

УДК 519.612.4:004.932

М.В. Самойленко

МАТРИЧНО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАЗМЫТЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Самойленко Марина Витальевна, кандидат технических наук, доцент, окончила Московский авиационный институт и Московский физико-технический институт; доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета). Имеет монографии, статьи, изобретения. Область научных интересов – обработка сигналов и изображений. [e-mail: Samoi.Mar@mail.ru].

Аннотация

Предложен новый метод восстановления изображения-оригинала по его размытому отображению. Этот метод основан на разработанном автором матрично-итерационном методе решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При реализации метода восстановления изображения-оригинала используется определенная априорная информация: предполагается известной интенсивность минимальных, фоновых значений этого изображения, а также функция рассеяния точки.

Задача восстановления изображения приводится к решению недоопределенной СЛАУ. Известным решением такой системы уравнений является метод псевдообращения ее матрицы. Так же называется и известный метод восстановления изображений, базирующийся на этом решении. В работе с использованием компьютерного моделирования проведено сравнение восстановления изображений этим известным методом и новым, матрично-итерационным методом. Показано, что матрично-итерационный метод обеспечивает при определенных условиях практически точное восстановление. Такими условиями является малая заполненность изображения объектами при большой заполненности фоновыми значениями. Влияние аддитивных шумов и априорной неопределенности не рассматривалось.

Ключевые слова: СЛАУ, матрично-итерационный метод, восстановление изображения, функция рассеяния точки, метод псевдообращения.

doi: 10.35752/1991-2927-2019-2-56-93-100

MATRIX-ITERATIVE METHOD OF THE BLURRED IMAGES RESTORATION

Marina Viltalevna Samoilenko, Candidate of Science in Engineering, Associate Professor; graduated from Moscow Aeronautical Institute and Moscow Institute of Physics and Technologies; Associate Professor at Moscow Aeronautical Institute of National Research University; an author of monographs, articles, and inventions; scientific interests are in the field of signal and image processing. e-mail: Samoi.Mar@mail.ru.

Abstract

A new method of the picture-original restoration from the blurred image is proposed. This method is based on the matrix-iterative method developed by the author for solving the simultaneous linear algebraic equations. When implementing the image-restoration method, the author uses a prior information specified. It is assumed that the intensity of minimum background values of this image as well as the point spread function are known.

The task of image restoration is resulted in the solution of an underdetermined system of linear algebraic equations. A pseudoinverse technique of its matrix is a known solution of the simultaneous linear algebraic equations. The well-known image restoration method based on this solution is also given. The author compares the image restoration by the use of this well-known method and a new matrix-iterative method based on computer simulating. It is shown that the matrix-iterative method provides almost exact restoration under certain conditions. Such condition is a low occupation level of an image being filled up with objects if there is a high occupation level of an image being filled up with background values. The additive noise impact and an expected uncertainty were not considered.

Key words: simultaneous linear algebraic equations, matrix-iterative method, image restoration, point spread function, pseudoinverse technique.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей обработки изображений является задача их реставрации, восстановления неискаженного изображения по искаженному. Существуют как аналоговые, так и цифровые методы восстановления изображений, которые могут реализовываться как в частотной, так и в исходной пространственной области. Большое число методов реставрации изображений представлено в [1, 2]. В этих работах, в частности, отмечается важность учета априорной информации, на основе которой могут строиться эффективные алгоритмы обработки. В данной работе рассматривается задача восстановления размытых изображений при наличии априорной информации о фоновом значении неискаженного изображения-оригинала.

Постановка задачи

Полагаем, что искажающим фактором является размытие изображения, причем функция рассеяния точки (ФРТ) известна. Будем полагать, что ФРТ пространственно инвариантна. При этом искаженное изображение (отображение) и неискаженное изображение (оригинал) связаны интегралом свертки

$$G(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) H(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (1)$$

где $G(x, y)$ – отображение, $F(x, y)$ – оригинал, $H(x, y)$ – ФРТ.

Задача заключается в восстановлении изображения-оригинала $F(x, y)$ по его отображению $G(x, y)$.

Будем полагать, что ненулевые значения ФРТ ограничены в пространстве квадратной областью $-T \leq x \leq T, -T \leq y \leq T$. При этом для подынтегрального выражения верны соотношения $-T \leq x - \xi \leq T, -T \leq y - \eta \leq T$,

