УДК 531.36:534.1

А.С. Андреев, О.А. Перегудова

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ОМНИ-КОЛЕСАМИ[1]

Андреев Александр Сергеевич, *доктор физико-математических наук, профессор, окончил механико-математический факультет Ташкентского государственного университета. Заведующий кафедрой «Информационная безопасность и теория управления» Ульяновского государственного университета. Имеет статьи, учебные пособия, монографию в области теории устойчивости и управления движением механических систем. [e-mail: AndreevAS@ulsu.ru].*

Перегудова Ольга Алексеевна, *доктор физико-математических наук, доцент, окончила механико-математический факультет УлГУ. Профессор кафедры «Информационная безопасность и теория управления» УлГУ. Имеет статьи, учебные пособия, монографию в области теории устойчивости и управления движением механических систем. [e-mail: peregudovaoa@gmail.com].*

Аннотация

Одним из направлений бурного развития робототехники является разработка моделей, а также конструирование и широкое применение колесных мобильных роботов в промышленной и социальной сферах. Достаточно большой класс таких роботов составляют колесные роботы с роликонесущими или омни-колесами. Отличительной особенностью конструкции таких колес является то, что на них по определенной схеме закреплены ролики, позволяющие роботу перемещаться в любом направлении без предварительного разворота. Тем самым достигается высокая маневренность по сравнению с другими колесными экипажами. В работе исследуется задача об отслеживании заданной траектории мобильного робота с тремя омни-колесами со смещенным центром масс, т. е. когда полагается, что центр масс робота не совпадает с геометрическим центром платформы. Ранее такая задача не рассматривалась. В статье обоснована структура управления, обеспечивающая отслеживание заданной траектории, в том числе с учетом запаздывания и дискретности сигнала в цепи обратной связи. При этом управление обладает свойством робастности, при котором матрицы коэффициентов усиления сигналов обратной связи не зависят непосредственно от массоинерционных параметров системы и задания отслеживаемой траектории, а определяются только значениями ограничений на эти параметры и траекторию. Результаты достигнуты на основе полученного в работах авторов развития прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных систем. Представлены результаты численного моделирования исследованной задачи.

Ключевые слова: колесный мобильный робот, робастное управление, стабилизация, отслеживание траектории, функционал Ляпунова.

doi: 10.35752/1991-2927-2019-2-56-75-84

---

1 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00702) и Минобрнауки РФ в рамках Государственного задания по базовой части НИР (№ 9.5994.2017/БЧ).

ROBUST MOTION STABILIZATION OF A MOBILE ROBOT WITH OMNY-WHEELS

Aleksandr Sergeevich Andreev, *Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Tashkent State University; Head of the Department of Information Security and Control Theory of Ulyanovsk State University; an author of articles, textbooks, and a monograph in the field of stability theory and the motion control of mechanical systems. e-mail: AndreevAS@ulsu.ru.*

Olga Alekseevna Peregudova, *Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Ulyanovsk State University; Professor of the Department of Information Security and Control Theory of Ulyanovsk State University; an author of articles, textbooks, a monograph in the field of the theory of stability and motion control of mechanical systems. e-mail: peregudovaoa@gmail.com.*

Abstract

The modelling as well as the design and widespread use of wheeled mobile robots in the industrial and social spheres is one of the areas of rapid development of robotics. A sufficiently large class of such robots consists of wheeled robots with roller-bearing or omni-wheels. A distinctive feature of the design of such wheels consisting in the fact that the rollers are fixed to them according to a certain scheme allows the robot to move in any direction without a prior turn. This achieves high maneuverability compared to other wheeled carriages. The paper investigates the trajectory tracking control problem of a mobile robot with three omni-wheels and with an offset center of mass, i.e. when it is assumed that the center of mass of the robot does not coincide with the geometric center of the platform. Previously, such a problem was not considered. The paper substantiates the control structure that provides tracking of a given trajectory, including taking into account the delay and discreteness of the signal in the feedback. At the same time the control has the property of robustness which consists in the fact that its parameters do not depend directly on the mass-inertial parameters of the system and the tracked trajectory. The controller is constructed only by using the values of the system parameters bounds. The result has been achieved on the basis of the development of direct Lyapunov method in the study of the stability of non-autonomous systems obtained in the previous papers of the authors. The results of numerical modeling of the problem studied are presented.

