

УДК 621.391.037.3

С.М. Наместников, Н.Ю. Чилихин

МНОГОМЕРНЫЕ КОДОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАССТОЯНИЯ БХАТТАЧАРИЯ¹

Наместников Сергей Михайлович, кандидат технических наук, окончил Ульяновский государственный технический университет, доцент кафедры «Телекоммуникации» УлГТУ. Имеет статьи в области статистической обработки сигналов и помехоустойчивого кодирования. [e-mail: sernam@ulstu.ru].

Чилихин Николай Юрьевич, кандидат технических наук, окончил УлГТУ, доцент кафедры «Телекоммуникации» УлГТУ. Имеет монографию и статьи в области помехоустойчивого кодирования и защиты информации. [e-mail: n.chilikhin@gmail.com].

Аннотация

В статье рассматривается применение расстояния Бхаттачария (РБх) в многомерных кодовых конструкциях для управления избыточной составляющей. Предложенный подход является компромиссом между высокими требованиями к пропускной способности и уровню вероятности ошибки на бит. Многомерные кодовые конструкции достаточно эффективно решают задачу исправления ошибок (естественного и антропогенного характера), возникающих в канале связи. Однако увеличение кодового расстояния за счет создания многомерности приводит к значительному уменьшению кодовой скорости и, как следствие, уменьшению информационной пропускной способности. В этом случае РБх является по сути гибким и эффективным инструментом решения поставленной задачи. Простота применения РБх в схеме полярного кодирования делает этот механизм удобным для проектировщика систем связи, а высокие корректирующие способности полярных кодов позволяют использовать их в качестве внутренних кодов для построения схем каскадного кодирования и кодов размерности 3D. РБх активно применяется для определения сходства между двумя и более множествами. В теории кодирования данный инструмент получил широкое применение в вопросе разнесения кодовых комбинаций в евклидовом пространстве и создания механизма управления порождающей матрицей с целью формирования непрерывного множества кодовых сочетаний. Такие сочетания образуют множество информационных символов, которые варьируются в пределах $k = \{1, n - 1\}$ за исключением отсутствия передачи и безыбыточной передачи.

Ключевые слова: адаптивная система, информационно-управляющий комплекс, каскадное кодирование, коды размерности 3D, матрица Арикана, мягкие решения символов, мягкое декодирование, обратная связь, помехоустойчивые коды, полярные коды, расстояние Бхаттачария.

MULTIDIMENSIONAL CODE STRUCTURES WITH APPLICATION OF THE BHATTACHARYA DISTANCE

Sergei Mikhailovich Namestnikov, Candidate of Engineering; graduated from Ulyanovsk State Technical University; Associate Professor at the Department of Telecommunication at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles in the field of statistical signal processing and noiseless coding. e-mail: sernam@ulstu.ru.

Nikolai Iurievich Chilikhin, Candidate of Engineering; graduated from Ulyanovsk State Technical University; Associate Professor at the Department of Telecommunication at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles in the field of noiseless coding and information security. e-mail: n.chilikhin@gmail.com.

Abstract

The article discusses the application of the Bhattacharya distance in the multidimensional code structures in order to manage excessive component. The proposed approach is a compromise between the high bandwidth requirements and level of error probability on a bit. Multidimensional coded structures effectively solve the problem of error correction (natural and anthropogenic) that arises in the communication channel. However, the increase in code distance by creating multidimensionality leads to a significant reduction in code rate as a result of reducing information bandwidth. In this case, the Bhattacharya distance is a flexible and efficient tool for the task. Usability of the Bhattacharya distance in the scheme

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научного проекта № 16-47-732011\16.

of polar codes makes the mechanism convenient for the designer of communication systems, and high corrective abilities of polar codes allow using them as inner codes to build cascade coding and 3D codes. The Bhattacharya distance is actively used to determine similarities between two or more sets. In the coding theory, this tool is widely used in question of flowing code combinations in the Euclidean space and creation of the generating matrix control mechanism for the purpose of forming the continuous set of code combinations. Such combinations form a set of information symbols that vary in except the lack of transmission and non-excess transmission.

Key words: adaptive system, information management complex, cascaded coding, 3D codes, Arikan matrix, soft decision of symbols, soft decoding, feedback, noiseless codes, polar codes, Bhattacharya distance.