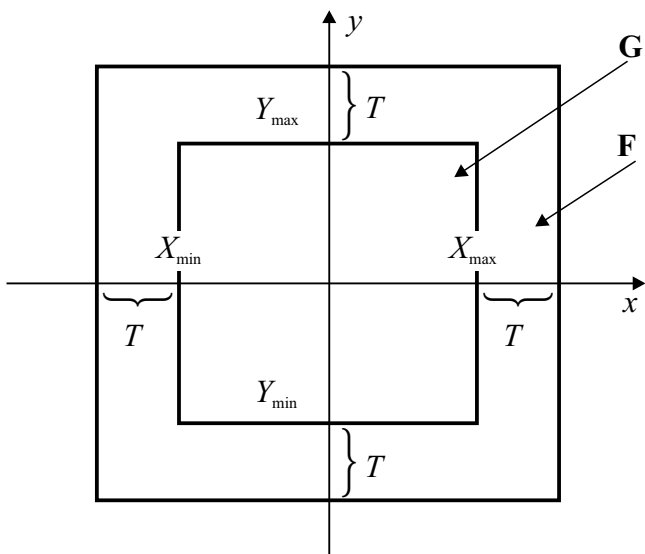


Рис. 1. Соотношение размеров оригинала $F(x, y)$ и отображения $G(x, y)$

которые можно переписать как $x - T \leq \xi \leq x + T, y - T \leq \eta \leq y + T$. С учетом последних соотношений заменим в (1) бесконечные пределы интегрирования конечными:

$$G(x, y) = \int_{x-T}^{x+T} \int_{y-T}^{y+T} F(\xi, \eta) H(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

Выражение (2) определяет соотношение размеров отображения и оригинала: если размер отображения ограничен по осям прямоугольником $(X_{\min}, X_{\max}; Y_{\min}, Y_{\max})$, то размер оригинала должен быть $(X_{\min} - T, X_{\max} + T; Y_{\min} - T; Y_{\max} + T)$, то есть больше на половину размера ФРТ в каждом направлении (рис. 1).

Дискретизируем изображения и ФРТ с шагом дискретизации Δ по осям координат и перейдем от интеграла свертки (2) к интегральной сумме:

$$G(m\Delta, n\Delta) = \sum_{k=m-\frac{K}{2}}^{m+\frac{K}{2}} \sum_{l=n-\frac{K}{2}}^{n+\frac{K}{2}} F(k\Delta, l\Delta) \times H((m-k)\Delta, (n-l)\Delta) \Delta^2, \quad (3)$$

где Δ – шаг дискретизации по осям, $K = \left\lfloor \frac{2T}{\Delta} \right\rfloor$ – округленный до целого значения результат деления линейного размера ФРТ на шаг дискретизации.

Перейдем к матричной форме записи. Примем обозначения размеров матриц, показанные на рисунке 2.

С учетом стандартной нумерации элементов матриц выражение (3) в матричных обозначениях примет вид:

$$G(m, n) = \sum_{k=m-L}^{m+L} \sum_{l=n-L}^{n+L} F(k+L, l+L) \times H(L+1+(m-k), L+1+(n-l)), \quad (4)$$

где L – максимальное число дискрет ФРТ, считая от ее центра.

Для того чтобы влияние ФРТ в дискретной модели было наиболее близким к действительной ситуации, число ее дискрет по осям должно быть нечетным. В этом случае центральный элемент разрешения ФРТ совпадает с искажаемым ею элементом разрешения изображения-оригинала, как это и имеет место в действительности. При нечетном K получаем $L = (K - 1) / 2$.

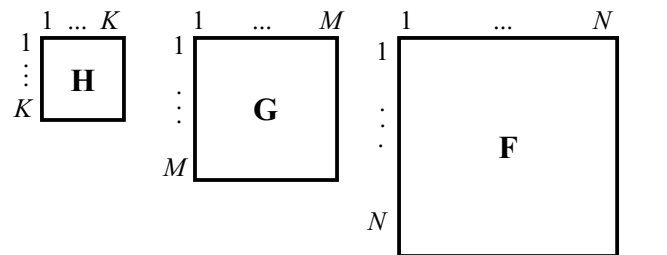


Рис. 2. Обозначения размеров матриц ФРТ H , отображения G и оригинала F

Уравнение (4) является матричным уравнением отображения. Оно позволяет определить число компонент матрицы-оригинала \mathbf{F} . Исходя из рисунка 1, число это зависит от числа строк и столбцов матрицы отображения, которое равно M . Подставив в (4) $m = M$ и $n = M$, находим число строк (столбцов) матрицы \mathbf{F} : $N = M + 2L$.

Перейдем к векторному представлению изображений. Строчно-столбцовой разверткой преобразуем матрицу-отображение \mathbf{G} размером $M \times M$ в вектор-отображение \mathbf{g} размером $M^2 \times 1$, а вектор-оригинал \mathbf{F} размером $N \times N$ – в вектор-оригинал \mathbf{f} размером $N^2 \times 1$.

