УДК 623.5

Д.А. Григорьев, Т.Н. Масленникова, А.Н. Пифтанкин, А.В. Половинкина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ПВО

Григорьев Дмитрий Андреевич, *магистр, окончил факультет информатики и вычислительной техники Ульяновского политехнического института. Ведущий инженер-программист ФНПЦ АО «НПО «Марс». Имеет публикации в области автоматизации процессов ПВО. [e-mail: mars@mv.ru].*

Масленникова Татьяна Николаевна, *кандидат технических наук, окончила радиотехнический факультет Ульяновского политехнического института. Начальник научно-исследовательской лаборатории ФНПЦ АО «НПО «Марс». Имеет публикации в области информационного обеспечения автоматизированных систем специального назначения. [e-mail: mars@mv.ru].*

Пифтанкин Александр Николаевич, *кандидат технических наук, окончил механико-математический факультет Ульяновского государственного университета. Главный специалист ФНПЦ АО «НПО «Марс». Имеет публикации в области автоматизации процессов совокупной обработки радиолокационной информации, планирования действий и управления истребительной авиацией. [e-mail: mars@mv.ru].*

Половинкина Анастасия Владимировна, *кандидат физико-математических наук, окончила факультет математики и информационных технологий УлГУ. Инженер-программист 1 категории ФНПЦ АО «НПО «Марс». Имеет публикации в области общей алгебры и автоматизации процессов совокупной обработки. [e-mail: mars@mv.ru].*

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы процесса управления корабельными средствами противовоздушной обороны (ПВО). Одной из основных стадий данного процесса является выработка плана распределения корабельных средств ПВО по объектам противника. План распределения представляет собой массив назначений, каждый элемент которого содержит идентификаторы воздушного объекта и средства ПВО, назначенного на данный воздушный объект. Формирование плана распределения характеризуется ранжированием воздушных объектов по степени опасности, оценкой возможности либо эффективности назначения имеющихся средств ПВО на воздушные объекты и выработкой плана распределения средств ПВО по воздушным объектам в соответствии с заданным критерием эффективности. В процессе решения данной задачи возникает необходимость рассматривать не только текущее, но и прогнозируемое состояние системы. Предлагается математическая модель, которая рассматривает совместно процессы планирования (решение задачи по прогнозируемому состоянию) и управления (решение задачи по текущему состоянию) средствами ПВО, учитывающая использование многоканальных средств и их особенности загрузки, а также динамику развивающихся событий.

Ключевые слова: противовоздушная оборона (ПВО), математические модели, зенитно-огневые средства, план распределения, критерий назначения.

doi: 10.35752/1991-2927-2019-2-56-15-22

THE MATHEMATICAL MODEL OF AIR DEFENSE CONTROL PROCESS

Dmitrii Andreevich Grigorev, *Master's Student; graduated from the Faculty of Informatics and Computer Engineering of Ulyanovsk Polytechnic Institute; Leading Software Engineer at Federal Research-and-Production Center Joint Stock Company 'RPA 'Mars'; an author of articles in the field of air-defense processes automation. e-mail: mars@mv.ru.*

Tatiana Nikolaevna Maslennikova, *Candidate of Science in Engineering; graduated from the Radioengineering Faculty of Ulyanovsk Polytechnic Institute; Head of a research laboratory in FRPC JSC 'RPA 'Mars'; an author of articles in the field of information support of computer-aided systems of special-purpose. e-mail: mars@mv.ru.*

Aleksandr Nikolaevich Piftankin, *Candidate of Science in Engineering; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Ulyanovsk State University; Chief Specialist at FRPC JSC 'RPA 'Mars'; an author of articles in* *the field of automation of complex radar information processing, planning of fighter aircraft actions and control processes. e-mail: mars@mv.ru.*

Anastasiia Vladimirovna Polovinkina, *Candidate of Sciencs in Physics and Mathematics; graduated from the Faculty of Mathematics and Information Technologies of Ulyanovsk State University; Software Engineer at FRPC JSC 'RPA 'Mars'; an author of articles in the field of basic algebra and complex processing process automation. e-mail: mars@mv.ru.*