ВВЕДЕНИЕ

Постоянное развитие новых и совершенствование существующих систем наземной и космической связи ставит перед разработчиками целый ряд актуальных вопросов о пропускной способности, быстродействию, масштабируемости, корректирующих способностях и иных характеристиках встраиваемых в информационно-управляющий комплекс (ИУК) схем помехоустойчивого кодирования [1, 2].

Возрастающие требования к пропускной способности и уровню вероятности ошибки на бит для систем подобного класса формируют потребность в адаптивном механизме управления указанными характеристиками. Для нахождения конвергентного решения этой задачи необходимо создание инструмента управления внесенной избыточностью помехоустойчивого кода. Расстояние Бхаттачария (РБх) не только является изящным решением обозначенной проблемы, но и удачно решает целый класс смежных задач, а именно [1]:

1. Управление пропускной способностью и корректирующей способностью;
2. Создание эффективной структурной и параметрической адаптации в ИУК;
3. Сопряжение внутреннего и внешнего кодов при построении каскадных схем кодирования и кодов размерности 3D.

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Процесс создания адаптивных систем связи является сложной и многофакторной задачей. Для ее выполнения необходимо осуществить процедуру декомпозиции и выработки оптимального решения для каждой из подзадач с последующим объединением в единый ИУК. В большинстве современных адаптивных систем связи в качестве инструмента управления применяют обратную связь. Она позволяет создать замкнутый цикл управления, характерный для подавляющего числа автоматизированных систем связи. Однако в рамках подобных систем обратная связь выполняет роль триггера, включающего структурную или параметрическую адаптацию, либо повторную передачу. Методы повторной передачи широко известны и достаточно часто применяются (например, ARQ или HARQ и пр.). Стоит отметить, что подобные подходы чаще используются совместно для обеспечения необходимого уровня адаптации [1].

Существует два подхода для оценки состояния канала связи:

1. на основе информации, полученной по пилот-сигналам;

2. на основе статистических характеристик индексов мягких решений символов (МРС).

В работах [1, 3, 4] показано, что в процедуре вычисления МРС для двоичного канала связи в решающей схеме приемника используются свойства стирающего канала связи. Его параметры выбираются так, чтобы интервал стирания был широким и постоянным по значению. Таким образом, всем сигналам, принятым за пределами зоны неопределенности (в окрестностях математического ожидания случайной величины y), первая решающая схема присваивает максимальную градацию для МРС, равную λ_{max} . Другие значения $\lambda_i < \lambda_{max}$ формируются на основе линейной характеристики, где $\lambda_{max} = 7$ есть максимальная оценка. Значение $\lambda_{max} = 7$ считается достаточным для приема символов [1, 3, 4].

Общее для всех видов модуляции аналитическое выражение характеристик в пределах интервала стирания γ в расчете на худший случай имеет вид [1, 3, 4]:

$$\lambda_i(y) = \left\| \frac{\lambda_{max}}{\gamma \cdot M_{mn}} \times y \right\| \times a_3, \quad (1)$$

где M_{mn} – математическое ожидание модулируемого параметра,

a_3 – коэффициент мультипликативной помехи [1, 3, 4].

Стоит отметить, что в работе [1] показано, что применение параметра σ^2 для оценки канала связи является нецелесообразным. В качестве решения поставленной задачи было предложено определять выборочные m_{xIMR} математическое ожидание и σ_{IMR}^2 дисперсию МРС. Имеется скрытая зависимость параметров канала связи в МРС. Универсальность метода формирования МРС в случае стирающего канала связи с широким интервалом стирания доказывает целесообразность применения математического ожидания как инструмента оценки состояния канала связи.

В условиях изменчивости состояния канала связи на длительном интервале его готовности, а также нелинейности функции вероятности возникновения мешающих факторов возникает потребность гибкого реагирования со стороны цикла управления системы связи, что в свою очередь формирует потребность в унифицированной процедуре создания такой последовательности бит, в которой значение избыточных символов было бы любое в зависимости от типа задач, стоящих перед управляющим центром ИУК. Одной из задач ИУК является эффективная адаптация. Современный арсенал помехоустойчивого

кодирования не обладает простым и гибким инструментом конструирования кодовой комбинации, за исключением системы полярного кодирования [1].

МНОГОМЕРНЫЕ КОДОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Многомерные кодовые конструкции не только позволяют значительно повысить корректирующие способности помехоустойчивых кодов, но и в полной мере удовлетворить потребности современных ИУК. На текущий момент широкое распространение получили схемы каскадного кодирования и коды размерности 3D и выше (гиперкоды). Уменьшение вероятности ошибки на бит приводит к сокращению информационной скорости за счет увеличения избыточной составляющей в структуре кодовых комбинаций. В рамках данной работы рассматриваются коды размерности 2D. На рисунке 1 представлена схема каскадного кодирования. Заливкой выделена область информационных символов.