В векторно-матричной форме уравнение отображения (4) приобретает вид:

$$\mathbf{g} = \mathbf{W}\mathbf{f}. \quad (5)$$

Полученное уравнение – это векторно-матричная форма записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в котором \mathbf{W} – матрица системы уравнений, она же – матрица отображения размером $M^2 \times N^2$, которая определяется дискретными значениями ФРТ и имеет форму:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{W}_K & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_1 & \dots & \mathbf{W}_{K-1} & \mathbf{W}_K & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{W}_K \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Число блочных матриц в матрице отображения \mathbf{W} составляет $M \times N$, среди них есть нулевые. Число ненулевых блоков равно $M \cdot K$. Ненулевые блоки имеют размер $M \times N$ и структурно представляют собой подматрицы следующего вида:

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} h_{i,K} & h_{i,K-1} & \dots & h_{i,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_{i,K} & \dots & h_{i,2} & h_{i,1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & h_{i,2} & h_{i,1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $h_{i,j}$ – соответствующий элемент матрицы ФРТ \mathbf{H} .

Векторно-матричное уравнение (5) является исходным для восстановления изображения. Ставится задача восстановить вектор-оригинал \mathbf{f} по вектору-отображению \mathbf{g} . После этого не составит труда сформировать двухмерное изображение-оригинал из восстановленного вектора-оригинала. Таким образом, задача приведена к решению СЛАУ, представленной векторно-матричным уравнением (5).

Анализ задачи

Проанализируем варианты решения неоднородной СЛАУ, записанной в форме векторно-матричного уравнения (5). Эта СЛАУ недоопределенная ($M^2 < N^2$) и имеет точное решение при выполнении условия совместности уравнений:

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^+\mathbf{g} = \mathbf{g}. \quad (8)$$

Если условие (8) выполнено, то рассматриваемая СЛАУ может иметь единственное или бесчисленное множество решений. Если $\text{rank } \mathbf{W} < N^2$, то решений бесчисленное множество [3], а если $\text{rank } \mathbf{W} = N^2$, то решение единственное.

Бесчисленное множество решений определяется формулой

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}^+\mathbf{g} + (\mathbf{I} - \mathbf{W}^+\mathbf{W})\mathbf{z}, \quad (9)$$

где \mathbf{z} – произвольный вектор размером $N^2 \times 1$.

Единственное решение определяется формулой

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}^+\mathbf{g} = (\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{g}.$$

В случае бесчисленного множества решений (9) существует единственное решение, обладающее минимальной нормой. Это решение находится методом псевдообращения: $\mathbf{f} = \mathbf{W}^+\mathbf{g}$.

Если условие (8) не выполняется, точного решения не существует. В этом случае ищут приближенное решение $\hat{\mathbf{f}}$, отвечающее условию минимума квадратического отклонения $(\mathbf{W}\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{g})^T(\mathbf{W}\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{g})$. Это решение определяется формулой

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{W}^+\mathbf{g}.$$

Таким образом, восстановление изображения по формуле

$$\mathbf{f}_{\text{вос}} = \mathbf{W}^+\mathbf{g} \quad (10)$$

обеспечивает либо единственное точное решение, либо точное решение с минимальной нормой (если решений бесчисленное множество), либо приближенное решение с минимальным квадратическим отклонением. Это и есть восстановление изображения методом псевдообращения.

Помимо решения (10), существуют и другие варианты восстановления изображения, описанного уравнением (5). Так, были разработаны эффективные вычислительные алгоритмы реализации метода псевдообращения [4], которые позволяют существенно уменьшить число операций по сравнению с вычислением по формуле (10). Применение сингулярного разложения матрицы отображения [5] позволяет получить рекуррентный алгоритм и решить проблему плохой обусловленности матрицы отображения.

При наличии в отображении аддитивного шума с известными вероятностными характеристиками возможно применение метода регрессии [6], а если известны еще и вероятностные характеристики изображения-оригинала, то применимо винеровское оценивание [7]. Однако при отсутствии информации об указанных вероятностных характеристиках оба эти метода приводятся к методу псевдообращения (10).

Метод псевдообращения является основой матрично-итерационного метода. Оба эти метода основаны на решении одной и той же СЛАУ. Далее в компьютерных экспериментах проводится сравнение качества восстановления изображений матрично-итерационным методом и методом псевдообращения.

МАТРИЧНО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЛАУ

Из вышеприведенного анализа задачи явствует, что для совместной недоопределенной СЛАУ метод псевдообращения дает решение с минимальной нормой. Это значит, что восстановленным будет изображение с наименьшей яркостью. Кроме этого, минимальная норма решения обуславливает «выравнивание», сглаживание изображения. Такая специфика метода псевдообращения не всегда отвечает реальной картине. Исправить ситуацию помогает априорная информация об изображении-оригинале, которая может быть представлена математически в виде равенств или неравенств, например, ограничивающих значения интенсивности изображения. В этих случаях исходную СЛАУ дополняют математически сформулированными ограничениями и решение ищут как обеспечивающее экстремум этого дополненного уравнения [8, 9].

