

MATHEMATICAL MODELING

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.613.3:621.391.827.22

И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова

ЧИСЛЕННЫЕ АСПЕКТЫ УСТРАНЕНИЯ ДАЛЬНЕКОНЦЕВОГО НАЛОЖЕНИЯ НИСХОДЯЩИХ VDSL-КАНАЛОВ¹

Семушин Иннокентий Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные технологии» Ульяновского государственного университета. Член профессиональных обществ: IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) Society; IEEE Control Systems Society. Имеет монографии, статьи, учебные пособия и свидетельства на изобретения. Область научных интересов: теория сигналов и систем, вычислительная математика. [e-mail: kentvsem@yandex.ru].

Цыганова Юлия Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные технологии» УлГУ. Имеет научные публикации, монографию, учебно-методические пособия и свидетельства о регистрации программ. Область научных интересов: параметрическая идентификация и адаптивная фильтрация; численно эффективные алгоритмы для стохастических систем. [e-mail: tsyganovajv@gmail.com].

Аннотация

В этой статье представлен анализ вычислительной сложности двух линейных методов прекодинга – обнуляющего и упрощенного – в контексте высокоскоростных цифровых абонентских линий (Very high-speed Digital Subscriber Line, VDSL). Для обнуляющего (Zero Forcing, ZF) метода проведено сравнение восьми вычислительных стратегий, четыре из которых предусматривают вычисление в явном виде обратных нормированных матриц канала и четыре – нет. Дополнительно оценена сложность упрощенного линейного (Simplified Linear, SL) прекодинга – с приближенным вычислением обратных матриц. Оба метода решают задачу полного (ZF) или приближенного (SL) устранения дальнеконцевого наложения нисходящих VDSL-каналов. Показано, что наименьшую сложность обнуляющего прекодинга передач в нисходящем направлении имеет стратегия, избегающая прямого вычисления матрицы ZF-прекодера. Проведенный анализ позволяет проектировщикам VDSL-систем обоснованно выбирать целесообразную вычислительную стратегию прекодинга, принимая во внимание необходимость адаптивного регулирования мощности сигналов, подаваемых в DSL-канал со стороны центральной станции.

Ключевые слова: VDSL-системы, дальнеконцевое наложение каналов, нисходящие маршруты передачи данных, обнуляющий прекодинг, упрощенный линейный прекодинг.

NUMERICAL ASPECTS OF FAR-END CROSSTALK CANCELLATION IN VDSL DOWNSTREAM

Innokentiy Vasilyevich Semushin, Doctor of Science in Engineering, Professor of Information Technology at Ulyanovsk State University. Memberships in Professional Organizations: IEEE Society; IEEE Control Systems

¹ Данное исследование поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ) и Правительством Ульяновской области РФ, грант 18-47-730001 p_a.

Society. Author of papers, monographs, and textbooks; holds patents for inventions. Field of interest: Systems and signals theory; computational mathematics. e-mail: kentvsem@yandex.ru.

Yulia Vladimirovna Tsyganova, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of Information Technology at Ulyanovsk State University. Author of papers, a monograph, and textbooks; holds State Registration Certificates of computer programs. Field of interest: Parameter identification and adaptive filtering; numerically efficient algorithms for stochastic systems. e-mail: tsyganovajv@gmail.com.

Abstract

A complexity analysis of computations involved in two precoding methods – Zero Forcing (ZF) vs. a Simplified Linear (SL) – in the context of a Very high-speed Digital Subscriber Line (VDSL) is presented in this paper. For the ZF-precoding technique, eight computing strategies have been compared, four of which entail the explicit calculation of inverse normalized channel matrices and other four do not. In addition to this analysis, SL-precoder complexity – based on the approximate matrix inversion—has been estimated. Both methods solve the problem of full or partial far-end crosstalk (FEXT) cancellation in VDSL downstream transmission. For this problem, the strategy avoiding the explicit matrix inversion was found to have the smallest number of multiplication/division operations. The analysis performed provides an opportunity for VDSL-designers to justifiably select a computationally attractive precoding strategy taking into account the necessity of adaptive power control for the input signals to the DSL-channel from the Central Station.

Key words: VDSL-systems, far-end channel crosstalk, downlink data transmission, zero-forcing precoding, simplified linear precoding.

ВВЕДЕНИЕ

В последние 15–16 лет теме прекодинга исследователи и разработчики уделяют много внимания (см., например, [1–3]), и операторы цифровых телекоммуникаций включают такие проекты в число приоритетных [4]. Одно из первых решений задачи подавления FEXT (дальнеконцевого наложения каналов, Far-End Crosstalk) предложили Ginis и Cioffi [5]; это решение было по типу нелинейного прекодера Tomlinson-Harashima [6]. Cendrillon et al дали «почти оптимальное» решение для подавления наложения каналов как на восходящих [7], так и на нисходящих маршрутах [8]. Согласно [8], для этого достаточно использовать свойство диагонального преобладания передаточной матрицы канала, при этом данное обнуляющее (Zero Forcing, ZF) решение требует операции обращения этой матрицы (после ее нормирования) на каждой несущей частоте многоканальной DSL (Digital Subscriber Line) системы. В работе Düngenetal [9] проведено детальное исследование этих решений с количественным анализом скорости передачи данных (Channel Capacity, CC) в зависимости от длины проводного кабеля. Leshem и Youming [10], стремясь ослабить сложность операции прекодинга, вызванную необходимостью обращения матрицы, предложили упрощенную линейную схему прекодера с приближенным вычислением обратной матрицы. Приближение основано на разложении нормированной передаточной матрицы FEXT-канала в степенной ряд. Такой прекодер получил название упрощенный линейный (Simplified Linear, SL), в отличие от ZF-прекодера.

Характеризуя сложность прекодинга, авторы этих и других решений трактуют ее как Channel Theoretical Capacity [8]. CC есть Шенноновская информационная емкость канала, определяемая в оригинале так: “Theoretical maximum achievable error-free (reliably

transmitted) data rate for noisy channels (in bits per second)”, т. е. «Теоретическое значение максимально достижимой скорости безошибочной передачи данных для зашумленных каналов (бит в секунду)».

В то же время в этих работах практически нет анализа численных аспектов прекодинга – с количественной оценкой арифметической сложности вычислений (например, по числу операций умножения/деления). Лишь Shim и Shanbhag в своей работе [11] оценивают арифметическую сложность (в терминах числа умножений-сложений и требуемого числа ячеек памяти), но этот анализ они относят только к операциям цифровой многотональной модуляции (Discrete Multitone, DMT) и однотоновой модуляции (Single-Carrier Modulation, SCM) в контексте высокоскоростных DSL (Very high bit-rate Digital Subscriber Line, VDSL).

Есть два соображения в пользу такого вывода. Во-первых, идея применять линейный прекодер [8] вместо нелинейного [6] с точки зрения сложности очевидна: нелинейные операции изначально сложнее линейных. Во-вторых, заметное упрощение вычислений в SL-прекодере достигается ценой отказа от ZF-свойства: здесь наложение каналов принципиально не может быть сведено к нулю.

Характерно, что известные решения проблемы прекодинга – ни [8], ни [10] – не отрицают главную причину сложности прекодера: вычисление обратной матрицы.

Возникает вопрос: «Почему операцию обращения матрицы для линейного прекодера считают неизбежной?» Возможно, по той причине, что обращенная матрица (матрица прекодера) нужна еще и для других целей? Так, специалисты Huawei утверждают, что она нужна для определения мощности сигналов перед их подачей после прекодера в канал для выравнивания этих мощностей. Если это так, то заслуживает внимания следующий вопрос: «Можно ли регулировать мощно-

сти подаваемых в канал сигналов без явного отыскания матрицы прекодера?»

В план полного изучения вычислительных аспектов FEXT downlink VDSL-преодоления должен войти также следующий вопрос: «Каким образом целесообразно оценивать передаточные матрицы канала на каждой несущей частоте?» – с точки зрения того, что неизбежные неточности оценивания влияют на качество прекодирования. Данное исследование задумано как фундаментально-практическое, но эта статья освещает лишь первые два вопроса. Их решение стимулировано компанией Huawei [4, р. 39, 55–70], чьи сотрудники в Moscow Huawei RRC утверждают: «Тема эффективного обращения как больших, так и малых матриц извечна, поскольку возникает в большом разнообразии решаемых задач».

Основным результатом данного исследования являются точные сравнительные характеристики вычислительной сложности различных схем почти оптимального линейного ZF-прекодирования для подавления FEXT на нисходящих маршрутах передачи в VDSL-системах. Метрой сложности служит необходимое количество операций умножения и деления чисел (в общем случае – комплексных) для решения задачи.