Key words: wheeled mobile robot, robust control, stabilization, trajectory tracking, Lyapunov functional.

Введение

Исследования по моделированию движения и управлению мобильными роботами с тремя роликонесущими колесами были начаты еще в 80-х годах XX века. И соответственно имеется большое количество публикаций по этой проблеме. Представим небольшой обзор основных относящихся к данной статье работ.

В большинстве работ рассматривается модель колесного робота, у которого центр масс платформы совпадает с его геометрическим центром, а колеса вращаются без проскальзывания. Одной из первых работ по исследованию задачи отслеживания траектории такого робота на основе динамического закона управления является статья [1]. Предложена без должного математического обоснования структура управления, включающая пропорционально-интегро-дифференциальный (ПИД) регулятор. Иной подход в задаче управления на основе линеаризации предложен в работе [2]. В работе [3] предложено решение задачи о стабилизации положения робота посредством линейного пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора. В работе [4] предложено использовать адаптивное обратное управление на базе динамической нейронной сети. Важной работой по математическому обоснованию управления движением мобильных колесных роботов является статья [5]. В ней предложен векторно-матричный формализм неголономной механики, который использован для построения математических моделей колесных мобильных роботов. Такой подход позволил в работе [6] составить уравнения движения робота по горизонтальной поверхности без учета проскальзывания колес, но с учетом их динамики относительно геометрического центра масс платформы.

В работе [7] для обоснования управления, обеспечивающего отслеживание и стабилизацию траектории робота, строится функция Ляпунова и применяется соответствующая теорема об асимптотической устойчивости. В статьях [8, 9] эти задачи решаются при учете действия сухого трения в двигателе, вращающем колеса, на основе метода бэкстеппинга с использованием леммы Барбалата.

В работе [10] рассмотрена задача оптимального управления роботом. В рамках классического вариационного исчисления представлен алгоритм вывода управления, переводящего робот с одной траектории на другую. В работах [11, 12] представлена методика построения адаптивного управления с использованием релейного элемента. Вывод основывается на построении функции Ляпунова с использованием соответствующей теоремы об асимптотической устойчивости.

Для модели мобильного робота из [6] применение новых теорем прямого метода Ляпунова [13, 14] позволило обосновать новые эффективные законы управления [15, 16]. Их эффективность по отношению к указанным выше результатам состоит, прежде всего, в робастности управления, т. е. в его независимости от массо-инерционных параметров системы и выбора отслеживаемой траектории.

Важной особенностью представленных выше работ является динамическая модель колесного робота без проскальзывания колес. Работа [17] была одной из первых, где было отмечено влияние проскальзывания колес на движение робота. Для отслеживания его траектории было предложено управление достаточно сложной структуры. Более общая модель проскальзывания колес разработана в статьях [18, 19].

Другой важной особенностью указанных выше результатов, включая работы [17–19], являлось предположение о совпадении центра масс платформы робота с ее геометрическим центром. Динамика робота со смещенным центром масс, по-видимому, впервые описана в работе [20], где также изучены свободные и стационарные движения робота.

Эффективная реализация построенных законов управления предполагает проведение исследований по влиянию запаздывания в структуре обратной связи и дискретности измерений фазового состояния системы на процесс управляемого движения. В работе [21] рассмотрено использование дискретного управления в рамках кинематической модели. В работе [22] в такой постановке учитывается запаздывание. В работах [23, 24] проведено теоретическое обоснование возможной структуры дискретного управления без непосредственного его построения для конкретных моделей робота.