В работе [10] предложен разработанный автором новый, матрично-итерационный метод решения СЛАУ, не требующий какого-либо преобразования исходного уравнения. Основан метод на псевдообращении матрицы системы уравнений, однако процесс этот носит повторяющийся, итерационный характер. На каждой итерации исключаются некоторые столбцы из матрицы системы уравнений и пересчитывается вектор-отображение. В ходе итераций СЛАУ может преобразоваться из недоопределенной в переопределенную, имеющую в случае ее совместности единственное решение.

Необходимыми априорными данными для реализации матрично-итерационного метода является значение фона Φ , такое, что для всех компонент вектора-оригинала выполняется соотношение $f_i \geq \Phi$. Например, таким фоновым значением может служить нулевой уровень, меньше которого интенсивность изображения быть не может. Но фоновым может быть и другое априори известное значение.

В самом общем виде алгоритм матрично-итерационного метода следующий.

1. Находим первое приближение вектора-оригинала методом псевдообращения матрицы отображения: $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(1)} = \mathbf{W}^+ \mathbf{g}$, где индекс в скобках обозначает номер итерации.

2. Выбираем порог Π , необходимый для дальнейших действий, например $\Pi = \Phi$.

Дальнейшие действия носят итерационный характер.

3. Формируем СЛАУ для очередной, J -й итерации. Для этого из вектора \mathbf{f}^{J-1} исключаем компоненты, отвечающие условию $f_{\text{вос } i}^{(J-1)} < \Pi$, где i – номер компоненты; значения найденных компонент приравниваем к значению фона Φ . Из матрицы $\mathbf{W}^{(J-1)}$ исключаем соответствующие этим компонентам столбцы. Пересчитывается соответствующим образом вектор-отображение $\mathbf{g}^{(J-1)}$. Подробно механизм этих действий

изложен в [10]. В результате получается новая СЛАУ: $\mathbf{g}^{(J)} = \mathbf{W}^{(J)} \mathbf{f}^{(J)}$. Недоопределенность ее по сравнению с предыдущей итерацией уменьшается, так как при том же числе уравнений системы уменьшается число неизвестных и столбцов матрицы СЛАУ.

4. Решаем сформированную в п. 3 СЛАУ и получаем $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(J)}$.

5. Переходим к следующей итерации (п. 3), для которой последнее решение СЛАУ $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(J)}$ будет предыдущим: $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(J)} \rightarrow \mathbf{f}_{\text{вос}}^{(J-1)}$.

Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не окажется, что вектор $\mathbf{f}_{\text{вос}}^{(J)}$ не содержит компонент, меньших Π .

В ходе итераций недоопределенная СЛАУ может преобразоваться в переопределенную и решение может получиться точным. Так получается не всегда, подходящим условием для этого является малая заполненность изображения-оригинала объектами при достаточно большой области, занятой фоном. В этих случаях при отсутствии шума и априорной неопределенности решение получается точным.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

При моделировании использовалась ФРТ в виде двухмерной гауссовской функции

$$H(x, y) = A \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2b_x^2} + \frac{y^2}{2b_y^2} \right) \right],$$

где A – нормирующий коэффициент, b_x, b_y – коэффициенты нерезкости; в экспериментах $b_x = b_y = 1$ см. По этой функции формировалась матрица отображения в соответствии с (6), (7). Размер отображения принят 7×7 см², шаг дискретизации по осям $\Delta = 0,5$ см, размер матрицы-отображения равен, соответственно, $M \times M = 14 \times 14$. Полагаем, что размер ФРТ ограничен по осям значениями $-2,25 \div 2,25$ см, размер матрицы ФРТ составляет при этом $K \times K = 9 \times 9$, а размер изображения-оригинала $N \times N = 22 \times 22$.

Первый эксперимент проведен с крупными объектами, занимающими значительную часть изображения-оригинала на нулевом фоне.

На рисунке 3 представлены исходное изображение-оригинал и отображение, получающееся в результате размытия оригинала. Далее по отображению (рис. 3б) восстанавливается оригинал двумя методами: известным методом псевдообращения и новым, матрично-итерационным методом.

Условие совместности СЛАУ (5) в эксперименте выполняется:

$$\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^+ \mathbf{g} - \mathbf{g} \right)^T \left(\mathbf{W}\mathbf{W}^+ \mathbf{g} - \mathbf{g} \right) = 4,1983 \cdot 10^{-22} \approx 0.$$

Из этого следует, что уравнение (5) имеет бесчисленное множество решений. Для того чтобы определить,