Abstract

The article deals with problems on shipborne anti-aircraft defense (AAD) system control process. The development of a plan for distribution of shipborne air defense systems through enemy objects is a one of the main stages of this process. The distribution plan represents an assignment array, the element of which includes identifiers for the air object and AAD facilities and is assigned for that air object. The distribution plan is generated with ranking of air objects on a danger level, evaluating the capabilities or efficiency of the AAD facilities assignment to air objects, and generating the plan of AAD facilities distribution through air objects according to the given efficiency criterion. When solving this problem, it arises the necessity of considering not only the actual state of the system but the predicted one. Authors suggest a mathematical model that considers jointly planning processes (problem solving on the predicted state) and control processes (problem solving on the actual state) of AAD facilities. The model takes into account the using of multiplex means and their loading features as well as the dynamics of evolving events.

Key words: anti-aircraft defense (AAD), mathematical models, anti-aircraft weapon, distribution plan, assignment criterion.

Введение

Существует множество монографий и статей, где с разной степенью детализации описываются подходы к решению и алгоритмы реализации задачи целераспределения. Как правило, задача целераспределения решается одновременно с выработкой управляющих параметров и выдачей их на средства противовоздушной обороны (ПВО). Процессы планирования и управления средствами ПВО, как правило, не описываются совместно. В [1] приводится структура алгоритма целераспределения и основная его идея: ранжирование целей по степени важности, ранжирование средств по ценности (средства большей дальности считаются наиболее ценными), последовательное назначение наименее ценных средств на наиболее опасные цели.

В [2] задача распределения формализуется как задача нелинейного целочисленного программирования.

Детально рассматриваются различные алгоритмы поиска оптимальных и псевдооптимальных решений: алгоритм исчерпывающего поиска, жадный алгоритм, алгоритм случайного поиска, генетический алгоритм, алгоритм размножения муравьиных колоний. Приводится сравнение их временных характеристик и показателей эффективности в соответствии с двумя критериями.

В [3] приводится классификация задач целераспределения на статическую и динамическую. Под статической задачей понимается задача, решаемая без учета предыдущего назначения и динамики развивающейся обстановки. А динамическая задача распределения, напротив, учитывает и предыдущие назначения и динамику (прогноз) развивающихся действий.

В [4] модель процесса ПВО формализуется как система массового обслуживания (СМО), в которой учитывается канальность средств, скорость обслуживания заявок (целей). С помощью моделей подобного типа, как правило, оценивается возможность средств ПВО по отражению средств воздушного нападения (СВН). Фактически строится размеченный граф переходов рассматриваемой многоканальной СМО, которая может деградировать в процессе своего функционирования. На основании данного графа с помощью математического аппарата Марковских цепей рассчитываются оценки результатов боевого противоборства для различного количества и различных характеристик СВН.

В [5] приведен обширный перечень методов моделирования и оптимизации системы ПВО на этапах планирования и управления. Приводятся различные варианты формализации системы ПВО, в том числе как системы массового обслуживания и как Марковской цепи. Описываются возможности использования данных моделей в задачах планирования ПВО.

Постановка задачи исследования

Каждая из данных публикаций с различных позиций рассматривает процесс распределения средств ПВО противника. При этом факт возможности назначения средства на цель является исходным для решения задачи и оценивается вероятностью поражения конкретным средством конкретной цели. В условиях динамично развивающейся обстановки данная величина может изменяться, при этом при вхождении цели в зону средства фактически происходит скачок вероятности с нуля до номинальной вероятности поражения средства.

Из [2] напомним про два критерия для показателей эффективности. Первый − это критерий математического ожидания суммарной опасности пораженных целей. Целевая функция задачи оптимизации в соответствии с данным критерием запишется следующим образом:

$$\min_{\{x_{ij}\in\{0,1\}\}} F=\sum_{i=1}^{N} V_i \prod_{j=1}^{M}\left(1-p_{ij}\right)^{x_{ij}},$$

с ограничениями $\sum_{i=1}^{N} x_{ij}=1, j=1,...,M,$

где N – количество целей, M – количество средств, p_{ij} – эффективность назначения (вероятность поражения) j-го средства на i-ю цель, V_i – опасность i-й цели, x_{ij} – переменная назначения j-го средства на i-ю цель.