Применение нового подхода в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных и дискретных уравнений [25, 26] позволило математически строго обосновать решение задачи об отслеживании траектории мобильного робота в рамках динамической модели из [6, 15, 16] управлением с запаздывающей и дискретной обратной связью. Соответствующие результаты представлены в работах [27–29], получен патент на программный продукт [30, 31].

Целью настоящей работы является построение робастных непрерывных и дискретных моделей управления, обеспечивающих отслеживание и стабилизацию траектории колесного робота со смещенным центром масс без учета проскальзывания колес.

1 Постановка задачи

Рассмотрим предложенную в [20] динамическую модель мобильного робота (см. рис. 1) с тремя всенаправленными колесами и смещенным центром масс.

Будем использовать следующие обозначения и предположения. Пусть $OXYZ$ – неподвижная система координат, связанная с горизонтальной опорной плоскостью OXY. Ось OZ направлена вертикально вверх. Пусть C – центр равностороннего треугольника $C_1 C_2 C_3$, в вершинах которого расположены центры колес робота. Пусть $Cx_1y_1z_1$ – подвижная система координат, закрепленная на движущейся платформе робота. Ось Cx_1 параллельна оси вращения первого колеса; ось Cz_1 вертикальна; оси Cy_1, Cz_1 и Cx_1 составляют правую систему координат. Плоскости OXY и Cx_1y_1 параллельны.

Пренебрегая массой и размерами роликов, рассмотрим модель робота как систему из четырех абсолютно твердых тел, положение которых определяется шестью независимыми параметрами, образующими вектор обобщенных координат $q = (x, y, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$, где x и y – две декартовы координаты центра C платформы в системе $OXYZ$; ψ – угол поворота платформы вокруг вертикали, измеряемый от оси OX; φ_j – угол поворота j-го колеса вокруг его оси вращения $(j = 1,2,3)$. Центр масс C_0 системы смещен относительно центра C платформы на расстояние d. Угол между осью Cx_1 и вектором CC_0 обозначим через α. Пусть r – радиус колес. Расстояния от центра платформы до центра C_j $(j = 1,2,3)$ каждого колеса равны a. Обозначим через m_0 и m_1 массы платформы и колеса робота соответственно; через ρ_0 и ρ_1 обозначим радиусы инерции платформы и колеса относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс; обозначим через ρ_3 радиус инерции колеса относительно его оси вращения. Также введем следующие обозначения:

$$m = m_0 + 3m_1 + \frac{3m_1\rho_3^2}{2r^2},$$

$$m_s = m_0 + 3m_1, m_2 = m - m_s = \frac{3m_1\rho_3^2}{2r^2},$$

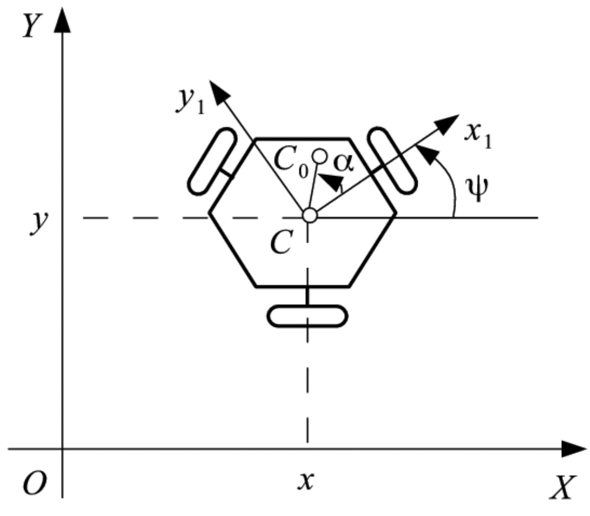

Рис. 1. Модель мобильного робота с тремя омни-колесами

$$I_s = m_0\left(d^2+\rho_0^2\right)+3m_1\left[\rho_1^2+a^2\left(1+\frac{2\rho_3^2}{r^2}\right)\right].$$

Аналогично [20] предположим, что крутящие моменты, создаваемые каждым из трех одинаковых двигателей постоянного тока, линейно зависят как от приложенного напряжения, так и от угловой скорости вращения ротора, т. е.

$$M_j = c_u u_j - c_v\dot{\varphi}_j,\ j=1,2,3,$$

где c_u и c_v – некоторые постоянные, u_j – напряжение, подаваемое на двигатель, $c_v\dot{\varphi}_j$ является моментом противоэлектродвижущей силы.