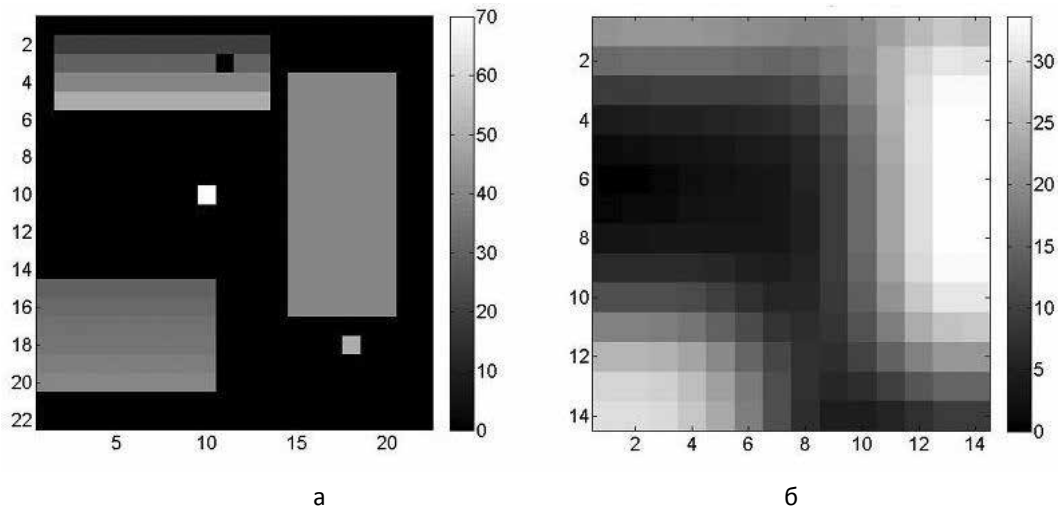


Рис. 3. Изображение-оригинал (а) и его отображение (б)

является ли полученное в ходе эксперимента решение точным, будем подставлять его в исходное СЛАУ (5) и вычислять скалярную величину, позволяющую оценить точность: $d = (\mathbf{W}\mathbf{f}_{\text{вос}} - \mathbf{g})^T (\mathbf{W}\mathbf{f}_{\text{вос}} - \mathbf{g})$.

Оба метода дали практически точные решения: при решении методом псевдообращения получилось $d_{\text{ПО}} = 4,038 \cdot 10^{-22}$, при решении матрично-итерационным методом $d_{\text{ПО}} = 4,0670 \cdot 10^{-22}$. Заметим, что из двух полученных точных решений СЛАУ метод псевдообращения дал решение с меньшей нормой, чем матрично-итерационный метод: $\|\mathbf{f}_{\text{восПО}}\| = 491,7811$, $\|\mathbf{f}_{\text{восМИ}}\| = 511,5050$. Это естественно, так как решение методом псевдообращения имеет минимальную норму из всего бесчисленного множества решений.

Однако оба эти точные решения оказались весьма далекими от изображения-оригинала, особенно решение методом псевдообращения. Для визуального улучшения последнего была сделана постобработка: значения компонент восстановленного методом псевдообращения вектора, меньшие уровня фона, были заменены фоновыми, в данном эксперименте – нулевыми значениями.

Обработка с использованием матрично-итерационного метода решения СЛАУ составила 8 итераций. На первой итерации размер матрицы системы уравнений $\dim \mathbf{W} = M^2 \times N^2 = 196 \times 484$, а на последней, восьмой итерации $\dim \mathbf{W}^{(8)} = 196 \times 224$. Это говорит о том, что СЛАУ до конца итераций осталась недоопределенной.

На рисунке 4 показаны результаты восстановления изображения методом псевдообращения с улучшающей постобработкой и матрично-итерационным методом.

Как видно из представленных изображений, качество восстановления матрично-итерационным методом визуально лучше, чем восстановление методом псевдообращения даже с улучшающей постобработкой, но незначительно. Для количественной оценки совпадения полученного решения с изображением-оригиналом используем квадратическое нормированное отклонение $\delta = (\mathbf{f}_{\text{вос}} - \mathbf{f})^T (\mathbf{f}_{\text{вос}} - \mathbf{f}) / N^2$. В методе псевдообращения это отклонение составило $\delta_{\text{ПО}} = 55,8202$, а в матрично-итерационном методе – $\delta_{\text{МИ}} = 17,8980$. Оба отклонения достаточно большие, хотя матрично-итерационный метод и показал более близкое к оригиналу восстановление.