В результате выполнения процедуры кодирования при $q=2$ получается двоичный блок длиной $N \cdot n$, являющийся кодовой комбинацией каскадного кода, причем $K \cdot k$ двоичных символов будут информационными. Стоит отметить, что кодовая скорость 2D-кода равна $R_{2D} = r_{nk} \cdot R_{NK}$, при этом для внутреннего кода кодовая скорость равна $r_{nk} = k/n$, а для внешнего кода – $R_{nk} = K/N$. Доказано, что построенный указанным способом 2D-код является линейным. При этом кодовое расстояние D_{2D} 2D-кода оказывается не меньше, чем произведение кодовых расстояний внешнего D_{NK} - и внутреннего D_{nk} -кодов. Таким образом, выполняется неравенство: $D_{2D} \geq D_{NK} \cdot D_{nk}$. На практике в качестве внешнего кода применяется (N, K) -код Рида-Соломона (РС), поскольку подобный класс блочковых кодов является максимально декодируемым. Для внутреннего кода же, как правило, используют двоичные блочковые или непрерывные коды. Тем не менее,

кодовое расстояние D_{2D} 2D-кода принимает дискретные значения, которые обусловлены ограниченной вариацией кодовых сочетаний (соотношение информационных символов и длины кодовой комбинации). Получается, что для каждого набора (N, K) -кода (который ограничен) существует определенная своя величина D .

Для расширения данного множества целесообразно применить полярные коды (ПК), которые обладают такой возможностью за счет применения РБх. Это обусловлено тем, что множество информационных символов варьируется в пределах $k = \{1, n-1\}$ (становится квазинепрерывным), за исключением отсутствия передачи и безыбыточной передачи. Таким образом, ПК становятся наиболее подходящими кандидатами в качестве внутреннего кода при каскадном кодировании и образовании кодов размерности 3D.

ПОЛЯРНЫЕ КОДЫ

В качестве исследуемых кодов использовались коды длин $n=8, n=16, n=32$. На рисунках 2 и 3 приведены результаты имитационного моделирования (BER-вероятность ошибки на бит) [1].

При длине блока $n=8$ наилучшей корректирующей способностью обладает АПД. Это обусловлено малой величиной кодового вектора. Потенциальные характеристики АПД для ПК (32,16) оказываются гораздо хуже по сравнению с МРД и АВФ в связи с тем, что в качестве разбиения использовалась модель разделения разрешенных кодовых комбинаций на кластеры размерности 4 с целью снижения вычислительных затрат. Подобный подход приводит к несоблюдению правильного применения АПД. Длина кластера оказывается $f > n/2$. При сокращении длины кластера корректирующая способность АПД становится сопоставима с МРД. При изменении длины кодового вектора и уменьшении числа информационных разрядов