Используя результаты работ [20], можно найти следующее уравнение управляемого движения робота в системе координат $OXYZ$:

$$A(q_3)\ddot{q}+B(q_3,\dot{q}_3)\dot{q}=P(q_3)U, \tag{1}$$

где $q=(q_1,q_2,q_3)^T$, $U=(U_1,U_2,U_3)^T$,

$$U_i=(c_u/r)\,u_i,\ i=1,2,3,$$

$$A(q_3)=\begin{pmatrix} m & 0 & -s(q_3)\\ 0 & m & c(q_3)\\ -s(q_3) & c(q_3) & I_s\end{pmatrix},$$

$$B(q_3,\dot{q}_3)=\begin{pmatrix} h & m_2\dot{q}_3 & -c(q_3)\dot{q}_3\\ -m_2\dot{q}_3 & h & -s(q_3)\dot{q}_3\\ 0 & 0 & 2a^2h\end{pmatrix},$$

$$P(q_3)=\begin{pmatrix} \sin q_3 & \sin\left(q_3+\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(q_3+\frac{4\pi}{3}\right)\\ -\cos q_3 & -\cos\left(q_3+\frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(q_3+\frac{4\pi}{3}\right)\\ -a & -a & -a\end{pmatrix},$$

$h=3c_v/(2r^2)$, $c(q_3)=m_0d\cos(\alpha+q_3)$,
$s(q_3)=m_0d\sin(\alpha+q_3)$,

Будем решать задачу отслеживания траектории робота при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered}|q_k^{(0)}(t)|\le\xi_1,\ |\dot{q}_k^{(0)}(t)|\le\eta_1,\ |\dot{q}_3^{(0)}(t)|\le\eta_2,\\ |\ddot{q}_k^{(0)}(t)|\le\zeta_1,\ |\ddot{q}_3^{(0)}(t)|\le\zeta_2,\ (k=1,2),\end{gathered} \tag{2}$$

где $q=q^{(0)}(t)$ – заданная траектория, которая является дважды непрерывно дифференцируемой функцией времени, ξ_1, η_k и ζ_k – некоторые положительные постоянные $(k=1,2)$.

2 Решение задачи о стабилизации при мгновенной обратной связи

Выберем управление U в виде:

$$U=P^{-1}(q_3(t))\left(U^{(0)}+U^{(1)}\right), \tag{3}$$

где $P^{-1}P=E$ и, соответственно,

$$P^{-1}(q_3)=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} \sin q_3 & -\cos q_3 & -\frac{1}{2a}\\ \sin\left(q_3+\frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(q_3+\frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2a}\\ \sin\left(q_3+\frac{4\pi}{3}\right) & -\cos\left(q_3+\frac{4\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2a}\end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}U^{(0)}=A(q_3)\ddot{q}^{(0)}(t)+B\left(q_3,\dot{q}_3^{(0)}(t)\right)\dot{q}^{(0)}(t),\\ U^{(1)}=(U_1^{(1)},U_2^{(1)},U_3^{(1)})^T,\\ U_j^{(1)}=-f_j\left(q_j-q_j^{(0)}(t)\right),\ j=1,2,3,\end{gathered} \tag{4}$$