Второй – это критерий математического ожидания суммарной ценности уцелевших кораблей обороны. Целевая функция задачи оптимизации в соответствии с данным критерием запишется следующим образом:

$$\min_{\{x_{ij}\in\{0,1\}\}} J=\sum_{j=1}^{A} \omega_j * \prod_{i\in G_j}\left(1-\pi_i\prod_{i=1}^{M}\left(1-p_{ik}\right)^{x_{ij}}\right),$$

с ограничениями $\sum_{i=1}^{N} x_{ij}=1, j=1,...,M,$

где A – количество кораблей в группе; ω_j – важность j-го корабля, G_j – массив индексов целей, нацеленных на j-й корабль; π_i – вероятность поражения i-й целью корабля, на который цель назначена (в соответствии с массивом индексов G_j); p_{ij} – эффективность назначения (вероятность поражения) j-го средства на i-ю цель.

Рассмотрим из [3] динамическую задачу распределения, учитывающую предыдущие назначения и динамику развивающихся действий:

$$\min_{\{x_{ij}\}} F_1=\sum_{\vec{\omega}\in\{0,1\}^N} \Pr\left[\vec{u}=\vec{\omega}\right] F_2^*\left(\vec{\omega},\vec{w}\right),$$

где $\Pr\left[u_i=k\right]=k\prod_{j=1}^{M}\left(1-p_{ij}(1)\right)^{x_{ij}}+$

$$+\left(1-k\right)\left(1-\prod_{j=1}^{M}\left(1-p_{ij}(1)\right)^{x_{ij}}\right),$$

где $k=\{0,\ 1\}$; $i=1..N$ – распределение случайной величины u_i; T – количество временных интервалов; $p_{ij}(t)$ – вероятность поражения j-м средством i-й цели в момент времени t; $q_{ij}(t)=1-p_{ij}(t)$ – соответствующая вероятность сохранения цели; $x_{ij}=\{0,1\}$, если $x_{ij}=1$, j-е средство назначено на i-ю цель в момент времени $t=1$. Состояние целей в момент времени $t=2$ будет соответствовать целям, уцелевшим после момента времени $t=1$. Состояние средств в момент времени $t=2$ будет соответствовать средствам, доступным после занятия их на момент $t=1$. $\vec{u}\in\{0,\ 1\}^N$, u_i=$\{0,\ 1\}$, если $u_i=1$, i-я цель после $t=1$ осталась непораженной; $\vec{w}\in\{0,\ 1\}^M$ w_j=$\{0,\ 1\}$, если $w_j=1$, j-е средство после $t=1$ останется незадействованным. $F_2^*\left(\vec{u},\vec{w}\right)$ – оптимальная оценка на $T-1$ шаге с вектором состояния целей $\vec{u}$, вектором состояния средств $\vec{w}$, с исходными векторами $\vec{u}$ и $\vec{w}$, данная оценка эквивалентна на момент времени $t=0$, $F^*\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\sum_{i=1}^{N} V_i u_i$.

В работах не учитывается использование многоканальных средств, имеющих возможность обслуживания одновременно нескольких целей. Также не учитывается возможность использования средствами нескольких типов боезапаса с различными параметрами дальности поражения. Если рассматривать процесс распределения в динамике, необходимо также учитывать количество боезапаса, а не признак его наличия для единичного обслуживания цели. Таким образом, необходима модель, которая с единых позиций рассматривала бы процессы планирования (оценки возможностей, оценки эффективности) и управления средствами ПВО и учитывала бы по возможности все вышеперечисленные особенности. В дополнение ко всему возникает необходимость рассмотрения подходов к формированию групп объектов для распределения на одно средство.