Дальнейший текст организован следующим образом. Раздел 1 включен для того, чтобы иметь детальные представления о месте проблемы наложения каналов в русле развития технологий и стандартов цифровых систем связи. В частности, из краткого описания основных методов модуляции дискретных сигналов следует та модель узкополосного канала, которая далее формализована в постановочном разделе 2. В нем после формулирования задачи анализа арифметической сложности прекодирования помещены девять решений этой задачи, различающиеся алгоритмом (стратегией) вычислений. В разделе 3 предлагается подход к определению мощности сигналов, идущих в канал, для ее регулирования. Заключительный раздел суммирует выводы из полученных результатов и выделяет задачи дальнейших работ по этой теме.

1 FEXT В ОБЩЕМ КОНТЕКСТЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ СВЯЗИ

1.1 MIMO-технологии и стандарты

Общемировая тенденция придания информационной среде все более широких возможностей коммуникации привела к появлению многих нетривиальных технологий и стандартов. Технология MIMO (Multiple-Input and Multiple-Output) внедрена как в беспроводные, так и проводные системы связи для улучшения качества передачи. В беспроводных системах стандарт WiMAX (Worldwide Interoperability for Microwave Exchange) принят многими компаниями как инструмент высокоскоростного беспроводного доступа к сети, альтернативный выделенным телефонным линиям (DSL). На физическом уровне WiMAX основан на методе модуляции с множеством несущих частот, ортогональных

между собой (Multi-Carrier Modulation, MCM). Концепция MCM появилась в 1960-е годы под названием мультиплексирование с ортогональным разделением частот (Orthogonal Frequency-Division Multiplexing, OFDM). Его исходная идея – разделение входного высокоскоростного потока данных на несколько параллельных более низкоскоростных потоков, которые модулируются отдельными частотными носителями, создавая таким образом отдельные «подканалы» (называемые кратко «тоны»). Эта же идея реализована в дискретной многоканальной технологии (Discrete Multi-Tone, DMT).

Технологии OFDM и DMT утверждены стандартизирующими организациями в области телекоммуникаций: IEEE 802, American National Standards Institute (ANSI), European Telecommunications Standards Institute (ETSI), и International Telecommunications Union (ITU). Эти стандарты рекомендованы для предоставления услуг связи как в беспроводных (OFDM), так и проводных (DMT) системах [12].

1.2 Сходство и различия OFDM- и DMT-технологий

Архитектуры OFDM и DMT одинаковы, но алгоритм OFDM считается упрощенной версией алгоритма DMT [13]. Оба метода основаны на модулировании сигналов, оба используют для этого множество несущих синусоидальных частот (тонов), в обоих методах тоны взаимно ортогональны, и оба метода используют быстрое преобразование Фурье (БПФ) – обратное на передающей стороне и прямое на стороне приемника. Два основных различия между OFDM и DMT заключаются в следующем [14, 15]:

1. OFDM-технологии применяют в беспроводных системах, а DMT служит основой проводных MCM-систем.

2. DMT-технология реализует адаптивную загрузку битов данных для каждого подканала. В отличие от беспроводных систем, передача на витых парах (ВП) медного провода инвариантна во времени: передаточные функции ВП стационарны. Знание этих характеристик позволяет DMT-системам оптимально адаптировать передачу к передающей среде. DMT-технология направляет мощность сигнала в те частоты, где она наиболее эффективно используется. Для достижения такого результата DMT-система оценивает соотношение сигнал/шум в каждом подканале во время тренировочной фазы модема. Согласно этой информации, алгоритм загрузки битов назначает разное количество битов каждому подканалу, предпочитая тот подканал, который максимизирует пропускную способность модема [16]. В отличие от DMT, OFDM-технология использует единое значение спектральной эффективности для всех подканалов.

OFDM/DMT-архитектура (с циклическим префиксом) выглядит в несколько упрощенном, по сравнению с [12, р. 11], виде, как показано на рисунке 1. На передающей стороне (это блоки от 1 до 5) входной поток данных поступает как последовательность битов (нулей и единиц) во временной области. В блоке 1 он разветвляется в K параллельных подпотоков, подающих данные с пони-

женными скоростями. Это позволяет подстраиваться гибко и эффективно под жесткие условия работы передающей среды (обозначаемой обобщенно термином «канал»). В блоке 2 каждый подпоток преобразуется в модулированный формат с использованием одной из технологий цифровой модуляции [17]. В случае квадратурно-амплитудной модуляции (QAM – Quadrature Amplitude Modulation [17, р. 357–360]) входные биты отображаются на комплексную плоскость в точки сигнального созвездия (constellation diagram) для каждого тона. Отображенные биты подпотоковых данных накладываются на тоны, представляющие собой набор из K параллельных синусоидальных осцилляторов, настроенных на K ортогональных частот f_0, f_1, \dots, f_{K-1} . Результирующие величины $X_k, k=0, 1, \dots, K-1$, в наборе $\{X_0, X_1, \dots, X_{K-1}\}$ трактуются как числа в комплексной области, подвергаемые обратному дискретному быстрому преобразованию Фурье (ОДБПФ) в блоке 3 для перевода данных из частотной области во временную область. На выходе ОДБПФ получают набор величин:

$$x_n = \sum_{k=0}^{K-1} X_k W_K^{-kn}, \quad W_K^{-kn} \triangleq \exp\left\{-\frac{j2\pi kn}{K}\right\},$$

$$j \triangleq \sqrt{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, K-1,$$

как функций дискретного времени n . Для получения вещественной последовательности x_n комплексно-значная последовательность X_k обладает свойством симметричной сопряженности:

$$X_i = X_{K-i}^*, \quad 0 < i < K/2,$$

что позволяет реализовать K -точечное обратное БПФ. Затем к последовательности x_n добавляют циклический префикс (cyclic prefix, CP) в блоке 4. В блоке 5 этот набор преобразуют из параллельной формы в последовательную форму аналогового сигнала $s[t] = (x_0, x_1, \dots, x_{K-1})$, трактуемого как одиночный сигнальный символ $s[t]$, подлежащий передаче через канал в момент времени t . Добавление CP в блоке 4 позволяет полностью избавиться от межсимвольной интерференции (Inter Symbol Interference, ISI) и межто-

нальной интерференции (Inter Carrier Interference, ICI), для чего длительность CP делают больше времени распространения сигнала в канале и все подканалы (тоны) синхронизируют между собой. Передаваемый сигнальный символ $s[t]$ находится в канале под воздействием двух явлений: 1) умножение на передаточный коэффициент канала $h[t]$, для краткости также обозначаемый термином «канал» (для общности ситуаций этот коэффициент здесь обозначен как зависящий от момента времени t , хотя он может быть и постоянным, – при стабильных условиях работы); 2) добавление шума $v[t]$, что приводит в результате к появлению принятого сигнального символа

$$y[t] = h[t]s[t] + v[t]$$

в момент времени t на выходе канала (условный блок 6 на рисунке 1).

На принимающей стороне (блоки 7–12) аналоговый сигнальный символ $y[t]$ переводится из последовательной формы $y[t] = (y_0, y_1, \dots, y_{K-1})$ в цифровую параллельную форму (в блоке 7), из которой CP удаляется в блоке 8. К полученному таким образом параллельному кодовому набору величин $[y_0, y_1, \dots, y_{K-1}]$ применяется БПФ (блок 9), чтобы перевести их обратно в комплекснозначную форму символов для каждого подканала:

$$Y_k = \sum_{n=0}^{K-1} y_n W_K^{kn},$$

$$W_K^{kn} \triangleq \exp\left\{\frac{j2\pi kn}{K}\right\},$$

$$k = 0, 1, \dots, K-1.$$

В блоке 10 (называемом эквалайзер) происходит коррекция (выравнивание) уровня мощности между теми частотными компонентами сигнала, которые могли подвергнуться сильному ослаблению в процессе передачи вплоть до их пропадания. Причиной этого служат эхо-сигналы из-за рассогласования волновых сопротивлений в электрических DSL-цепях. Надобность в хорошем эквалайзере объясняет, почему задача оценивания частотной характеристики затухания в канале

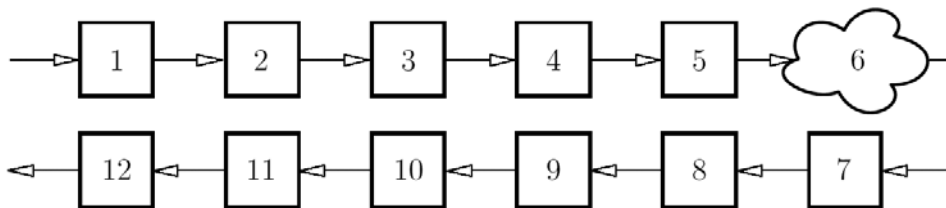


Рис. 1. OFDM/DMT-архитектура с циклическим префиксом: 1 – преобразователь «последовательный в параллельный»; 2 – модуляция; 3 – ОДБПФ; 4 – добавление циклического префикса; 5 – цифро-аналоговый преобразователь «параллельный в последовательный»; 6 – канал (физическая среда передачи сигналов: беспроводная для OFDM или проводная для DMT); 7 – аналого-цифровой преобразователь «последовательный в параллельный»; 8 – удаление циклического префикса; 9 – дискретное БПФ; 10 – эквалайзер в частотной области; 11 – демодуляция; 12 – преобразователь «параллельный в последовательный»

является важной. Для OFDM-технологий эта задача еще более актуальна, поскольку беспроводной канал изначально нестабилен по своим свойствам.