где $f_j\in C^1(R\to R^+)$, $j=1,2,3$ – функции, удовлетворяющие условиям:

$$f_j(e_j)e_j\ge 0\quad (=0\Leftrightarrow e_j=0);$$

$$|f_j|\le f_{10},\quad \left|\frac{df_j}{de_j}\right|\le l_{10}\quad (j=1,2),$$

$$|f_3|\le f_{20},\quad \left|\frac{df_3}{de_3}\right|\le l_{20}.$$

Введем возмущения:

$$e=(e_1,e_2,e_3)^T=q-q^{(0)}(t).$$

Уравнения возмущенного движения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{gathered}A\left(q_3^{(0)}(t)+e_3\right)\ddot{e}+B\left(q_3^{(0)}(t)+e_3,\dot{q}_3^{(0)}(t)+\dot{e}_3\right)\dot{e}+\\ +g\left(t,q_3^{(0)}(t)+e_3\right)\dot{e}_3=-f(e),\end{gathered} \tag{5}$$

где $g=\left(m_2\dot{q}_2^{(0)}(t)-c(q_3^{(0)}(t)+e_3)\dot{q}_3^{(0)}(t),\right.$

$$\left.-s\left(q_3^{(0)}(t)+e_3\right)q_3^{(0)}(t)-m_2\dot{q}_1^{(0)}(t),0\right)^T,$$

$$f=\left(f_1(e_1),f_2(e_2),f_3(e_3)\right)^T.$$

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$V=\frac{1}{2}\dot{e}^T A\left(q_3^{(0)}(t)+e_3\right)\dot{e}+\sum_{j=1}^{3}F_j(e_j),$$

$$F_j(e_j) = \int_0^{e_j} f_j(\tau)\,d\tau.$$

Для полной производной по времени этой функции в силу системы (5) можно найти оценку:

$$\dot{V} = -h\left(\dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2 + 2a^2\dot{e}_3^2\right) +$$
$$+\left(m_0 d\dot{q}_3^{(0)}(t)\cos\left(\alpha + e_3 + q_3^{(0)}(t)\right) - m_2\dot{q}_2^{(0)}(t)\right)\dot{e}_1\dot{e}_3 +$$
$$+\left(m_2\dot{q}_1^{(0)}(t) + m_0 d\dot{q}_3^{(0)}(t)\sin\left(\alpha + e_3 + q_3^{(0)}(t)\right)\right)\dot{e}_2\dot{e}_3 \le$$
$$\le -\varepsilon_1\left(\dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2\right) - \varepsilon_2\dot{e}_3^2 \le 0,\ \ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,$$

если

$$\delta_1 = m_0 d\eta_2 + m_2\eta_1 < ah. \qquad (6)$$

На основании работ [13, 14] имеем следующий результат.

Утверждение 1. Под действием управления (3), (4) каждое движение робота при ограничениях (6) на его возможные скорости будет равномерно асимптотически устойчиво. При этом оно будет глобально стабилизируемо при условиях $F_j(e_j) \to +\infty$ при $e_j \to \pm\infty$.

Замечание 1. При невыполнении условия (6) стабилизация движения $q = q^{(0)}(t)$ может быть достигнута добавлением составляющей $U^{(2)}$ управления U в виде:

$$U^{(2)} = \left(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, U_3^{(2)}\right)',$$
$$U_j^{(2)} = -\mu_j\dot{e}_j\ \ (j = 1, 2, 3),$$
$$h + \mu_j \ge \varepsilon,\ j = 1, 2,$$
$$2a^2h + \mu_3 \ge \frac{\left(m_0 d\eta_2 + m_2\eta_1\right)^2}{4}\left(\frac{1}{h+\mu_1} + \frac{1}{h+\mu_2}\right) + \varepsilon.$$

Замечание 2. Периодичность системы (1) по q_3 позволяет уменьшить затраты по U_3 на глобальную стабилизацию изменением условий относительно f_3 и F_3 на условия:

$$f_3(e_3)e_3 \ge 0,\ f_3(e_3) = 0 \Leftrightarrow e_3 = 2\pi k,\ \ k \in Z,$$
$$F_3(e_3) = 0 \Leftrightarrow e_3 = 4\pi k,\ \ k \in Z.$$