Метод решения

Один из факторов, который должен учитываться в задаче целераспределения – это учет многоканальности средств. Если средство многоканально, тогда недостаточно его назначить на единственную цель. В лучшем случае распределение должно осуществиться на количество объектов, равное числу каналов. Для решения задачи назначения можно использовать два подхода. Первый подход – это сначала распределить на каждое многоканальное средство по одной цели, а затем по возможности дополнительно назначить оставшиеся цели с учетом ограничения средства на пространство одновременного обслуживания целей (как правило, это сектор). Очевидно, что данный подход далеко не является оптимальным, так как на этапе первого распределения мы не знаем сколько ещё целей будет находиться в области пространства одновременного обслуживания целей. Второй подход – это предварительное формирование групп целей и последующее назначение многоканальных средств на группы целей. Таким образом, при распределении групп возникает двухуровневая задача оптимизации: на верхнем уровне назначаются средства на группы объектов, а на нижнем – определяется порядок обслуживания целей в группе данным средством. В [6] приведена общая математическая модель данной задачи и выведены основные формульные зависимости задачи формирования оптимального плана с учетом заданного критерия эффективности. Но в работе [6] в математической модели задачи не представлена оценка назначения с учетом времени прогноза. Кроме того, не рассматриваются подходы к формированию вариантов групп объектов для наиболее эффективного их последующего распределения на многоканальные средства. Сразу предлагается начать с данного подхода – распределение многоканальных средств на группы целей.

Вспомним ограничения, которые накладываются на многоканальные средства: количество каналов, сектор (пространство) одновременного обслуживания. Формирование групп объектов можно отнести к задаче кластеризации. Задача кластеризации заключается в разбиении множества объектов на непересекающиеся подмножества, называемые кластерами, так, чтобы каждый кластер состоял из объектов, близких по метрике, а объекты разных кластеров существенно отличались. Возникает вопрос, что же взять за метрику расстояния. С учетом ограничений по сектору одновременного обслуживания в качестве «расстояния» напрашивается разница между пеленгами объектов. Однако в этом случае будут возникать группы, существенно разнесенные по дальности и близкие по пеленгу (см. рис. 1а), что при ошибках локатора может привести к постоянному переходу объекта из одной группы в другую.

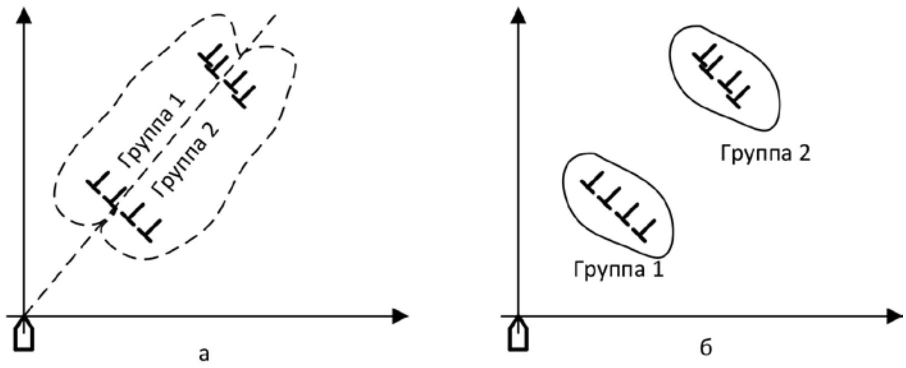

Рис. 1. Варианты формирования групп для различных метрик расстояния

Поэтому предложим несколько другой вариант (см. рис. 1б). За расстояние между объектами возьмем евклидову метрику, но формировать группы будем с учетом ограничений по сектору и канальности средств. Сформируем граф, вершинами которого являются объекты, а ребрами – расстояния между объектами, таким образом, чтобы $n-1$ ребер соединяли все n объектов минимально возможного суммарного расстояния. Сделать это можно с помощью алгоритма кратчайшего незамкнутого пути. Получилась одна большая группа. Далее начинаем последовательно удалять самые длинные ребра до тех пор, пока все группы не будут удовлетворять условиям по сектору (все элементы группы должны входить в один сектор, количество целей в группе не должно превышать количество каналов средства).