1.3 DSL-системы более отдаленной перспективы

Чтобы выдержать состязание с другими сетевыми технологиями, такими как беспроводные, оптические или коаксиальные, DSL-системы должны увеличивать скорость передачи. Ожидается, что скорость 1 Гб/с будет превышена к 2030 году: стандартизация Omega DSL-технологии уже начата в проекте G.fast [18]. Кроме высокой скорости, эти системы будут обладать и другими усовершенствованиями: гибкость в адаптации к условиям канала передачи, более эффективное потребление энергии, устойчивость к пакетным ошибкам и предотвращение наложений каналов.

Явление такого наложения (Crosstalk) означает, что на приемной стороне будет приниматься не только правильный (или, как его называют, прямой) поток информации, но также данные из другого (постороннего) потока. Устранение наложений – одна из приоритетных задач и в современных VDSL-системах, решаемая с помощью прекодинга.

1.4 Тенденции продвижения оптоволоконных систем к пользователю

Эксплуатация xDSL-системами готовых телефонных сетей, давно созданных и используемых повсеместно для передачи сигналов голосового диапазона (до 4 КГц), экономична по сравнению с FTTH-технологией «оптоволоконно к дому» (Fiber To The Home, FTTH). В действительности, FTTH-технология существует как реальная альтернатива DSL с 1988 года [19]. До этого основной была технология ADSL (асинхронная передача по витой паре (ВП) длиной до 5 км). Одной из первых систем с оптоволоконным стала FTTH-технология «оптоволоконно до сетевого узла» (Fiber To The Node, FTTH), от которого до потребителей оставалось не более 1 км медного кабеля для VDSL- или VDSL2-связи. Еще ближе к потребителю стала FTTC-технология «оптоволоконно до распределительного шкафа» (Fiber To the Curb, FTTC), от которого до потребителей остается не более 200 м медного провода для VDSL-, VDSL2- или (перспективной) Omega DSL-связи. Передача на таких малых дистанциях возможна на повышенных частотах: порядка 200 МГц или выше (для Omega DSL).

1.5 Наиболее острые проблемы в DSL-системах

Несмотря на эти очевидные тенденции, высокоскоростные цифровые абонентские линии (VDSL, VDSL2) остаются преобладающими на резидентном рынке [20] и принадлежат к одному из последних достижений в продолжающейся эволюции DSL-стандартов [21]. Они способны обеспечивать на одной телефонной ВП медного провода скорость DMT-передачи до 52 Мб/с [22]. Высокие скорости передачи данных абонентам, проживающим на фиксированном месте (резидентным пользователям), достигаются в широком диапазоне несущих частот (до 17,664 МГц [23]) на не слишком длинных

(до 1,2 км) ВП-линиях [18, р. 21]. Каждому абоненту выделена своя ВП, и на каждой ВП реализуется DMT-режим [22] по схеме на рисунке 1. Благодаря этому, VDSL-системы приобретают преимущества [12], но имеют и собственные трудности, и острые проблемы в обеспечении качества передачи. Суммируем эти особенности в едином списке:

1. В современных VDSL-системах применяется прогрессивная DMT-технология, которая делит весь частотный диапазон (до 17,664 МГц [23]) на $K=247$ узких (по 4,3125 КГц) полос, называемых подканалами (тонами) (рис. 2).

2. На k -м тоне, $k=0, 1, \dots, K-1$, передаются N кодов $x_i^{(k)}$, $i=1, 2, \dots, N$ одновременно к N пользователям по N ВП; коды формально собраны в вектор

$$x_k \triangleq \left[x_1^{(k)} \mid x_2^{(k)} \mid \dots \mid x_N^{(k)} \right]^T$$

для передачи в один момент времени.

3. N отдельных ВП собраны в жгуты в связи по 4–10 кабелей; в каждом кабеле от 50 до 100 ВП. Таким образом, число N абонентов может быть в диапазоне от двух до десяти сотен [24, с. 5].

4. Поскольку ВП и кабели тесно прилегают друг к другу в жгучевой связи и неидеально изолированы друг от друга, возникает их взаимодействие: шумовые помехи и взаимное наложение каналов.

5. У наложения каналов есть две разновидности: ближнеконцевое (near-end crosstalk, NEXT) и дальнеконцевое (far-end crosstalk, FEXT). NEXT возникает, когда восходящий (upstream) сигнал (от одного пользователя в сторону оптического сетевого блока, ОСБ) взаимодействует с нисходящим (downstream) сигналом (от ОСБ к другому пользователю), или же наоборот.

6. FEXT появляется, когда взаимодействуют два сигнала, идущие в одном и том же направлении: либо

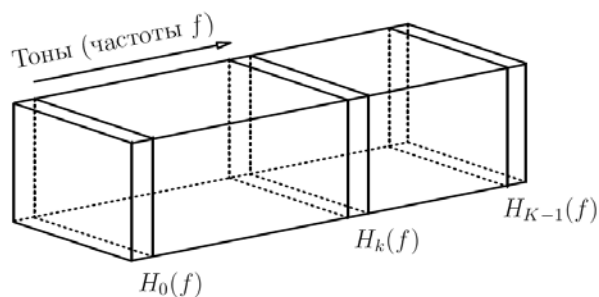


Рис. 2. Передаточные матрицы подканалов $H_k(f) \triangleq H_k(f_k)$ являются комплекснозначными матрицами (функциями частот f_k) размера $N \times N$; $k=0, 1, \dots, K-1$, где K – число подканалов (тонов). В современных VDSL-системах частотный диапазон до 17,664 МГц разделен на $K=247$ узких (по 4,3125 КГц) полос [23]. В стандарте G.fast частотный диапазон для DSL в 106 МГц содержит значительно больше тонов (от 2048 до 4096)

upstream, либо downstream. В VDSL-системах явление NEXT устраняют, применяя дуплекс с частотным разделением каналов [25]. FEXT оказывается наиболее опасным явлением.

7. Явление FEXT в случае upstream-передачи может быть погашено с применением известных методик [5, 26, 27]. Они опираются на тот факт, что в upstream-сценарии принимающие модемы сосредоточены в одном месте (в центральной станции, ЦС). Это обстоятельство позволяет выполнять на ЦС согласованные отфильтровывающие действия [7].

8. К сожалению, в случае downstream-сценария устранение FEXT на принимающей стороне невозможно, так как принимающие модемы рассредоточены в пространстве. Однако в этом случае передающие модемы сосредоточены в одном месте: в ОСБ или на ЦС (рис. 3), и это открывает возможности для предкомпенсации наложения каналов.

9. Эта методика, называемая прекодинг (precoding), заключается в том, что сообщения (сигналы от модема) подвергаются намеренному преобразованию перед тем как их отправить пользователям по ВП. Для этого, естественно, надо заранее знать (как можно точнее оценивать) передаточные свойства каналов, реализуемых на ВП, собранных в жгутовую связку, на каждой несущей частоте. Имея такую информацию, прекодинг выстраивают так, чтобы все принимающие модемы получали сообщения, очищенные от перекрестных наложений каналов [8].

10. «Очистку» каналов связи от перекрестных наложений желательно иметь полную; такой прекодинг называют «обнуляющим» – Zero-Forcing (ZF-прекодинг) [28, 29], но допускают и частичную crosstalk-компенсацию [30].

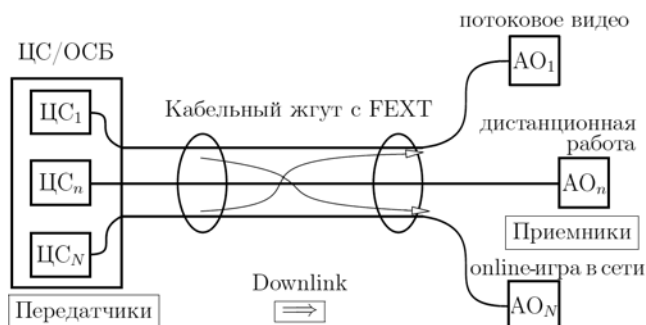


Рис. 3. Дальнеконцевое наложение (FEXT) нисходящих (Downlink) VDSL-каналов: $n = 1, \dots, N$ – число пользователей с выделенными линиями; АО – абонентское оборудование (модем пользователя). Данные передаются от ЦС до ОСБ по волоконному световоду (в случае FTTH или FTTC), а далее к пользователям по медным проводам, собранным в кабельный жгут. Эксплуатируется традиционная телефонная сеть (Plain Old Telephone, POT network); по ней идут разговоры (в голо-вом диапазоне частот – до 4 КГц)

11. Хотя crosstalk-прекодинг эффективен, он требует высоких вычислительных затрат. Например, линейный алгоритм прекодинга для 25-ти пользователей требует несколько миллиардов операций умножения в секунду [30]. Нелинейные схемы прекодинга (Tomlinson-Harashima Precoder [6] или другие) требуют еще больше операций. Часто это превышает возможности существующих DSL-платформ.