3 Решение задачи о стабилизации при запаздывании в цепи обратной связи

Допустим, что возмущение $e(t)$ определяется с конечным запаздыванием

$$e_j = e_j(t - \nu_j(t)),\ 0 \le \nu_j(t) \le \nu_0,\ \ j = 1, 2, 3$$

или $e = e(t - \nu(t))$. Управление (3), таким образом, будет иметь следующий вид:

$$U = P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right)\times$$
$$\times\left(U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) - f\left(e\left(t - \nu(t)\right)\right)\right) \qquad (7)$$

или

$$U = P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right)\left(U^{(0)}\left(t, q_3(t) + e_3(t)\right) +\right.$$
$$+U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) -$$
$$\left.-U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right) - f\left(e\left(t - \nu(t)\right)\right)\right) +$$
$$+\left(P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) - P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right)\right)\times$$
$$\times\left(U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) - f\left(e\left(t - \nu(t)\right)\right)\right).$$

Соответственно имеем уравнения возмущенного движения:

$$A\left(q_3^{(0)}(t) + e_3\right)\ddot{e} + B(q_3^{(0)}(t) +$$
$$+ e_3, \dot{q}_3^{(0)}(t) + \dot{e}_3)\dot{e} + g(t, q_3^{(0)}(t) + e_3)\dot{e}_3 =$$
$$= U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right) - f\left(e\left(t - \nu(t)\right)\right) +$$
$$+U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) -$$
$$-U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right) + P\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right)\times$$
$$\times\left(P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) - \right. \qquad (8)$$
$$\left. - P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right)\right)\times$$
$$\times\left(U^{(0)}\left(t, q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) - f\left(e\left(t - \nu(t)\right)\right)\right).$$

Для матрицы P и вектор-функций $U^{(0)}$ и f применим следующие представления:

$$P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3(t)\right) -$$
$$- P^{-1}\left(q_3^{(0)}(t) + e_3\left(t - \nu_3(t)\right)\right) =$$
$$= \int_{-\nu_3(t)}^{0} \frac{\partial P^{-1}}{\partial q_3}\left(q_3^{(0)}(t) + e(t + \tau)\right)\dot{e}_3(t + \tau)\,d\tau,$$
$$f_j\left(e_j(t)\right) - f_j\left(e_j\left(t - \nu_j(t)\right)\right) =$$
$$= \int_{-\nu_j(t)}^{0} \frac{df_j}{de_j}\left(e_j(t + \tau)\right)\dot{e}_j(t + \tau)\,d\tau.$$

Введем функционал Ляпунова:

$$V\left(t,\dot{e}_t,e_t\right)=\frac{1}{2}\dot{e}^T A\left(q_3^{(0)}\left(t\right)+e_3\right)\dot{e}+ +\sum_{j=1}^{3}F_j\left(e_j\right)+\frac{h}{2\nu_0}\int_{-\nu_0}^{0}ds\times \times\left(\int_s^0\left(\dot{e}_1^2\left(t+\tau\right)+\dot{e}_2^2\left(t+\tau\right)+a^2\dot{e}_3^2\left(t+\tau\right)\right)d\tau\right),$$

$$F_j(e_j)=\int_0^{e_j}f_j(\tau)d\tau.$$

Для производной по времени этого функционала в силу замкнутой системы (8) можно получить следующую оценку:

$$\dot{V}\left(t,e_t,\dot{e}_t\right)\le W\left(\dot{e}_t\right)=\int_{-\nu_0}^{0}\sum_{i,j=1}^{6}\Delta_{ij}z_iz_jd\tau,$$

где

$$z'=\left(z_1,z_2,...,z_6\right)= =\left(\dot{e}_1(t),\dot{e}_2(t),\dot{e}_3(t),\dot{e}_1(t+\tau),\dot{e}_2(t+\tau),\dot{e}_3(t+\tau)\right),$$

$$\Delta_{ij}=\Delta_{ji},\ \ \Delta_{11}=\Delta_{22}=\Delta_{44}=\Delta_{55}=-\frac{h}{2\nu_0},$$