После составления групп объектов нам необходимо распределить имеющиеся средства на группы целей. Для этого необходимо оценить эффективность назначения каждого средства на каждую группу целей и решить задачу распределения, обеспечивающую максимальную эффективность назначения. В общем виде задача запишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{g=1}^{N_g}\sum\nolimits_{m=1}^{N_m} C_{gm}X_{gm} \to \min,\\ X=\{X_{gm}\},\ X_{gm}=\{0,\ 1\},\\ g=1,\ \ldots,\ N_g,\ m=1,\ \ldots,\ N_m,\\ \sum\nolimits_{m=1}^{N_m} X_{gm}=1,\ g=1,\ \ldots,\ N_g,\end{gathered} \tag{1}$$

где X_{gm} – переменная назначения m-го средства на g-ю группу, N_g – количество групп целей, N_m – количество средств, C_{gm} – эффективность назначения m-го средства на g-ю группу. В данной формулировке сомнительными выглядят показатель эффективности и аддитивный критерий оптимизации. Чтобы развеять эти сомнения, предположим, что показатель эффективности – это вероятность поражения группы целей с учетом её опасности. Но тогда задача запишется следующим образом: $\min\limits_{\{X_{ij}\in\{0,1\}\}} F=\sum\nolimits_{g=1}^{N_g} V_g \prod\limits_{m=1}^{N_m}\left(1-P_{gm}\right)^{X_{gm}}$, с ограничениями $\sum\nolimits_{m=1}^{N_m} X_{gm}=1, g=1,\ldots,N_g$, что не является задачей линейного программирования. В работе [7] приводится сведение данной задачи к задаче линейного программирования:

$$\prod_{k=1}^{|W|}\left(1-P_{ik}\right)^{X_{ik}}=\sum\nolimits_{k=1}^{|W|}\left(1-P_{ik}\right)X_{ik}$$

при следующих условиях:

$$X_{ik}=\{1,\ 0\};\ \sum\nolimits_{i=1}^{|W|} X_{ik}=1;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ W, \tag{2}$$

которые выполняются при равном количестве целей и средств. В противном случае задачу линейного программирования приходится решать в несколько итераций на частично ограниченном пространстве возможных назначений. Таким образом, можно считать постановку задачи $\sum\nolimits_{g=1}^{N_g}\sum\nolimits_{m=1}^{N_m} C_{gm}X_{gm}\to\min$ корректной. Решение задачи по переменным $X_{gm}=\{1,0\}$, $\sum\nolimits_{g=1}^{N_g}\sum\nolimits_{m=1}^{N_m} C_{gm}X_{gm}\to\min$, $\sum\nolimits_{m=1}^{N_m} X_{gm}=1, \sum\nolimits_{g=1}^{N_g} X_{gm}=1$, можно найти, используя методы линейного программирования. Нам осталось разобрать, каким образом рассчитывать эффективность назначения средства на группу целей и как на основании данного назначения формировать временной план назначения.

Для начала сформируем пространство альтернатив, каким образом можно использовать средство по группе целей. Первый список альтернатив – список целей, второй список – список типов боезапаса средства, третий список – список моментов времени применения средства по цели. Таким образом, будем иметь 3-мерную матрицу оценок $B=\{b_{ijk}\}$, где b_{ijk} – оценка назначения на i-ю цель в группе j-го типа боезапаса в k-й момент времени. За величину b_{ijk} примем

$$b_{ijk}=V_i(t_k)(1-P_{ij}(t_k))(1-Q_{ij}(t_k)),$$

где $V_i(t_k)$ – опасность цели в момент времени t_k, $P_{ij}(t_k)$ – вероятность поражения цели при воздействии в момент времени t_k, $Q_{ij}(t_k)$ – эффективность применения по i-й цели j-го типа боезапаса в момент времени t_k (можно использовать для исключения назначения расхода боезапаса большой дальности на ближние цели).

Возникает задача, каким образом нам минимизировать функцию $\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} b_{ijk}x_{ijk}\to\min,$ чтобы получить максимальную эффективность воздействия. Сначала сформируем ограничения, которые нам необходимы для приведенной целевой функции:

$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} x_{ijk}=1,\ \ k=1..N_3$ – в конкретный момент времени может быть произведен пуск только по одному объекту;

$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_3} x_{ijk}\le q_j,\ \ j=1..N_2$ – на всем временном интервале по всем целям может быть израсходовано не более q_j единиц боезапаса j-го типа;

$\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} x_{ijk}\le 1,\ \ i=1..N_1$ – по одной цели на рассматриваемом временном интервале и различными типами боезапаса должно быть произведено не более одного пуска.