12. Значение методов подавления наложений каналов возрастает в свете того, что развитие Omega DSL-технологии, как уже отмечалось, нацелено на достижение сверхвысоких скоростей передачи на агрегированных upstream- и downstream-маршрутах [18].

13. Новый стандарт G.fast для DSL, одобренный международным телекоммуникационным союзом (International Telecommunication Union, ITU), уже эксплуатирует диапазон до 106 МГц, а стандарт на 212 МГц находится в стадии определения [31]. На частотах выше 100 МГц уровень коэффициентов взаимовлияния (коэффициентов перекрестных связей) каналов уже заметно превышает уровень коэффициентов прямой связи передатчика и приемника.

14. Формально это означает, что матрицы передачи подканалов больше не обладают построчным свойством диагонального преобладания, а фактически это приводит к тому, что линейный ZF-прекодер уже не является почти оптимальным решением для нисходящей векторной передачи сообщений [32]. В этих условиях наложение каналов становится наиболее острой проблемой, а его подавление – абсолютной необходимостью [2].

15. В типичном случае современных VDSL-систем FEXT оказывается на 10–15 дБ мощнее других источников шума, поэтому сетевые операторы считают FEXT основным ограничителем качества xVDSL.

2 ФОРМУЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА СЛОЖНОСТИ ПРЕКОДИНГА

Задача:

Даны вектор $x \in \mathbb{C}^N$, матрица коэффициентов усиления $G = \text{diag}[g_1, \dots, g_N]$ с элементами $g_i \in \mathbb{R}^N$, сигнал $s = Gx$ и матрица $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Требуется вычислить $x' = Ps$, удовлетворяющий системе $Ax' = s$, где $P \triangleq A^{-1}$ – матрица линейного прекодера. Преобразованный сигнальный вектор сообщений $x' \in \mathbb{C}^N$ подается на входы N кабельных ВП.

Обозначения:

- Строчные латинские буквы обозначают N -векторы (одной и той же размерности N).
- Соответствующие $N \times N$ -матрицы преобразований обозначены заглавными латинскими буквами.
- Множества комплекснозначных векторов и матриц обозначены \mathbb{C}^N и $\mathbb{C}^{N \times N}$ соответственно.

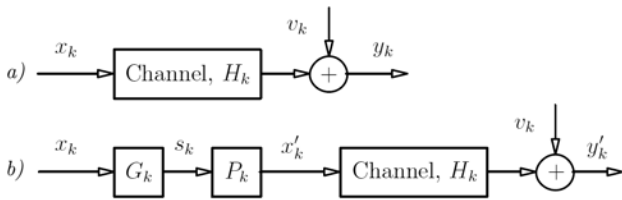


Рис. 4. а) Исходная модель (1) передачи сигнала x_k ; б) Модифицированная модель передачи сигнала x_k с применением матрицы заданных коэффициентов усиления G_k и прекодера P_k

Модель узкополосного (k -го) подканала:

На каждом k -м тоне k -й подканал моделируют k -й комплекснозначной передаточной матрицей $H_k \triangleq H_k(f) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ (рис. 2). Любой n -й диагональный элемент матрицы H_k обозначает коэффициент прямой (правильной) передачи сигнала, предназначенного n -му пользователю. Внедиагональные элементы n -й строки матрицы H_k обозначают коэффициенты передачи сигналов, попадающих к n -му пользователю, но предназначенных другим пользователям (crosstalk-коэффициенты).

Предполагая, что на передающей стороне модемы синхронизированы и применена DMT-модуляция, передачу данных моделируют независимо на каждом тоне соотношением, показанном на рисунке 4а:

$$y_k = H_k x_k + v_k, \quad k=0, 1, \dots, K-1. \quad (1)$$

Модельное соотношение (1) следует понимать как записанное в частотной области: x_k есть передаваемый символ, y_k – принятый символ и v_k – аддитивный шум на тоне k . Шум v_k обусловлен разными (не зависящими друг от друга) физическими причинами: температурная нестабильность, посторонние наводки и радиочастотная интерференция [1, р. 11] или [30, р. 4]; поэтому есть основания принять для него модель аддитивного белого гауссова шума (АБГШ), что обычно и делают.

Замечание:

- В дальнейшем векторы и матрицы записываем без индекса k , подразумевая, что соотношение (1) действует независимо для любого k -го подканала.

Вопрос о прекодере (см. рис. 4б):

- Как следует определять прекодер P , чтобы ликвидировать (или хотя бы ослабить) перекрестное наложение каналов в y' , т. е. чтобы гарантировать поэлементное соответствие между y' (принятый вектор символов) и x (отправленный вектор символов)? Другими словами, потребуем:

$$y'_n = a_n x_n + \xi_n \quad \text{с некоторыми скалярами } a_n, \quad n=1, \dots, N.$$

Формальное решение вопроса о прекодере:

- ① Предварительное умножение x на $G \triangleq \text{diag}[g_1, \dots, g_N]$ дает $s \triangleq Gx \triangleq [g_1 x_1, \dots, g_N x_N]^T$.
- ② Обозначим $D^{-1} \triangleq \text{diag}[h_{11}^{-1}, \dots, h_{NN}^{-1}]$; следовательно, $D \triangleq \text{diag}[h_{11}, \dots, h_{NN}]$.

$$\textcircled{3} \text{ Обозначим } E \triangleq \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & 0 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

так что $H = D + E$.

- ④ Обозначим

$$A \triangleq D^{-1}H = \begin{bmatrix} 1 & h_{11}^{-1}h_{12} & \dots & h_{11}^{-1}h_{1N} \\ h_{22}^{-1}h_{21} & 1 & \dots & h_{22}^{-1}h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{NN}^{-1}h_{N1} & h_{NN}^{-1}h_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

так что $A = I + D^{-1}E$.

- ⑤ Обозначим $P \triangleq A^{-1}$, так что $P = H^{-1}D$ или $P = (I + D^{-1}E)^{-1}$.

- ⑥ Используя $P = H^{-1}D$, образуем $x' = P(Gx)$, как выше показано (см. рис. 4б), чтобы получить

$$\begin{aligned} y' &= Hx' + v = HP(Gx) + v = HH^{-1}D(Gx) + v = \\ &= D(Gx) + v; \\ y' &= [h_{11}g_1x_1, \dots, h_{NN}g_Nx_N]^T + v'; \\ y'_n &= a_n x_n + v_n, \quad a_n = h_{nn}g_n, \quad n=1, \dots, N. \end{aligned}$$

Пункты от ① до ⑥, кроме ③, в этом списке введены, чтобы придать конкретную форму известному ответу (см. [8] или [1, р. 34–35]) на поставленный вопрос о ZF-прекодере:

ZF-прекодер P следует определять по формуле $P = A^{-1}$.

Следовательно, для ZF-прекодера P требуется обращение матрицы A – нормированной матрицы передачи канала. Пункт ③ и альтернативное точное выражение $P = (I + D^{-1}E)^{-1}$ в пункте ⑤ используют для построения упрощенного линейного (SL) прекодера, предполагая, что матрица H обладает свойством почтронного диагонального преобладания (ПДП). При этом условии, согласно теореме Гершгорина, абсолютное значение всех собственных значений матрицы $(D^{-1}E)$ меньше единицы [33, с. 208–209]. Следовательно, следующее разложение в степенной ряд сходится, и к нему применимо приближение порядка M :

$$\begin{aligned} (I + D^{-1}E)^{-1} &= I + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (D^{-1}E)^m \approx \\ &\approx I + \sum_{m=1}^M (-1)^m (D^{-1}E)^m. \end{aligned} \quad (2)$$

В работе [10, с. 5] рекомендовано применять это приближение, даже если ряд (2) не сходится, проще всего при $M=1$. Таким образом,

SL-прекодер P следует определять по формуле $P \approx I - D^{-1}E$.

Сопоставляемые стратегии решения задачи анализа сложности прекодинга:

- Возможные стратегии решения задачи обозначим символами Σ_i . Здесь они пронумерованы от $i=1$ до $i=9$. Одновременно пусть Σ_i обозначает суммарное количество операций умножения и деления чисел для стратегии Σ_i .

- Первые восемь стратегий соответствуют задаче точного обращения матрицы, девятая – задаче приближенного обращения.

- Первые четыре стратегии содержат обращение матрицы, следующие четыре – нет.