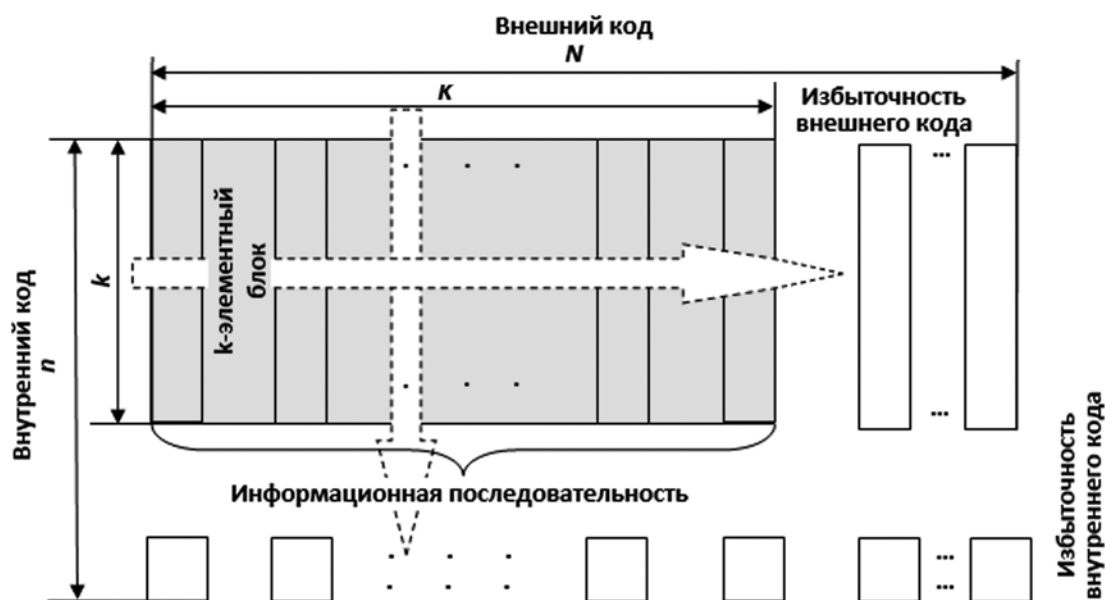


Рис. 1. Процедура каскадного кодирования

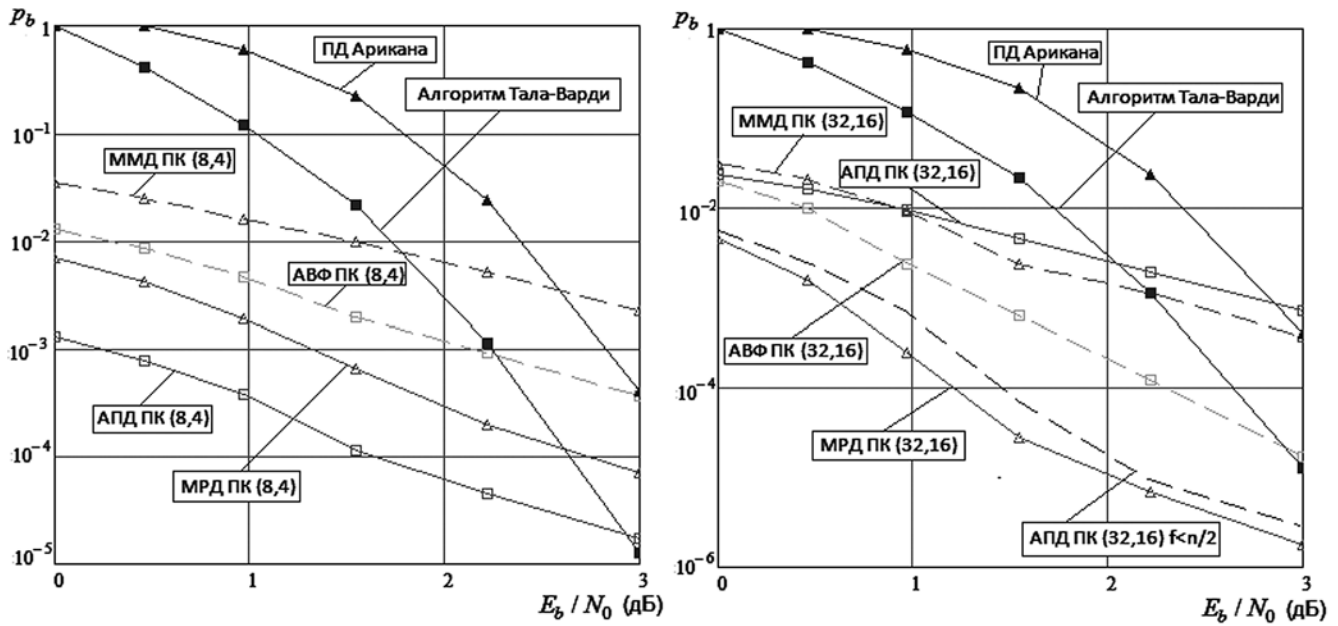


Рис. 2. BER в случае декодирования алгоритмом перестановочного декодирования и известными схемами для ПК (8,4) и ПК (32,16) (АПД – алгоритм перестановочного декодирования, ММД – метод мажоритарного декодирования, АВФ – алгоритм с использованием весовой функции на базе МРС, МРД – метод распространения доверия, ПД Арикана – последовательный декодер Арикана)