Последнее ограничение, вообще говоря, требует некоторых пояснений, почему данное условие $\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} x_{ijk}\le 1,\ \ i=1..N_1,$ а не наоборот. Во-первых, в рамках управления средствами ПВО не предусматривается назначение на одно средство несколько раз одной и той же цели, во-вторых, не будем забывать о преобразовании и условии его выполнимости (2). Если мы допустим назначения на один объект нескольких пусков, то данное условие нарушится и наш критерий будет неправильным. В случае, если все же необходимо получить исчерпывающий план расхода боезапаса во времени, нам придется несколько раз (циклически) решать задачу оптимизации, исключая распределенные моменты времени, уменьшая боезапас и устанавливая назначенным целям пересчитанные вероятности их выживания.

Переменная $x_{ijk}=\{0,1\}$ может принимать значения 0 – в случае неназначения, 1 – в случае назначения.

Представленная задача

$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} b_{ijk}x_{ijk}\to\min$ относится к классу многоиндексных транспортных задач. Для решения её с помощью стандартных методов необходимо свести данную задачу к задаче линейного программирования. Приведем общий вид данной задачи:

$f(X)=\sum_{l=1}^{M} B_l X_l,\ M=N_1+N_2+N_3$ – целевая функция;

$$A=\{a_{sl}\}, b=\{b_s\}, AX\ge b\approx \tag{3}$$

$\approx\sum_{l=1}^{N} a_{sl}X_l\ge b_s,\ (s=1,...,M), X_l\ge 0$ – условия ограничения.

Далее приведем нашу задачу

$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} b_{ijk}x_{ijk}\to\min$ к виду задачи линейного программирования

$$f(X)=\sum_{l=1}^{N_1*N_2*N_3} B_l X_l=$$

$$=\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} b_{ijk}x_{ijk}\to\min,$$

$X=(X_1,...,X_N),\ l=N_1*N_2*i+N_2*j+k,$

$N=N_1*N_2*N_3,$

$X_{N_1*N_2*i+N_2*j+k}=x_{ijk}, B_{N_1*N_2*i+N_2*j+k}=b_{ijk};$

$M=N_1+N_2+N_3,\ (N\times M)$ – размер матрицы ограничений, которую будем использовать в задаче линейного программирования.

Обозначим векторы ограничений:

$$\begin{aligned} v_k^1&=1=\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} x_{ijk}, k=1..N_3,\\ v_j^2&=q_j\ge\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_3} x_{ijk}, j=1..N_2,\\ v_i^3&=1\le\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} x_{ijk}, i=1..N_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Как мы видим, знаки $(\le,\ \ge,\ =)$ в неравенствах (4) различны, в то время как в условиях (3) задачи линейного программирования знак $(\ge)$ одинаковый. Поэтому вводим вектор, отвечающий за знак в соответствии со знаком больше или меньше в приведенных неравенствах $z=(z^1,z^2,z^3),\ z_k^1=1,\ k=1..N_3,\ z_j^2=1,\ j=1..N_2,$ $z_i^3=-1,\ i=1..N_1.$

Можно заметить, что матрицы ограничения для различных индексных задач обладают определенным свойством (см. рис. 2). В зависимости от величины индекса задачи матрица разбивается на количество, равное размерности (индексу) задачи, и в каждой части матрицы формируется последовательность нулей и единиц в соответствии с повторением одного из индексов при просмотре элементов многомерного массива. Проанализировав это свойство для нашей (3-индексной задачи), можно составить алгоритм, формирующий матрицу ограничений в соответствии с (5).