1. Стратегия Σ_1 реализует вычисление $P=A^{-1}$ после разложения $A=L\bar{U}$ по схеме Гаусса.

2. Стратегия Σ_2 реализует вычисление $P=A^{-1}$ после разложения $A=L\bar{U}$ по схеме Жордана.

3. Стратегия Σ_3 реализует элиминативное вычисление $P=A^{-1}$ после разложения $A=L\bar{U}$ по схеме Жордана.

4. Стратегия Σ_4 реализует элиминативное вычисление $P=A^{-1}$ после разложения $A=L\bar{U}$ по схеме Гаусса.

5. Стратегия Σ_5 реализует разложение $A=L\bar{U}$ по схеме Жордана и решение систем без $P=A^{-1}$.

6. Стратегия Σ_6 реализует разложение $A=L\bar{U}$ по схеме Гаусса и решение систем без $P=A^{-1}$.

7. Стратегия Σ_7 реализует разложение $A=QR$ по схеме Хаусхолдера и решение систем без $P=A^{-1}$.

8. Стратегия Σ_8 реализует последовательное МНК-решение систем по схеме Поттера без $P=A^{-1}$.

9. Стратегия Σ_9 реализует упрощенный линейный прекодер $P \approx I - D^{-1}E$.

Алгоритмы первых восьми стратегий хорошо известны [34] и частично характеризованы в [35]. Подсчет количества операций умножения/деления, проведенный для них по методике работы [35], дал результаты, представленные на рисунке 5 и в таблице. Алгоритм стратегии Σ_9 достаточно прост: сначала вычисляем Es (где $s=Gx$), это требует $N(N-1)$ умножений; затем находим $D^{-1}(Es)$, это требует N делений; всего $\Sigma_9=N^2$ операций.

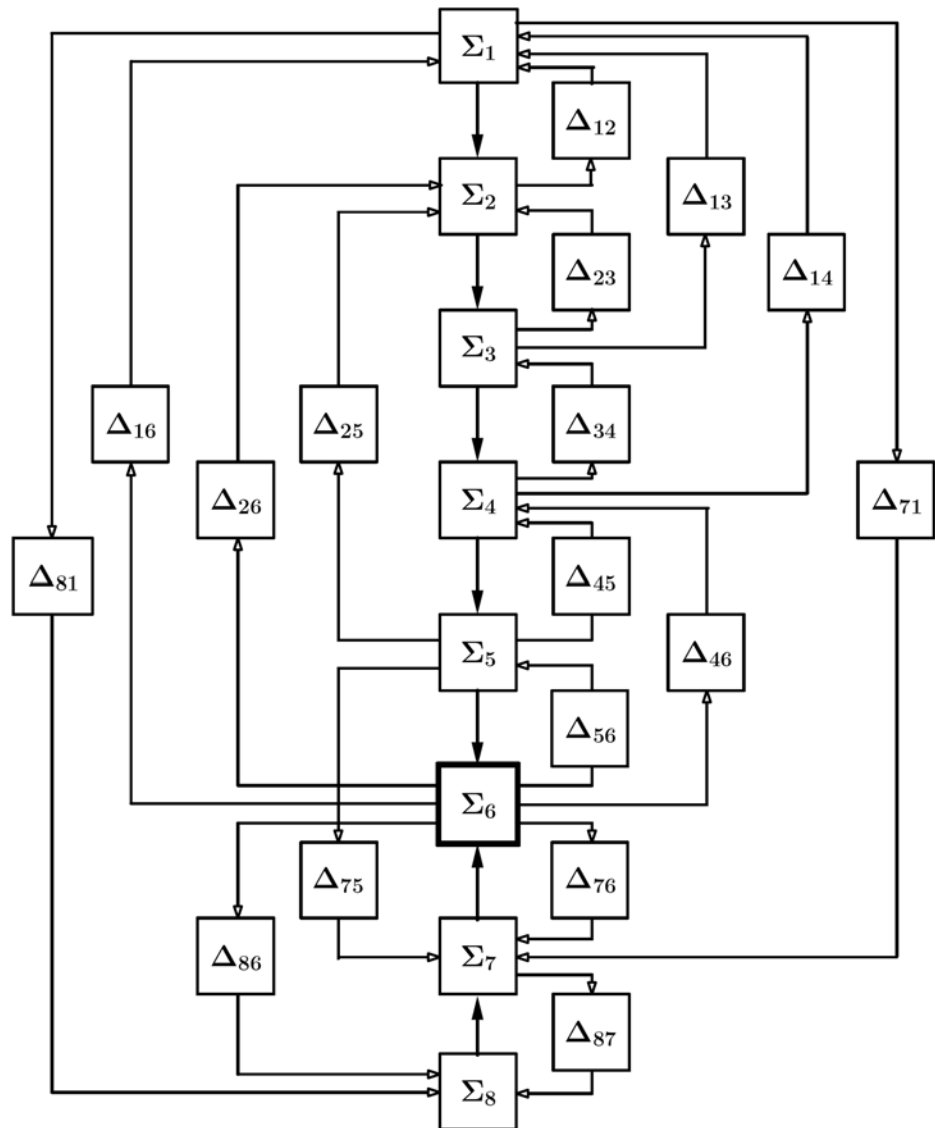


Рис. 5. Вычислительная нагрузка различных стратегий: от Σ_1 до Σ_8 . Стратегии $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ используют обратную матрицу. Стратегии $\Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_7$ и Σ_8 избегают ее. Увеличение нагрузки при переходе к Σ_i от Σ_j обозначено $\Delta_{ij} \geq 0$: $\Delta_{ij} \triangleq \Sigma_i - \Sigma_j$. Числовые значения Δ_{ij} представлены в таблице. Выделенные стрелки указывают уменьшение нагрузки. Наименьшая нагрузка у стратегии Σ_6

Подсчет количества операций умножения/деления по восьми различным стратегиям

Стратегии	Увеличение сложности на переходе к \sum_i от \sum_j	
$\sum_1 = N^2(N+1)$		
$\sum_2 = N(N+1)(2N-1)/2$	$\Delta_{12} = N(N+1)/2$	$\delta_{1/2} \rightarrow 1$
$\sum_3 = N(N+1)(2N-1)/2$	$\Delta_{23} = 0$	$\delta_{2/3} \rightarrow 1$
$\sum_4 = N(N+1)(4N-1)/6$	$\Delta_{34} = N(N+1)(N-1)/3$	$\delta_{3/4} \rightarrow 3/2$
$\sum_5 = N^2(N+1)/2$	$\Delta_{45} = N(N+1)(N-1)/6$	$\delta_{4/5} \rightarrow 4/3$
$\sum_6 = N(N^2+3N-1)/3$ minimum	$\Delta_{56} = N(N^2-3N+2)/6$	$\delta_{5/6} \rightarrow 3/2$
$\sum_7 = (4N^3+21N^2+23N-36)/6$	$\Delta_{76} = (2N^3+15N^2+25N-36)/6$	$\delta_{7/6} \rightarrow 2$
$\sum_8 = N^2(3N+4)$	$\Delta_{87} = (14N^3+3N^2-23N+36)/6$	$\delta_{8/7} \rightarrow 9/2$

В таблице сложность стратегии \sum_i есть суммарное количество операций умножения или деления. $\Delta_{ij} \triangleq \sum_i - \sum_j$ есть увеличение сложности на переходе к \sum_i от \sum_j . Величина $\delta_{ij} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i / \sum_j$ отвечает на вопрос: «Во сколько раз (при $N \rightarrow \infty$) увеличится сложность на переходе к \sum_i от \sum_j ?» Эти стратегии предусматривают прекодинг с обращением в нуль коэффициентов перекрестных связей каналов на основе разложения $H = DA$ на множители матрицы передачи сигналов по проводному кабелю – так называемый DBZF-прекодинг (Decomposition Based Zero Forcing precoding) [1, р. 34–35] – тот же, что предложен в [8].

3 К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНИВАНИИ И РЕГУЛИРОВАНИИ МОЩНОСТИ СИГНАЛА НА ВХОДЕ В КАНАЛ

Коэффициенты матрицы G вводят для того, чтобы при необходимости регулировать (выравнивать) мощности сигналов вектора x' , подаваемых в канал. Поэтому полная вычислительная схема, предусматривающая включение ZF-прекодера $P = A^{-1}$ либо SL-прекодера $P \approx I - D^{-1}E$, должна выглядеть, как показано на рисунке 6. Она включает оценивание мощности элементов вектора x' .

В случае, если будут выбраны стратегии $\sum_7 \div \sum_8$ (без явного отыскания матрицы P), оценивание мощности элементов вектора x' придется выполнять по-иному.