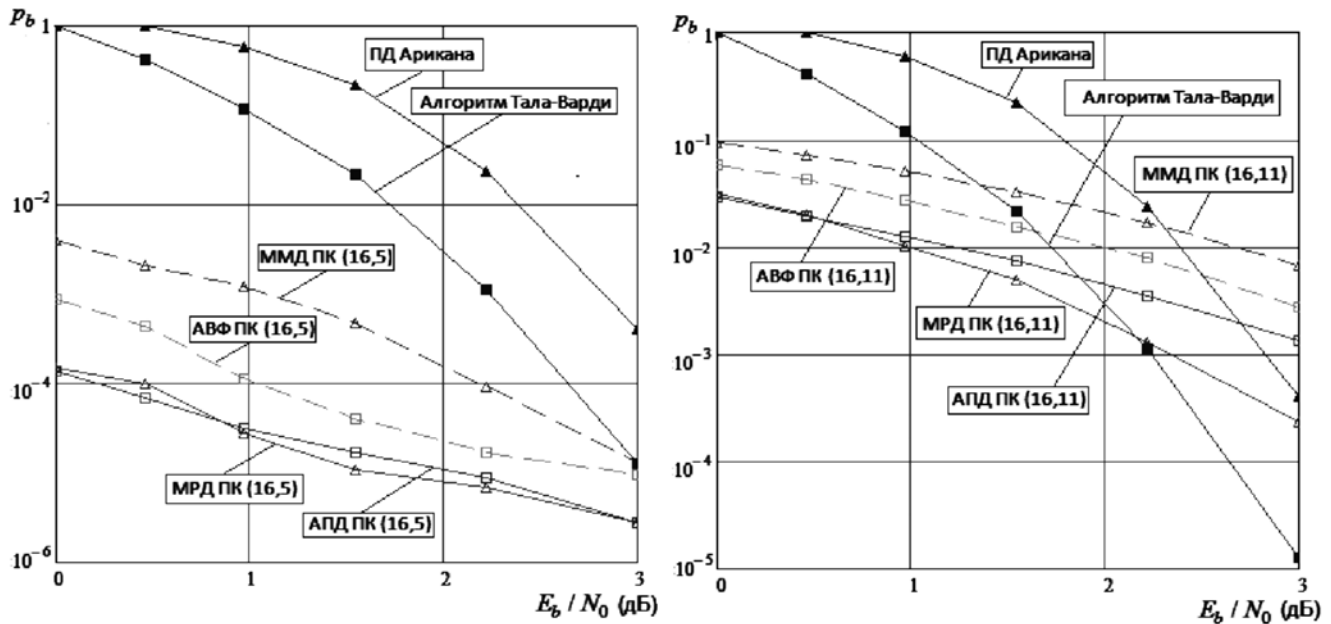


Рис. 3. BER в случае декодирования алгоритмом перестановочного декодирования и известными схемами для ПК (16,5) и ПК (16,11)

АПД ПК (16,5) показывает сходные характеристики с МРД. В этом случае повышение корректирующей способности кода связано с увеличением числа избыточных символов. Поведение характеристики АПД ПК при сохранении длины кодового вектора, но увеличении числа информационных разрядов обусловлено ожидаемым трендом в сторону ухудшения корректирующей способности, характерной для всех схем декодирования. Все рассмотренные мето-

ды и алгоритмы их реализации оказались эффективными относительно классических схем декодирования ПК (например, алгоритм Тала-Варди и ПД Арикана) в диапазоне отношений параметра E_b/N_0 от 0 до 3 дБ. Потенциальные возможности ПК в области низких значений параметра E_b/N_0 говорят о целесообразности использования таких кодов в составе произведения кодов 2D и выше [1, 5–9].

РАССТОЯНИЕ БХАТТАЧАРИЯ



В схеме полярного кодирования задача управления избыточностью решается в рамках метрики или РБх, которое определяется как

$$Z_{2^{i+1},j} = \begin{cases} 2 \cdot Z_{i,\chi} - Z_{i,\chi}^2 & \text{для } j_{0,e}^{N-1} \wedge 0 \leq \chi \leq i, \\ Z_{i,\chi}^2 & \text{для } j_{0,o}^{N-1} \wedge 0 \leq \chi \leq i, \end{cases} \quad (2)$$