Матрица ограничений для 2-индексной задачи о назначениях 4*4

$$
\begin{bmatrix}
1111 & 0000 & 0000 & 0000 \\
0000 & 1111 & 0000 & 0000 \\
0000 & 0000 & 1111 & 0000 \\
0000 & 0000 & 0000 & 1111 \\
1000 & 1000 & 1000 & 1000 \\
0100 & 0100 & 0100 & 0100 \\
0010 & 0010 & 0010 & 0010 \\
0001 & 0001 & 0001 & 0001
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
X11 \\ X12 \\ X13 \\ X14 \\ X21 \\ X22 \\ X23 \\ X24 \\ X31 \\ X32 \\ X33 \\ X34 \\ X41 \\ X42 \\ X43 \\ X44
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

Матрица ограничений для 3-индексной задачи о назначениях 2*2*2

$$
\begin{bmatrix}
1\ 1\ 1\ 1 & 0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0 & 1\ 1\ 1\ 1 \\
1\ 0\ 1\ 0 & 1\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 \\
1\ 1\ 0\ 0 & 1\ 1\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 1 & 0\ 0\ 1\ 1
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
X111 \\ X112 \\ X121 \\ X122 \\ X211 \\ X212 \\ X221 \\ X222
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

Рис. 2. Виды матриц ограничений для 2-х типов задач о назначениях

Далее рассчитаем матрицу ограничений $A=\{a_{sl}\},\ s=1..M,\ l=1..N,$ $M=N_1+N_2+N_3,\ N=N_1*N_2*N_3$:

$$
\begin{aligned}
&a_{sl}=v_k^1,\ k=1..N_3,\ s=k,\\
&l=(i-1)N_3N_2+(j-1)N_3+k,\\
&i=1..N_1,\ j=1..N_2;\\
&a_{sl}=v_j^2,\ j=1..N_2,\ s=j+N_3,\\
&l=(i-1)N_3N_2+(j-1)N_3+k,\\
&i=1..N_1, j=1..N_2;\\
&a_{sl}=v_i^3, i=1..N_1,\ s=i+N_3+N_2,\\
&l=(i-1)N_3N_2+(j-1)N_3+k,\\
&i=1..N_1,\ j=1..N_2.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

А также вектор ограничений $b=\{b_s\},\ s=1..M,\ M=N_1+N_2+N_3$:

$$
\begin{aligned}
&b_s=v_k^1*z_k^1,\ k=1..N_3,\ s=k,\\
&b_s=v_j^2*z_j^2,\ j=1..N_2,\ s=j+N_3,\\
&b_s=v_i^3*z_i^3,\ i=1..N_1,\ s=i+N_2+N_3.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Таким образом, мы свели 3-мерную задачу распределения ресурса огневого средства по группе целей во времени к задаче линейного программирования.

$$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} b_{ijk}x_{ijk} \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} x_{ijk} = 1,\ \ k = 1..N_3,$$
$$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_3} x_{ijk} <= a_j,\ \ j = 1..N_2,$$
$$\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3} x_{ijk} = 1,\ \ i = 1..N_1,$$
$$x_{ijk} = \{0,1\},\ i = 1..N_1, j = 1..N_2, k = 1..N_3$$

$$f(X) = \sum_{l=1}^{M} B_l X_l,$$
$$A = \{a_{sl}\}, b = \{b_s\},$$
$$AX \ge b, X_l \ge 0.$$

Напомним, что при распределении групп возникает двухуровневая задача оптимизации: на верхнем уровне распределяются средства на группы объектов, а на нижнем – определяется порядок обслуживания целей в группе данным средством. Теперь нам необходимо рассчитать показатели эффективности первого и второго уровней. Начнем со второго уровня. Наиболее понятным критерием является математическое ожидание пораженных целей. Очевидно, что если мы оперируем с такими параметрами, как опасность цели, мы фактически отходим от данного критерия. Поэтому предлагается ввести понятие математического ожидания с учетом опасности целей. Математическое ожидание без учета опасности цели рассчитывается следующим образом: $M_t = \sum_{i=1}^{N} P_i x_i, x_i = \{0,1\}$ – при условии назначения средства на цель; $x_i = 0$ – при условии отсутствии назначения средства на цель. Сделаем следующее преобразование $\sum_{i=1}^{N} P_i x_i = N\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i x_i}{N}$, где $\frac{P_i x_i}{N}$ – доля каждой назначенной цели в общее математическое ожидание. Нам необходимо получить долю с учетом опасности цели, тогда для i-й цели эта доля будет равна $\frac{P_i x_i V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i}$. Фактически коэффициенты $k_i = 1/N$, $P_i x_i / N = P_i x_i k_i$ для каждой цели заменились на $\tilde{k}_i = V_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} V_i$, но сохранили свои свойства $\sum_{i=1}^{N} k_i = \sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_i = 1$. Таким образом, математическое ожидание с учетом опасности цели будет равно

$$M_{to} = N\sum_{i=1}^{N} P_i x_i \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} V_i}\sum_{i=1}^{N} P_i V_i x_i,$$

и именно его берем в качестве показателя эффективности назначения средства на группу целей.