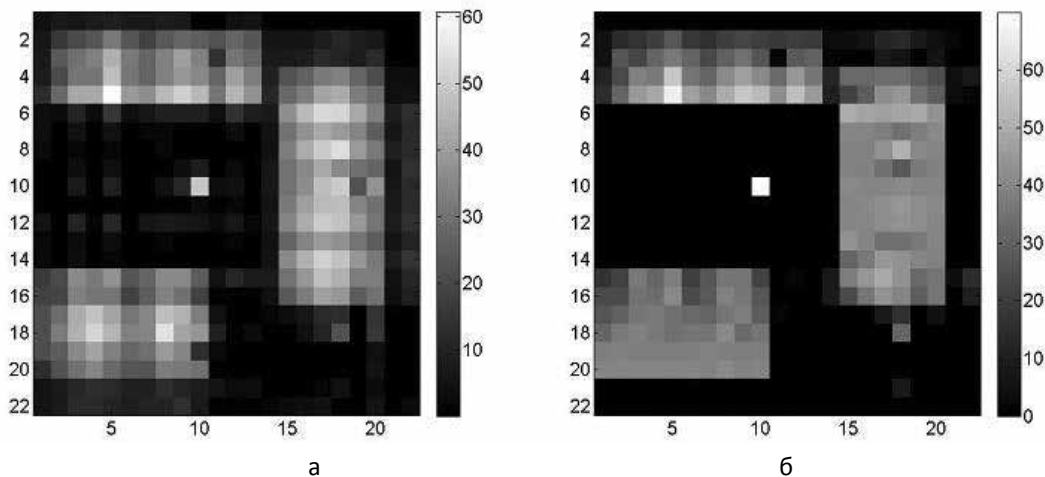


Рис. 4. Восстановленные изображения: а) методом псевдообращения с улучшающей постобработкой; б) матрично-итерационным методом

Во втором эксперименте исходное изображение содержит малоразмерные объекты на фоне, равном трем (в единицах интенсивности). На рисунке 5 показаны изображение-оригинал, его отображение и восстановленные изображения – методом псевдообращения с улучшающей постобработкой и матрично-итерационным методом.

Исходная СЛАУ, как и в первом эксперименте, совместная и недоопределенная. И оба метода (псевдообращения до постобработки и матрично-итерационный) дали практически точные решения: $d_{\text{ПО}} = 2,1196 \cdot 10^{-23}$, $d_{\text{МИ}} = 3,9881 \cdot 10^{-26}$. Но решение, совпавшее с оригиналом, обеспечил именно матрично-итерационный метод. Количественно результаты получились следующие: квадратическое нормированное отклонение решения методом псевдообращения с улучшающей постобработкой составило $\delta_{\text{ПО}} = 0,4701$ а матрично-итерационным методом – $\delta_{\text{МИ}} = 1,0734 \cdot 10^{-25}$. Таким образом, применение матрично-итерационного метода решения СЛАУ позволило получить практически точное восста-

новление оригинала. Для этого потребовалось 9 итераций.

Начальный размер матрицы системы уравнений $\dim \mathbf{W} = 196 \times 484$, но уже на третьей итерации $\dim \mathbf{W}^{(3)} = 196 \times 129$, а на последней, девятой итерации, $\dim \mathbf{W}^{(9)} = 196 \times 38$. Таким образом, начиная с третьей итерации решаются переопределенные СЛАУ, что в результате дало практически точное восстановление оригинала.

Первые 4 итерации показаны на рисунке 6, из которого явствует, что уже трех итераций достаточно для визуального точного восстановления оригинала. Следующие 6 итераций незначительно повышают точность восстановления.

Заметим, что первая итерация представляет собой восстановленное изображение методом псевдообращения без улучшающей постобработки. Можно заметить, насколько постобработка улучшает это изображение, сопоставив его с изображением на рисунке 5в.

