Passed Through the Low-Pass Filter]. *Zhurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics], 2013, no. 3. Available at: <http://jre.cplire.ru/mac/mar13/10/text.pdf>.

5. Zrazhevskii A.Iu, Korotkov V.A. Issledovanie vosstanovleniia signala, proshedshogo cherez filtr nizkikh chastot [Restoration of the Signal Passed Through Non-Ideal Low-Pass Filter]. *Zhurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics], 2013, no. 4. Available at: <http://jre.cplire.ru/iso/apr13/4/text.pdf>.

6. Samoilenko M.V. *Obrabotka signalov v zadachakh lokatsionnykh izmerenii i otsenivaniia* [Signal Procerssing for Tasks on Location Measurements and Estimation]. Moscow, Spektr Publ., 2016. 260 p.

7. Baskakov S.I. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly. 2-e isd.* [Radio Circuits and Signals. Second Edition]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1988. 448p.