Заключение

Таким образом, получена математическая модель, которая объединяет в себе три уровня решения задачи ПВО (рассматриваемых ранее по отдельности и не связываемых между собой), а именно: оценка возможностей средств ПВО, распределение средств ПВО по целям противника, определение порядка обстрела целей назначенным средством. Математическая модель учитывает использование многоканальных средств, различных типов боезапаса, динамику развивающихся действий, а также использует обоснованные критерии при решении задач оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оркин Б.Д., Оркин С.Д., Дьячук А.К. Структура алгоритма целераспределения средств противовоздушной обороны корабельной группы // Труды МАИ. – 2012. – № 2 (62). – С. 11.
2. Johanson F. Evaluating the Performance of TEWA Systems: Dissertation. – Orebro University, 2010.
3. Hosein P.A., Athans M. Some Analytical Results For Dynamic Weapon-Target Allocation Problem // Massachusetts Institute of Technology. Laboratory for Information and Decision Systems, 1990. – 28 p.
4. Анцев Г.В., Красников А.К., Новиков Е.С. Методологические аспекты проектирования интегрированных систем управления ВМФ // Автоматизация процессов управления. – 2016. – № 2 (44). – С. 4–9.
5. Ильин В. А. Система ПВО соединения кораблей : монография. – СПб. : ВСОК ВМФ, 2006.
6. Пифтанкин А.Н., Пифтанкин Н.А. Модели и подходы, используемые в задачах управления ПВО корабельного соединения // Автоматизация процессов управления. – 2011. – № 1 (23). – С. 41–49.
7. Круглов Д.М., Пифтанкин А.Н. Математическая модель процесса управления противовоздушной обороной соединения кораблей // Сб. ст. Молодеж. науч.-техн. конф. «Направления совершенствования АСУ». – Ульяновск, 2014. – С. 92–102.

REFERENCES

1. Orkin B.D., Orkin S.D., Diachuk A.K. Struktura algoritma tseleraspredeleniia sredstv protivovozdushnoi oborony korabelnoi gruppy [A Target Distribution of the Ship Group Air Defense Resources Algorithm Structure]. *Trudy MAI* [Proc. Trudy MAI], 2012, no. 2 (62), 11 p.

2. Johanson, F. *Evaluating the Performance of TEWA Systems: Dissertation.* Orebro University, 2010.

3. Hosein, P.A., Athans, M. *Some Analytical Results for Dynamic Weapon-Target Allocation Problem.* Massachusetts Institute of Technology. Laboratory for Information and Decision Systems, 1990. 28 p.

4. Antsev G.V., Krasnikov A.K., Novikov E.S. Metodologicheskie aspekty proektirovaniia integrirovannykh sistem upravleniia VMF [Methodological Aspects of Designing Naval Integrated Management Systems]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2016, no. 2 (44), pp. 4–9.

5. Ilin V.A. *Sistema PVO soedineniia korablei. Monografiia* [AAD Naval Force System. Monograph]. St. Petersburg, VSOK VMF Publ., 2006.

6. Piftankin A.N., Piftankin N.A. Modeli i podkhody, ispolzuemye v zadachakh upravleniia PVO korabelnogo soedineniia [Mdels and Approaches Used in Tasks Ship Group AAD-Control]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2011, no. 1 (23), pp. 41–49.

7. Kruglov D.M., Piftankin A.N. Matematicheskaia model protsessa upravleniia protivovozdushnoi oboronoy soedineniia korablei [A Mathematical Model for Management Process of the AAD Naval Force System]. *Sb. st. Molodezh. nauch.-tekhn. konf. Napravleniia sovershenstvovaniia ASU* [Proc. of Youth Workshop and Conf. on C2-System Improvement Prospects]. Ulyanovsk, 2014, pp. 92−102.