Способ 1: Выполнили $A = L\bar{U}$. Находим $p_{ij} = f^T h_j$, где $f_i^T \triangleq i$ -я строка из \bar{U}^{-1} , а $h_j \triangleq j$ -й столбец из L^{-1} . Для отыскания f_i решаем нижнетреугольную систему $\bar{U}^T f_i = e_i$, где $e_i \triangleq i$ -й столбец единичной матрицы I (нули в этом столбце выше i -й позиции позволяют экономить число операций). Для отыскания h_j решаем нижнетреугольную систему $Lh_j = e_j$, где $e_j \triangleq j$ -й столбец единичной матрицы I (также с экономией числа операций).

Способ 2: Наиболее простое решение – применить алгоритм экспоненциального сглаживания с коэффициентом сглаживания $0 < \beta < 1$ (эффективная память этого алгоритма считается равной $(1 - \beta)^{-1}$) для получения текущей (для момента времени $[t]$) оценки $\hat{w}_i[t]$ средней мощности $\langle |x'_i|^2 \rangle$ в виде $\hat{w}_i[t] = \beta \hat{w}_i[t-1] + x_i[t]x_i^*[t]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автоматизация процессов управления в настоящее время и особенно в будущем не может быть осуществлена без опоры на достижения в сфере цифровых коммуникационных технологий. Высокоскоростные цифровые абонентские линии (VDSL) эксплуатируют частотный диапазон до 17,664 МГц, деля его на $K=247$ подканалов по 4,3125 КГц каждый. VDSL, VDSL2 и Omega DSL признаются наиболее перспективным решением для гибридных технологий типа «FTTC + xDSL = оптоволокно до распределительного шкафа плюс далее xDSL к пользователю»; в зарубежной традиции xDSL называют «решением для последней мили». Однако качеству передачи на xDSL-участке препятствует острая проблема перекрестного наложения каналов. Она особенно сложна для нисходящих маршрутов передачи данных (от центральной станции к потребителям информации) и существенно усугубляется с увеличением диапазона несущих частот, модулирующих передаваемые цифровые коды.

Данная работа посвящена проблеме сокращения объема вычислений в процедурах прекодинга, применяемых для подавления дальнеконцевого наложения нисходящих VDSL-каналов. Показано, что операция обращения матрицы для линейного прекодера не является неизбежной. Переход от базовой стратегии \sum_1 (с вычислением обратной нормированной матрицы канала) к предлагаемой стратегии \sum_6 (без вычисления обратной нормированной матрицы канала) сокращает объем вычислений для ZF-прекодинга (полного обнуления наложений каналов) в $\delta_{1/6} = \delta_{1/2} \delta_{2/3} \delta_{3/4} \delta_{4/5} \delta_{5/6} = 3$ раза –

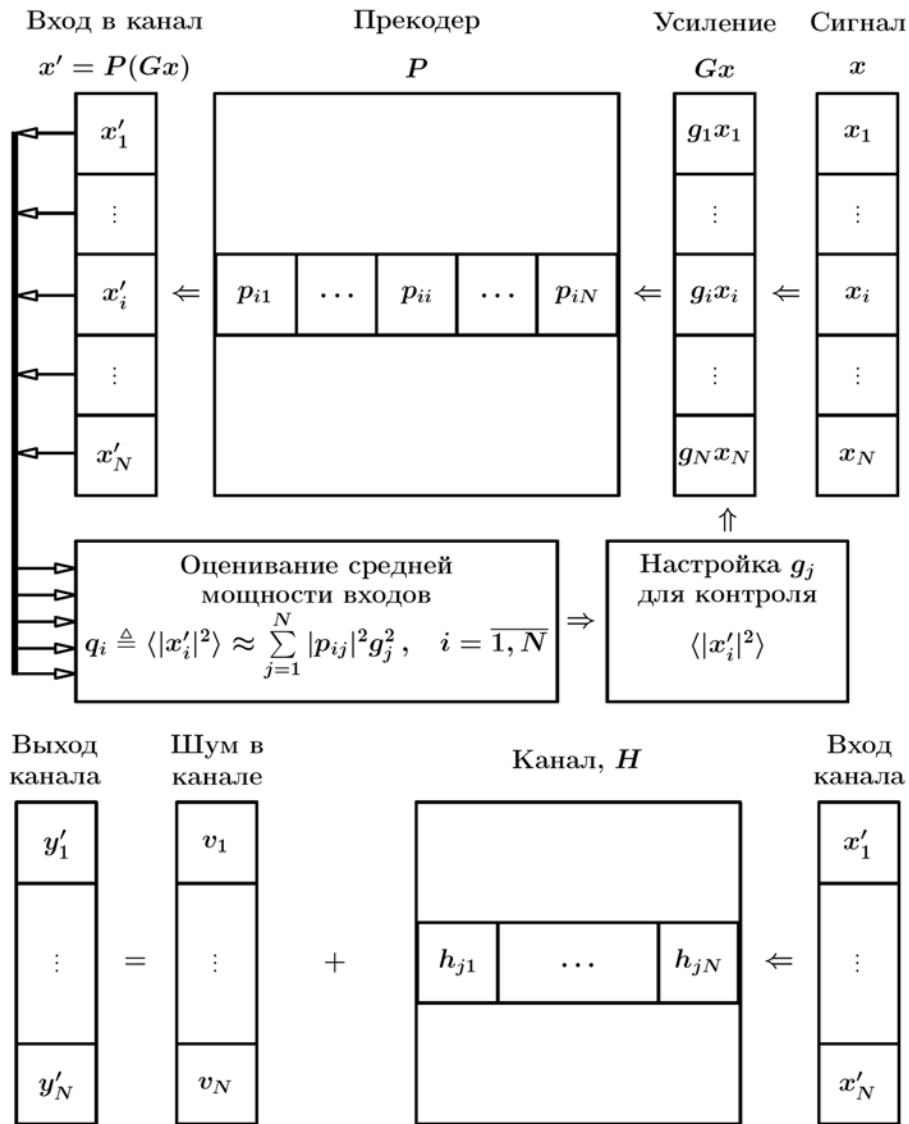


Рис. 6. Полная схема вычислений, включающая прекодер P : $\langle \blacklozenge \rangle$ обозначает среднее значение величины \blacklozenge . Точная формула $\langle |x'_i|^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{ij} p_{ik}^* g_j g_k \langle x_j x_k^* \rangle$, $i, k = \overline{1, N}$ заменена приближенной в предположении, что $\langle x_j x_k^* \rangle = 0$ при $i \neq k$ и $\langle x_j x_k^* \rangle = 1$ при $i = k$. Символ \blacklozenge обозначает комплексно-сопряженное значение величины \blacklozenge . Один из простых алгоритмов настройки усиления: ① $q_{max} \triangleq \max_{1 \leq i \leq N} q_i$; ② $\forall i g_i^2 := 1/q_{max}$ (рекомендация Huawei [4])

при большом числе N абонентов. Этот вывод остается справедливым и при переходе на новый стандарт G.fast для DSL, который эксплуатирует диапазон до 106 МГц и нацелен на еще более широкий диапазон 212 МГц, что обещает резко увеличить число подканалов до $K = 2048$ или даже $K = 4096$ и тем самым значительно повысить скорость передачи данных (с 52 Мб/с до 1 Гб/с).

Для VDSL-, VDSL2-систем вместо почти оптимального линейного ZF-прекодинга может быть применена его упрощенная версия \sum_0 – линейный SL-прекодинг.

Она существенно (в $\delta_{6/9} = N/3$ раз) выгоднее по объему вычислений, чем стратегия \sum_6 , где N – количество абонентов. Однако это достигается ценой отказа от полного исключения наложений каналов в ZF-прекодинге: в SL-прекодинге частичное наложение остается, и это непредсказуемо снижает качество передачи. Выгоды от SL-прекодинга оправдывают себя, пока для матриц xDSL-канала сохраняется свойство построчного диагонального преобладания. В перспективных же системах стандарта G.fast для DSL это свойство ПДП будет полностью исчезать из-за сверхвысоких частот подканалов.

В этой ситуации себя оправдывать будет ZF-прекодинг со стратегией типа \sum_6 , поскольку гауссово разложение $A = L\bar{U}$ легко заменить на $A = (Per)L\bar{U}$, (где Per (permutation matrix) – матрица перестановок, не вносящая усложнений в алгоритм), и далее свести задачу ZF-прекодинга к решению линейной системы уравнений $L\bar{U}x' = (Per)(Gx)$.

Поскольку стратегия \sum_6 для ZF-прекодинга исключает надобность в матрице P прекодера, для оценивания мощности элементов вектора x' символов, подаваемых в канал, целесообразно применять достаточно простые вычисления, рекомендованные в данной статье. Эти предложения требуют апробации – практических испытаний в контексте приведенной полной схемы вычислений.

Дальнейшие исследования по этой теме должны включать вопросы идентификации (оценивания) передаточных матриц канала на каждой несущей частоте:

- Какую модель состояния канала принять за основу?
- Что в ней считать за неизвестные параметры?
- Каким методом оценивать это состояние и как идентифицировать эти параметры?
- Как часто проводить эти процедуры оценивания-идентификации?
- Как будут влиять неточности знания передаточных матриц канала на качество прекодинга и информационную емкость канала?