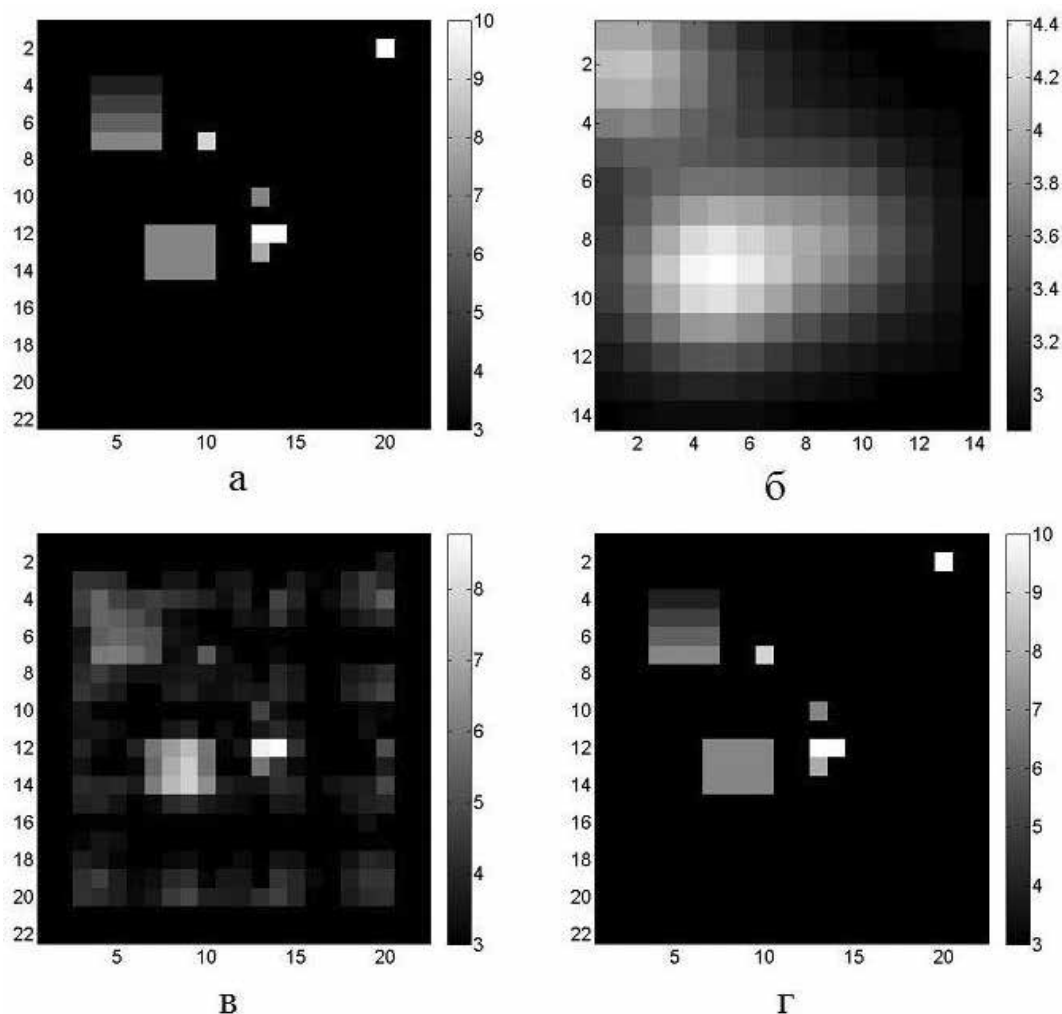


Рис. 5. Восстановление изображения малоразмерных объектов:
 а) изображение-оригинал; б) отображение оригинала; в) восстановленный оригинал методом псевдообращения с улучшающей постобработкой; г) восстановленный оригинал матрично-итерационным методом

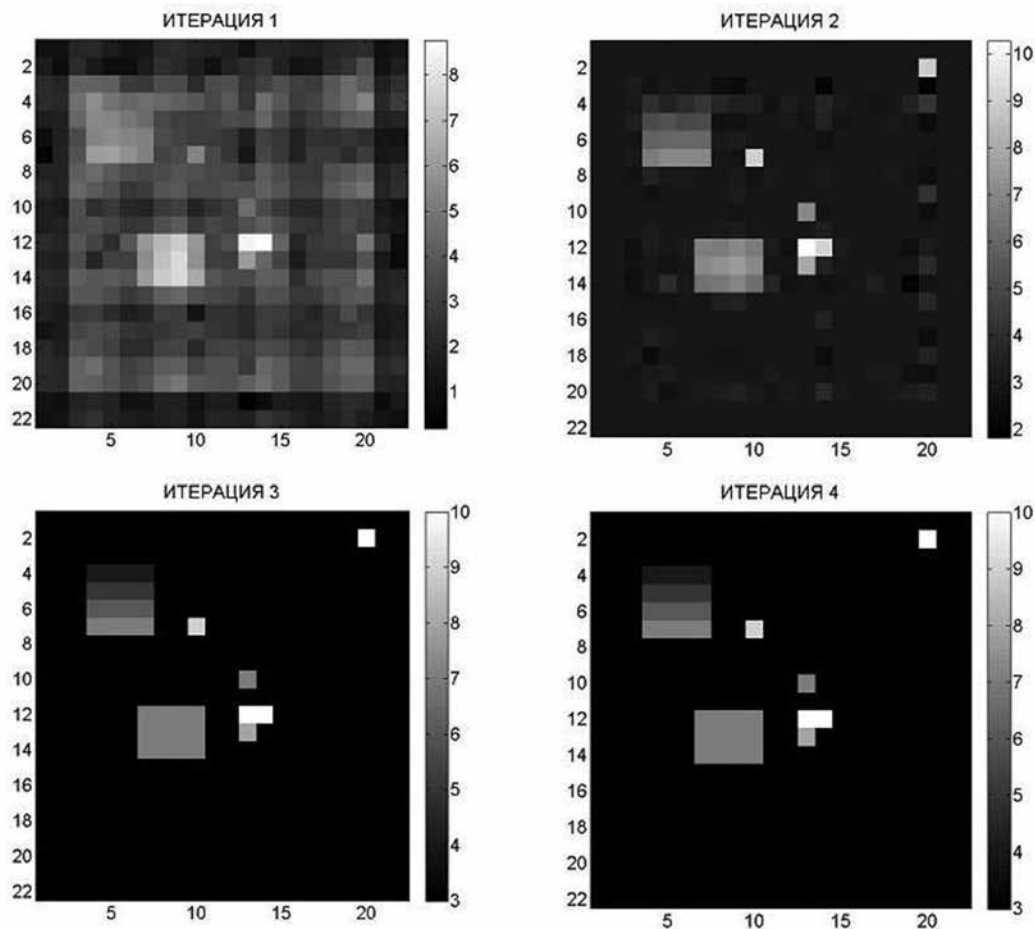


Рис. 6. Первые 4 итерации матрично-итерационного метода алгоритма восстановления изображения-оригинала