где $i = N/2 - 1, j = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, j_{0,e}^{N-1}$ и $j_{0,o}^{N-1}$ – компоненты множества только с четными и нечетными номерами соответственно, начиная с нуля, а $N = 2^m$ – длина кодовой комбинации. Стоит отметить, что множества $|j_{0,e}^{N-1}| = |j_{0,o}^{N-1}| = |\chi|$ равнозначны. Для получения системы уравнений (2) при различных значениях N необходимо использовать такие элементы указанных множеств, которые находятся на одних и тех же позициях. Рассмотрим ПК длины $N = 8$. Порождающая матрица без устранения ненадежных каналов («слабых» строк порождающей матрицы) для указанного кода примет вид $F^{\otimes m} = F^{\otimes 3}$ (через $F^{\otimes m}$ обозначают ее m -ю кронекеровскую степень, где $m \in N$) и равна

$$F^{\otimes 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $F^{\otimes 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ является ядром (матрицей) Арикана [1, 5–8]. Проанализировав структуру кода, можно отметить, что число перестановок меняется в диапазоне $1 \leq M_{un} \leq m-1$, а количество уровней расчета – $1 \leq L_{yp} \leq m$ соответственно. Под перестановкой понимается такое преобразование последовательности бит, полученной с выхода источника информации, при которой последующий шаг отличается от предыдущего на величину столбца исходной порождающей матрицы. При этом происходит перераспределение вероятности стирания (неопределенности) на каждом уровне расчета, который следует после этапа перестановки. Функциональная схема формирования кодового вектора представлена на рисунке 4. При этом символом  обозначается расчет типа $2Z-Z^2$, а символом  обозначается расчет типа Z^2 . Стоит отметить, что оценка ненадежности («за-

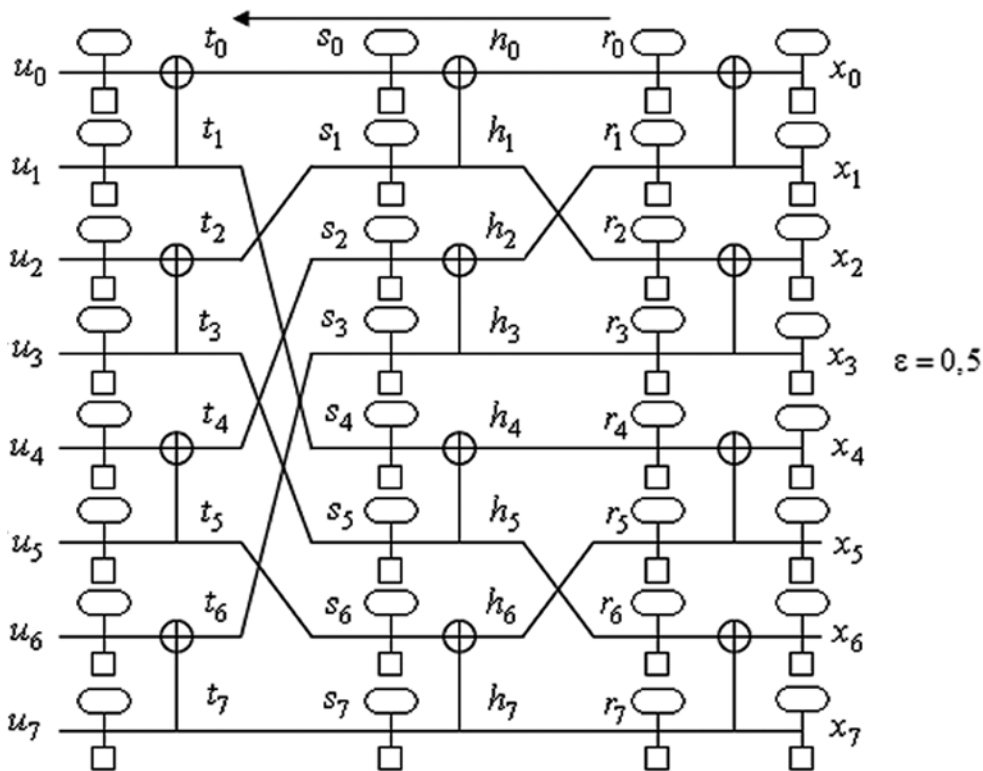


Рис. 4. Функциональная схема формирования кодового вектора ПК длины $N = 8$

мороженности») строки порождающей матрицы (канала связи) происходит на этапе формирования кодового вектора, при этом системой последовательность символов x_0, x_1, \dots, x_{N-1} воспринимается как символы, полученные из канала связи с вероятностью стирания (неопределенности), равной $\varepsilon = 0,5$. Стрелкой показано направление расчета [1].

В нашем примере, применив выражение (2), получим распределение РБх, которое представлено в таблице 1 [1].