Оригинальные исследования авторов по этому направлению начаты для OFDM-технологий в беспроводных системах цифровых телекоммуникаций [36, 37].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dungen M. Crosstalk Mitigation Techniques for Digital Subscriber Line Systems / DoktorIngenieurin (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation. – Technischen Universitat Hamburg-Harburg, 2016. 160 p. – URL: https://tubdok.tub.tuhh.de/bitstream/11420/1296/1/D%C3%BCngen_Crosstalk_Mitigation_Techniques_for_Digital_Subscriber_Line_Systems.pdf.
2. Huang Y. Crosstalk in Wideband Wireline Systems – Curse and Blessing // Licentiate Thesis. – Lund University, 2015. 162 p. – URL: https://lup.lub.lu.se/search/ws/files/12207660/LICdoc_YeziH_final.pdf.
3. Ultra-Wideband (UWB) Precoding System Design using Channel Phase. Precoding Techniques for Digital Communication Systems / C.-C.J. Kuo, S.H. Tsai, L. Tadjpour, Y.-H. Chang. – Springer, Boston, MA, 2008, pp. 275–299.
4. Semushin I.V. Adaptive State Prediction Methods for Big Data Modeling and Design / Prof. Semushin's talk at Huawei's // The 3rd Professor Day Academic Conference, Huawei Russian Research Center, Moscow, December 20–21, 2016. – URL: <https://www.dropbox.com/s/k2kq7r56dn0rhcd/semushinTalk-20Dec2016.pdf?dl=0&m=>.
5. Ginis G., Cioffi J. Vectorsed Transmission for Digital Subscriber Line Systems // IEEE J. Select. Areas Commun. 2002. Vol. 20, No. 5. pp. 1085–1104.
6. Analysis and Design of Tomlinson-Harashima Precoding for Multiuser MIMO Systems / X. Chen, M. Huang, M. Zhao, S. Zhou, and J. Wang // Bizaki H. Kh. (Ed.) MIMO Systems, Theory and Applications, InTech: Rijeka, Croatia, 2011, pp. 237–264.
7. A Near-Optimal Linear Crosstalk Canceler for Upstream VDSL / R. Cendrillon, G. Ginis, E. Van den Bogaert, and M. Moonen // IEEE Trans. on Signal Proc. 2006. Vol. 54, No. 8. pp. 3136–3146.
8. A Near-Optimal Linear Crosstalk Precoder for Downstream VDSL / R. Cendrillon, G. Ginis, E. Van den Bogaert, and M. Moonen // IEEE Trans. on Commun. 2007. Vol. 55, No. 5. pp. 860–863.
9. Dungen M., Ruan Ya., Rohling H. Crosstalk Cancellation in VDSL Systems // 18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2010), Aalborg, Denmark, 2010, August 23–27. pp. 392–396.
10. Leshem A., Youming L. A Low Complexity Linear Precoding Technique for Next Generation VDSL Downstream Transmission Over Copper // IEEE Trans. on Signal Processing. 2007. Vol. 55, No. 11. pp. 5527–5534.
11. Shim B., Shanbhag N.R. Complexity Analysis of Multicarrier and Single-Carrier Systems for Very High-Speed Digital Subscriber Line // IEEE Trans. on Signal Processing. 2003. Vol. 51, No. 1. pp. 282–292. – URL: <http://shanbhag.ece.illinois.edu/publications/byonghyo-TSP2003.pdf>.
12. The Benefits of Discrete Multi-Tone (DMT) Modulation for VDSL Systems / F. Ramirez-Mireles, Q. Aldrubi, S. Heidari, and P. Sevalia // Operations Support Systems: Solutions and Strategies for the Emerging Network, International Engineering Consortium, 2003. pp. 151–164.
13. Филимонов А. Алгоритмы модуляции технологий xDSL. – URL: <http://www.mestack.narod.ru/Doky/RFC/tehn/xDSL.pdf>.
14. OFDM vs DMT // RF Wireless World, 2018. – URL: <http://www.rfwireless-world.com/Articles/OFDM-vs-DMT.html>.
15. Henkel W. et al. OFDM/DMT for Wireline Communications // Rohling H. (eds) OFDM. Signals and Communication Technology. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, pp. 215–249.
16. Wu S., Cheng Ya., and Mannering D.G. Bit Loading and Rate Adaptation on DMT DSL Data Transmission // U.S. Patent No. 6,134,273. 2000, Oct. 17. – URL: <https://patents.google.com/patent/US6134273>.
17. Proakis J. G., Salehi M. Communication Systems Engineering, 2nd Ed. – Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2002.
18. Digital Complexity in DSL: An Extrapolated Historical Overview / M. Timmers, K. Hooghe, M. Guenach, and J. Maes // ACCESS 2011 : The Second International Conference on Access Networks. pp. 19–23.
19. Bourne J. Fiber to the home: practically a reality // Proc. of the IEEE International Conference on Communications (ICC), 1988, pp. 890–894.
20. Mastrangelo T. Annual Market Outlook Report, Broadband Trends, July 2009.

21. Jacobsen K.S. Providing the Right Solution for VDSL // Texas Instruments White Paper, Version 1.05., 1999. – URL: <http://www.ti.com/sc/docs/products/network/vdslwp.pdf>.

22. Tyson J. How VDSL Works. – URL: <https://computer.howstuffworks.com/vdsl.htm/printable>.

23. VDSL metallic interface, Part 3: Technical specification of a multi-carrier modulation transceiver // Amer. Nat. Stand. Inst., ANSI T1E1.4/2001–013R1, 2001.

24. Holte N. Transmission properties of pair cables // Digital Kommunikasjon, Norway: NTNU, 2002. – URL: https://www.ceid.upatras.gr/webpages/faculty/alexiou/ahts/other_pdf/4_Twisted_p.pdf.

25. Zipper: A Duplex Method for VDSL Based on DMT / F. Sjöberg, M. Isaksson, R. Nilsson, P. Ödling, S.K. Wilson, and P.O. Börjesson // IEEE Trans. on Commun. 1999. Vol. 47, No. 8. pp. 1245–1252.

26. Zeng C., Cioffi J. Crosstalk Cancellation in ADSL Systems // Proc. IEEE Globecom. 2001. pp. 344–348.

27. Cheong K., Choi W., Cioffi J. Multiuser Soft Interference Canceler via Iterative Decoding for DSL Applications // IEEE J. Select. Areas Commun. 2002. Vol. 20, No. 2. pp. 363–371.

28. Tsatsanis M. DSL Handbook. Ch. 13 : Multi-line DSL System Architectures. – Auerbach, 2004.

29. Katiyar R., Padmaja K.V. Performance of Zero forcing Pre-coder for Vectored DSL // IOSR Journal of Electronics and Communication Engineering (IOSR-JECE). 2016. Vol. 11, Iss. 4, Ver. II. pp. 64–68.

30. Partial Crosstalk Precompensation in Downstream VDSL / R. Cendrillon, G. Ginis, M. Moonen, and K. Van Acker // Signal Processing. 2004. Vol. 84. pp. 2005–2019.

31. Fast Access to Subscriber Terminals (FAST) – Physical Layer Specification // Recommendation ITU-T G.9701, Nov. 2015. – URL: <https://www.itu.int/rec/T-REC-G.9701>.

32. Linear and Nonlinear Precoding Based Dynamic Spectrum Management for Downstream Vectored G.fast Transmission / W. Lanneer, M. Moonen, P. Tsiaklakis, and J. Maes // IEEE Trans. on Commun., 2017, Vol. 65, No. 3, pp. 1247–1259.

33. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Главная редакция физ.-мат. лит. издательства «Наука», 1973. – 280 с.

34. Семушин И.В. Вычислительные методы алгебры и оценивания: учеб. пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 366 с. – URL: <http://venec.ulstu.ru/lib/disk/2013/119.pdf>.

35. Семушин И.В. Еще раз о больших обратных матрицах: от формализмов к реализации // Автоматизация процессов управления. – 2017. – № 4 (50). – С. 36–41.

36. Numerically Efficient Kalman Filter Based Channel Estimation for OFDM Data Transmission / I.V. Semushin, Yu.V. Tsyganova, A.V. Tsyganov, E.F. Prokhorova // Сб. тр. III междунар. конф. и молодеж. школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2017). Сек. 5 «Высокопроизводительные вычисления». – Самара: «Новая Техника», 2017. – С. 1694–1701.

37. Numerically Efficient UD Filter Based Channel Estimation for OFDM Wireless Communication Technology / I.V. Semushin, Yu.V. Tsyganova, A.V. Tsyganov,

E.F. Prokhorova // Procedia Engineering, 2017, No. 201, pp. 726–735. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705817341279>.