$$\Delta_{33}=\Delta_{52}=-\frac{a^2h}{\nu_0},$$

$$\Delta_{13}=\Delta_{23}=\frac{m_2\eta_1+m_0d\eta_2}{2\nu_0},\ \ \Delta_{14}=\Delta_{25}=\frac{l_{10}}{2},$$

$$\Delta_{16}=\Delta_{26}=2\left(m\varsigma_1+m_0d\varsigma_2\right)+ +2\left(h\eta_1+m_2\eta_2\eta_1+m_0d\eta_2^2\right)+ +\left(m_0d\varsigma_2+m_0d\eta_2^2\right)/2+2f_{10},$$

$$\Delta_{36}=2\left(m\varsigma_1+m_0d\varsigma_2\right)a+ +2\left(h\eta_1+m_2\eta_2\eta_1+m_0d\eta_2^2\right)a+ +m_0d\varsigma_1+l_{20}/2+2af_{10},$$

$$\Delta_{12}=\Delta_{15}=\Delta_{24}=\Delta_{34}=\Delta_{35}=\Delta_{46}=\Delta_{56}=0.$$

Матрица $\Delta=\{\Delta_{ij}\}$ ($\Delta_{ij}=const$) этой оценки является отрицательно-определенной при условии (6) и выполнении следующих неравенств:

$$\begin{gathered}\Delta_4=\Delta_{11}^2\left(2a^2\Delta_{11}^2-2\Delta_{13}^2\right)- -\Delta_{14}^2\left(2a^2\Delta_{11}^2-\Delta_{13}^2\right)>0,\\ \Delta_5=\Delta_{55}\left(\Delta_4-\Delta_{14}^2\left(2a^2\Delta_{11}^2- -\Delta_{14}^2\left(2a^2\Delta_{11}^2-2a^2\Delta_{14}^2-\Delta_{13}^2\right)\right)\right)<0,\\ \Delta_6=\Delta_{11}\left(2a^2\Delta_5-4\Delta_{16}\Delta_{14}^2\Delta_{36}+ +2\Delta_{16}^2\Delta_{14}^2\Delta_{33}-2\Delta_{16}^2\Delta_{22}^2\Delta_{33}+ +2\Delta_{22}\Delta_{36}^2\Delta_{14}^2-\Delta_{22}^3\Delta_{36}^2\right)>0.\end{gathered}\tag{9}$$

Таким образом, при этих условиях $W(\dot{e}_t)\le 0$, $W(\dot{e}_t)=0\Leftrightarrow\{\dot{e}(t+\tau)\equiv 0\}$. Но в силу задания $f_j(e_j)$ множество $\{W(\dot{e}_t)=0\}$ не будет содержать целых решений предельных к (8) уравнений, кроме нулевого, $\dot{e}(t)=e(t)=0$. Согласно теореме об асимптотической устойчивости из [25] имеем следующий результат.

Утверждение 2. Управление (7) обеспечивает глобальную равномерную стабилизацию любого из движений робота, удовлетворяющего ограничениям (6), при запаздывании, удовлетворяющем условиям (9). Из этих условий может быть найдена следующая заведомая оценка величины запаздывания:

$$0<\nu_0<h\sqrt{\frac{A}{B}},A=a^2h^2-\left(m_2\eta_1+m_0d\eta_2\right)^2, B=l_{10}^2\left(2a^2h^2-\left(m_2\eta_1+m_0d\eta_2\right)^2\right)+\Delta_{36}^2.\tag{10}$$

4 Стабилизация с дискретным управлением

Рассмотрим случай дискретного управления в виде ступенчатого импульсного управляющего воздействия вида:

$$u=f(e(L_n)),\ \ L_n=nL_0,\ \ n\in Z^{+},\ \ L_0>0.\tag{11}$$

На каждом отрезке времени $[nL_0,\ (n+1)L_0]$ имеет место представление:

$$f(e(L_n))=f(e(t-\nu(t))),$$

где функция $\nu(t)=t-L_n,\ 0\le\nu(t)\le L_0$, является непрерывной на каждом таком интервале.