Заливкой отмечены ненадежные («замороженные») символы или строки порождающей матрицы, которые будут вычеркнуты. В работах [1, 5–8] было показано, что если РБх $Z \rightarrow 1$, канал считается ненадежным («замороженным», строка порождающей матрицы вычеркнутой) и не влияет на формирование кодового вектора, т. е. указанным компонентам последовательности $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ ставится в соответствие значение «0». На основе ранжирования строк порождающей матрицы (каналов) мы можем гибко управлять кодовой скоростью и выстраивать управляемые с точки зрения объема информационного блока многомерные кодовые конструкции. Таким образом, каждая строка порождающей матрицы имеет свой ранг на основе РБх [1].

Для ПК (8,4)

$$Z(8,4) = \begin{pmatrix} 0,9961 \\ 0,8789 \\ 0,8086 \\ 0,3134 \\ 0,6836 \\ 0,1914 \\ 0,1211 \\ 0,0039 \end{pmatrix},$$

$$F^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 10000000 \\ 11000000 \\ 10100000 \\ 11110000 \\ 10001000 \\ 11001100 \\ 10101010 \\ 11111111 \end{pmatrix} \rightarrow F^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Аналитическое моделирование ИУК позволяет найти пути рациональной организации алгоритмов их функционирования за счет оценки асимптотических границ. Точность окончательных результатов аналитических моделей относительно имитационных моделей оказывается на 10–15% ниже. На рисунке 5 показаны результаты аналитического моделирования системы с каскадным кодированием на основе кода РС над полем $GF(2^4)$ и внутреннего ПК с различной величиной избыточности.

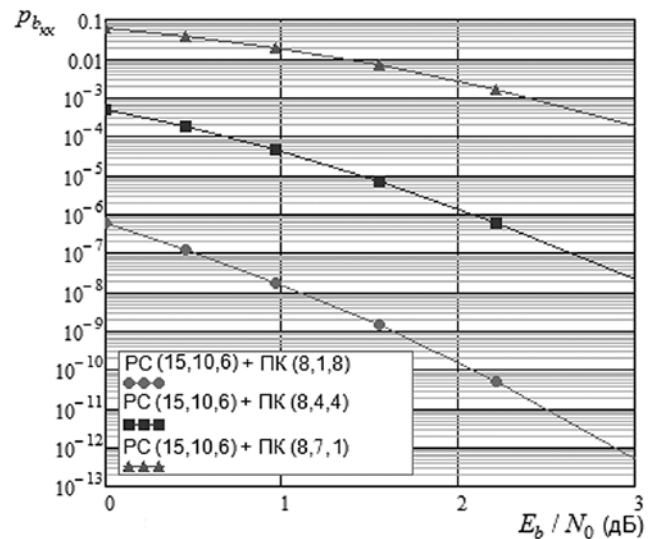


Рис. 5. Результаты аналитического моделирования каскадного кода

Данный график демонстрирует асимптотические границы каскадного кода. Полученный диапазон достаточно широк и позволяет в полной мере удовлетворять потребности ИУК в зависимости от типа задачи. При этом можно найти конвергентное решение между требованиями к пропускной способности (кодовой скорости) и уровню вероятности ошибки на бит.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение РБх при построении многомерных кодовых конструкций позволяет управлять величиной информационного блока (блока избыточности). Принцип работы ИУК с использованием многомерных кодов сводится к 4 шагам:

1. Оценка состояния канала на основе пилот-сигналов или выборочных m_{xIMR} математического ожидания и σ_{IMR}^2 дисперсии МРС и передачи управляющего сигнала по каналам обратной связи о необходимости уменьшения/увеличения вносимой избыточности;

Таблица 1

Распределение РБх для ПК длины $N = 8$

| Параметр | Z_{u0} | Z_{u1} | Z_{u2} | Z_{u3} | Z_{u4} | Z_{u5} | Z_{u6} | Z_{u7} |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Значение | 0,9961 | 0,8789 | 0,8086 | 0,3134 | 0,6836 | 0,1914 | 0,1211 | 0,0039 |