REFERENCES

1. Dungen M. *Crosstalk Mitigation Techniques for Digital Subscriber Line Systems. DoktorIngenieurin (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation.* Technischen Universität Hamburg-Harburg, 2016. 160 p. Available at: https://tubdok.tuhh.de/bitstream/11420/1296/1/D%C3%BCngen_Crosstalk_Mitigation_Techniques_for_Digital_Subscriber_Line_Systems.pdf.

2. Huang Y. *Crosstalk in Wideband Wireline Systems – Curse and Blessing. Licentiate Thesis.* Lund University, 2015. 162 p. Available at: https://lup.lub.lu.se/search/ws/files/12207660/LICdoc_YeziH_final.pdf.

3. Kuo C.-C.J., S.H. Tsai, L. Tadjpour, Y.-H. Chang. Ultra-Wideband (UWB) Precoding System Design using Channel Phase. Precoding Techniques for Digital Communication Systems. *Springer*, Boston, MA, 2008, pp. 275–299.

4. Semushin I.V. Adaptive State Prediction Methods for Big Data Modeling and Design. Prof. Semushin’s talk at Huawei’s. *The 3rd Professor Day Academic Conference.* Huawei Russian Research Center, Moscow, December 20–21, 2016. Available at: <https://www.dropbox.com/s/k2kq7r56dn0rhcd/semushinTalk-20Dec2016.pdf?dl=0&m=>.

5. Ginis G., Cioffi J. Vectored Transmission for Digital Subscriber Line Systems. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 2002, vol. 20, no. 5, pp. 1085–1104.

6. Chen X., M. Huang, M. Zhao, S. Zhou, and J. Wang. Analysis and Design of Tomlinson-Harashima Precoding for Multiuser MIMO Systems. *Bizaki H. Kh. (Ed.) MIMO Systems, Theory and Applications.* Rijeka, Croatia, 2011, pp. 237–264.

7. Cendrillon R., G. Ginis, E. Van den Bogaert, and M. Moonen. A Near-Optimal Linear Crosstalk Canceler for Upstream VDSL. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 2006, vol. 54, no. 8, pp. 3136–3146.

8. Cendrillon R., G. Ginis, E. Van den Bogaert, and M. Moonen. A Near-Optimal Linear Crosstalk Precoder for Downstream VDSL. *IEEE Trans. on Commun.*, 2007, vol. 55, no. 5, pp. 860–863.

9. Dungen M., Ruan Ya., Rohling H. Crosstalk Cancellation in VDSL Systems. *18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2010).* Aalborg, Denmark, 2010, August 23–27, pp. 392–396.

10. Leshem A., Youming L. A Low Complexity Linear Precoding Technique for Next Generation VDSL Downstream Transmission Over Copper. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2007, vol. 55, no. 11, pp. 5527–5534.

11. Shim B., Shanbhag N.R. Complexity Analysis of Multicarrier and Single-Carrier Systems for Very High-Speed Digital Subscriber Line. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, vol. 51, no. 1, pp. 282–292. Available at: <http://shanbhag.ece.illinois.edu/publications/byonghyo-TSP2003.pdf>.

12. Ramirez-Mireles F., Q. Aldrubi, S. Heidari, and P. Sevalia. The Benefits of Discrete Multi-Tone (DMT) Modulation for VDSL Systems. *Operations Support Systems: Solutions and Strategies for the Emerging Network, International Engineering Consortium*. 2003, pp. 151–164.
13. Filimonov A. *Algoritmy moduliatsii tekhnologi xDSL* [Algorithms of xDSL Technology Modulation]. Available at: <http://www.mestack.narod.ru/Doky/RFC/tehn/xDSL.pdf>.
14. OFDM vs DMT. *RF Wireless World*. 2018. Available at: <http://www.rfwireless-world.com/Articles/OFDM-vs-DMT.html>.
15. Henkel W. et al. OFDM/DMT for Wireline Communications. *OFDM. Signals and Communication Technology, edited by Rohling H.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, pp. 215–249.
16. Wu S., Cheng Ya., and Mannering D.G. *Bit Loading and Rate Adaptation on DMT DSL Data Transmission*. U.S. Patent No. 6,134,273. 2000, Oct. 17. Available at: <https://patents.google.com/patent/US6134273>.
17. Proakis J. G., Salehi M. *Communication Systems Engineering, 2nd Ed.* Upper Saddle River, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 2002.
18. Timmers M., K. Hooghe, M. Guenach, and J. Maes. Digital Complexity in DSL: An Extrapolated Historical Overview. *ACCESS 2011 : The Second International Conference on Access Networks*. 2011, pp. 19–23.
19. Bourne J. Fiber to the Home: Practically a Reality. *Proc. of the IEEE International Conference on Communications (ICC)*. 1988, pp. 890–894.
20. Mastrangelo T. *Annual Market Outlook Report, Broadband Trends*, July 2009.
21. Jacobsen K.S. Providing the Right Solution for VDSL. *Texas Instruments White Paper, Version 1.05*, 1999. Available at: <http://www.ti.com/sc/docs/products/network/vdslwp.pdf>.
22. Tyson J. *How VDSL Works*. Available at: <https://computer.howstuffworks.com/vdsl.htm/printable>.
23. *ANSI T1E1.4/2001–013R1. VDSL Metallic Interface, Part 3: Technical Specification of a Multi-Carrier Modulation Transceiver*. Amer. Nat. Stand. Inst., 2001.
24. Holte N. Transmission Properties of Pair Cables. *Digital Kommunikasjon*, Norway, NTNU, 2002. Available at: https://www.ceid.upatras.gr/webpages/faculty/alexioi/ahts/other_pdf/4_Twisted_p.pdf.
25. Sjöberg F., M. Isaksson, R. Nilsson, P. Ödling, S.K. Wilson, and P.O. Börjesson. Zipper: A Duplex Method for VDSL Based on DMT. *IEEE Trans. on Commun.*, 1999, vol. 47, no. 8, pp. 1245–1252.
26. Zeng C., Cioffi J. Crosstalk Cancellation in ADSL Systems. *Proc. IEEE Globecom*. 2001, pp. 344–348.
27. Cheong K., Choi W., Cioffi J. Multiuser Soft Interference Canceler via Iterative Decoding for DSL Applications. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 2002, vol. 20, no. 2, pp. 363–371.
28. Tsatsanis M. *DSL Handbook. Ch. 13 : Multi-line DSL System Architectures*. Auerbach, 2004.
29. Katiyar R., Padmaja K.V. Performance of Zero Forcing Pre-coder for Vectored DSL. *IOSR Journal of Electronics and Communication Engineering (IOSR-JECE)*, 2016, vol. 11, iss. 4, ver. II, pp. 64–68.
30. Cendrillon R., G. Ginis, M. Moonen, and K. Van Acker. Partial Crosstalk Precompensation in Downstream VDSL. *Signal Processing*, 2004, vol. 84, pp. 2005–2019.
31. Fast Access to Subscriber Terminals (FAST) – Physical Layer Specification. *Recommendation ITU-T G.9701*. Nov. 2015. Available at: <https://www.itu.int/rec/T-REC-G.9701>.
32. Lanneer W., M. Moonen, P. Tsiaflakis, and J. Maes. Linear and Nonlinear Precoding Based Dynamic Spectrum Management for Downstream Vectored G.fast Transmission. *IEEE Trans. on Commun.*, 2017, vol. 65, no. 3, pp. 1247–1259.
33. Lankaster P. *Teoriia matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Glavnaia redaktsiia fiz.-mat. lit. izdatelstva ‘Nauka’ Publ., 1973. 280 p.
34. Semushin I.V. *Vychislitelnye metody algebry i otsenivaniia. Ucheb. posobie* [Computational Methods of Algebra and Estimation]. Ulyanovsk, UISTU Publ., 2011. 366 p. Available at: <http://venec.ulstu.ru/lib/disk/2013/119.pdf>.
35. Semushin I.V. Eshche raz o bolshikh obratnykh matritsakh: ot formalizmov k realizatsii [On Large-Scale Inverse Matrix: from the Matter of Form to the Implementation], *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2017, no. 4 (50), pp. 36–41.
36. Semushin I.V., Yu.V. Tsyganova, A.V. Tsyganov, E.F. Prokhorova. Numerically Efficient Kalman Filter Based Channel Estimation for OFDM Data Transmission. *Proc. of the 3d Int. Sci. Conf and School of Young Scholars on Information Technologies and Nano Technologies (ITNT-2017). Section 5. High Performance Computing*. Samara, Novaia Tekhnika Publ., 2017, pp. 1694–1701.
37. Semushin I.V., Yu.V. Tsyganova, A.V. Tsyganov, E.F. Prokhorova. Numerically Efficient UD Filter Based Channel Estimation for OFDM Wireless Communication Technology. *Procedia Engineering*, 2017, no. 201, pp. 726–735. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705817341279>.