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Матрично-итерационный метод решения СЛАУ, разработанный автором, может быть применен в задаче восстановления изображения-оригинала по его отображению, представляющему собой размытый оригинал. В проведенных компьютерных экспериментах матрично-итерационный метод показал преимущества перед известным методом псевдообращения. Продемонстрирована зависимость качества восстановления изображения-оригинала матрично-итерационным методом от степени заполненности его изображениями объектов: чем меньше эта заполненность, тем выше качество восстановления. Возможно практически точное восстановление оригинала. Влияние шумов и ошибок априорной информации в данной работе не рассматривалось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обработка изображений и цифровая фильтрация / под ред. Т. Хуанга : пер. с англ. – М. : Мир., 1979. – 318 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. В 2 кн. : пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 790 с.
3. Самойленко М.В. Обработка сигналов в задачах локационных измерений и оценивания. – М. : Изд. дом «Спектр», 2016. – 260 с.

4. Pratt W.K., Davarian F. Fast Computational Techniques for Pseudoinverse and Wiener Image Restoration // IEEE Trns. Computers. June 1977. C–26, 6. pp. 571–580.

5. Huang T.S., Narendra P.M. Image Restoration by Singular Value Decomposition // Appl. Opt. September 1975. 14, 9. pp. 2213–2216.

6. Andrews H.C., Patterson C.L. Outer Product Expansions and Their Uses in Digital Image Processing // IEEE Trans. Computers. February 1976. C–25, 2. pp. 140–148.

7. Самойленко В.И., Пузырев В.А., Грубрин И.В. Техническая кибернетика : учеб. пособие. – М. : Изд-во МАИ, 1994. – 280 с.

8. Воскобойников Ю.Е., Втюрин К.А. Дескриптивный алгоритм восстановления входных сигналов оптических систем // Автометрия. – 2005. – № 3. – С. 3–10.

9. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург : УИФ «Наука», 1993. – 264 с.

10. Самойленко М.В. Матрично-итерационный метод решения системы линейных уравнений и его применение в томографическом сканировании пространства с использованием радиолокационной станции // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2018. – Т. 18, № 3. – С. 437–446.

REFERENCES

1. *Obrabotka izobrazhenii i tsifrovaia filtratsiia*. Pod red. T. Khuanga. Per. s angl. [Picture Processing and Digital Filtering. Editor T. Huang]. Moscow, Mir Publ., 1979. 318 p.
2. Pratt W. *Tsifrovaia obrabotka izobrazhenii*. V 2 kn. Per. s angl. [Digital Image Processing. 2 Volumes]. Moscow, Mir Publ., 1982. 790 p.
3. Samoilenko M.V. *Obrabotka signalov v zadachakh lokatsionnykh izmereniy i otsenivaniia* [Signal Processing for Tasks on Location Measurements and Estimation]. Moscow, Izd. dom Spektr Publ., 2016. 260 p.
4. Pratt W.K., Davarian F. Fast Computational Techniques for Pseudoinverse and Wiener Image Restoration. *IEEE Trans. Computers*, C-26, 6, June 1977, pp. 571–580.
5. Huang T.S., Narendra P.M. Image Restoration by Singular Value Decomposition. *Appl. Opt.*, C-14, 9, September 1975, pp. 2213–2216.
6. Andrews H.C., Patterson C.L. Outer Product Expansions and Their Uses in Digital Image Processing. *IEEE Trans. Computers*, C-25, 2, February 1976, pp. 140–148.
7. Samoilenko V.I., Puzyrev V.A., Grubrin I.V. *Tekhnicheskaia kibernetika*. Ucheb. posobie [Engineering Cybernetics. Textbook]. Moscow, MAI Publ., 1994. 280 p.
8. Voskoboinikov Iu.E., Vtiurin K.A. Deskriptivnyi algoritm vosstanovleniia vkhodnykh signalov opticheskikh sistem [Descriptive Algorithm of Restoration of Optical Systems' Input Signals]. *Avtometriia* [Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing], 2005, no. 3, pp. 3–10.
9. Vasin V.V., Ageev A.L. *Nekorrektnye zadachi s apriorno informatsiei* [Ill-defined Problems with Aprior Information]. Ekaterinburg, UIF Nauka Publ., 1993. 264 p.
10. Samoilenko M.V. Matrichno-iteratsionnyi metod resheniia sistemy lineinykh uravnenii i ego primenenie v tomograficheskom skanirovanii prostranstva s ispolzovaniem radiolokatsionnoi stantsii [Matrix-Iterative Solution Method for System of Linear Equations and Its Application in Space Tomography Scanning Using Radar]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki* [Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics], 2018, vol. 18, no. 3, pp. 437–446.