2. Вызов таблицы соответствия ранжированного вектора РБх и номера строк порождающей матрицы;
3. Удаление ненадежных строк порождающей матрицы с последующим получением кодового вектора необходимой размерности с требуемым значением избыточности;
4. Построение многомерной кодовой конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гладких А.А., Климов Р.В., Чилихин Н.Ю. Методы эффективного декодирования избыточных кодов и их современные приложения. – Ульяновск : УЛГТУ, 2016. – 258 с.
2. Унификация алгоритмов декодирования избыточных кодов в системе интегрированных информационно-управляющих комплексов /А.А. Гладких, Н.Ю. Чилихин, С.М. Наместников, Д.В. Ганин // Автоматизация процессов управления. – 2015. – № 1 (39). – С. 13–20.
3. Гладких А.А., Климов Р.В. Численное моделирование обобщенной процедуры формирования индексов мягких решений // Инфокоммуникационные технологии. – 2013. – Т. 11, № 2. – С. 22–28.
4. Гладких А.А., Чилихин Н.Ю. Формирование мягких решений в системе широкополосного канала связи с QPSK-QAM // Автоматизация процессов управления. – 2013. – № 3 (33). – С. 75–79.
5. Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2009. N 7 (55). pp. 3051–3073.
6. Korada S.B., Urbanke R.L. Polar Codes are Optimal for Lossy Source Coding, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2010, Vol. 56, No. 4, pp. 1751–1768.
7. Гладких А.А., Чилихин Н.Ю. Декодирование полярных кодов в декодере Арикана на базе индексов мягких решений // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – Т. 12, № 7. – С. 11–17.
8. Гладких А.А., Чилихин Н.Ю. Моделирование алгоритмов совместной обработки полярных кодов в системе производства кодов // Радиотехника. – 2014. – № 7. – С. 111–115.
9. Гладких А.А., Чилихин Н.Ю. Эффективное декодирование двоичных блоковых кодов // Тр. XV Междунар. науч.-техн. конф. «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций». – Казань, 2014. – Т. 1. – С. 71–73.

REFERENCES

1. Gladkikh A.A., Klimov R.V., Chilikhin N.Iu. *Metody effektivnogo dekodirovaniia izbytochnykh kodov i ikh sovremennye prilozheniia* [Methods for Effective Decoding of Redundant Codes and Its State-Of-The-Art Applications]. Ulyanovsk, ULSTU Publ., 2016. 258 p.
2. Gladkikh A.A., Chilikhin N.Iu., Namestnikov S.M., Ganin D.V. Unifikatsiia algoritmov dekodirovaniia izbytochnykh kodov v sisteme integrirovannykh informatsionno-upravliaiushchikh kompleksov [Unification of Redundant Code Decoding Algorithms in Integrated Information-Management Systems]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2015, no. 1 (39), pp. 13–20.
3. Gladkikh A.A., Klimov R.V. Chislennoe modelirovanie obobshchennoi protsedury formirovaniia indeksov miagkikh reshenii [Numerical Simulation of the Generalized Procedure of Formation of Indices of Soft Decisions]. *Infokommunikatsionnye tekhnologii* [Information and Communication Technologies], 2013, vol. 11, no. 2, pp. 22–28.
4. Gladkikh A.A., Chilikhin N.Iu. Formirovanie miagkikh reshenii v sisteme shirokopolosnogo kanala svyazi s QPSK-QAM [The Formation of Relaxed Solutions in the System of the Broadband Channel with QPSK-QAM]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2013, no. 3 (33), pp. 75–79.
5. Arikan E. Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, no. 7 (55), pp. 3051–3073.
6. Korada S.B., Urbanke R.L. Polar Codes are Optimal for Lossy Source Coding. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2010, vol. 56, no. 4, pp. 1751–1768.
7. Gladkikh A.A., Chilikhin N.Iu. Dekodirovanie poliarnykh kodov v dekodere Arikana na baze indeksov miagkikh reshenii [Decoding Polar Codes in Decoder of Arikan based on the Indexes Soft-Decisions]. *Infokommunikatsionnye tekhnologii* [Infokommunikatsionnye Tehnologii], 2014, vol. 12, no. 7, pp. 11–17.
8. Gladkikh A.A., Chilikhin N.Iu. Modelirovanie algoritmov sovmestnoi obrabotki poliarnykh kodov v sisteme proizvedeniia kodov [Simulation Algorithms Coprocessing Polar Codes in a Product Code]. *Radiotekhnika* [Radioengineering], 2014, no. 7, pp. 111–115.
9. Gladkikh A.A., Chilikhin N.Iu. Effektivnoe dekodirovanie dvoichnykh blokovykh kodov [Effective Binary Block Codes Decoding]. *Tr. XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. "Problemy tekhniki i tekhnologii telekommunikatsii"* [Proc. of the 15th Int. Sci. Conf. "Issues on Engineering and Telecommunication Technologies"]. Kazan, 2014, vol. 1, pp. 71–73.