Отсюда и из Утверждения 2 находим, что дискретное управляющее воздействие (11) решает задачу о робастном отслеживании заданной траектории при условии (8) и ограничении на интервал дискретизации $L_0\le\nu_0<h\sqrt{\Delta/3}$.

Замечание 3. Если величина h, характеризующая момент противоэлектродвижущей силы, является недостаточной для выполнения условий (9) и (10), возможное решение представляется в виде добавления составляющей $U^{(2)}$ в виде $U_j^{(2)} = -\mu_j \dot{e}_j\left(t - \nu(t)\right)$, $j = 1, 2, 3$. Можно показать, что такой подход имеет заведомое решение с достаточно сложным подбором коэффициентов μ_j, $j = 1, 2, 3$.

Численное моделирование движения колесного робота при действии управления (11) проводилось в системе Scilab на временном интервале $t \in [0;\ 150]$ для следующих значений параметров:

$m_0 = 20$ кг, $m_1 = 1$ кг, $r = 0{,}1$ м, $a = 0{,}25$ м,
$d = 0{,}05$ м, $\rho_0 = 0{,}5$ м, $\rho_1 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}1$ м,
$\alpha = \pi/6$ рад, $c_v = 6 \cdot 10^{-2}$ Н·м·с.

Отслеживаемая траектория представляет собой эллипс вида

$$x(t) = 5 + 7\cos t \text{ м},\ y(t) = 5 + 9\sin t \text{ м}.$$

При этом при движении по эллипсу платформа робота должна вращаться вокруг своего геометрического центра по закону

$$\psi(t) = \frac{\pi}{4} + 10t \text{ рад}.$$

Начальные положение и скорость робота выбраны следующими:

$x(0) = 25$ м, $y(0) = 35$ м, $\psi(0) = -2{,}21$ рад,
$\dot{x}(0) = 25$ м/с, $\dot{y}(0) = -15$ м/с, $\dot{\psi}(0) = 20$ рад/с.

Найдены следующие параметры управления:

$u_i(t) = k_i f(q_i(L_n)), f_i(q_i) = \mathrm{arctg}\ (q_i)$,
$i = 1, 2, 3$, $t \in [nL_0, (n+1)L_0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
$L_0 = 0{,}04$ c, $k_1 = k_2 = k_3 = 20$.

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования. Анализ графиков показывает, что закон управления (11) обеспечивает робастное отслеживание траектории робота.

Заключение

В статье исследована задача об управлении роботом с тремя омни-колесами и со смещенным центром масс. Обоснована структура управления, обеспечивающая отслеживание заданной траектории, в том числе с учетом запаздывания и дискретности сигнала в цепи обратной связи. При этом управление является робастным, а именно: параметры этого управления не зависят непосредственно от массоинерционных параметров системы и задания отслеживаемой траектории, а определяются только значениями ограничений на эти параметры и траекторию. Ранее в статьях [32–34] была построена динамика мобильного робота, манипулятора на подвижной платформе с тремя омни-колесами. Полученные в данной работе результаты могут быть использованы в задачах управления такими системами, имеющими важное применение в различных сферах [35]. Соответствующим образом полученные результаты могут быть применены и к другим моделям мобильного робота с роликонесущими колесами [36].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots / K. Watanabe, Y. Shiraishi, S.G. Tzafestas, J. Tang, T. Fukuda // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 1998. Vol. 22. pp. 315–330.

2. Omni-directional mobile robot controller design by trajectory linearization / Y. Liu, X. Wu, J.J. Zhu, J. Lew // Proceedings of the American Control Conference. 2003. pp. 3423–3428.

3. Design and development of a comprehensive omni directional soccer player robot / H.A. Samani, A. Abdollahi, H. Ostadi, S.Z. Rad // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2004. Vol. 1, no 3. pp. 191–200.

4. Zhang Y., Cao Q., Miao S. Adaptive inverse control of an omni-directional mobile robot // ICNC. 2005. pp. 723–726.

5. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, № 8. – С. 29–80.

6. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами //

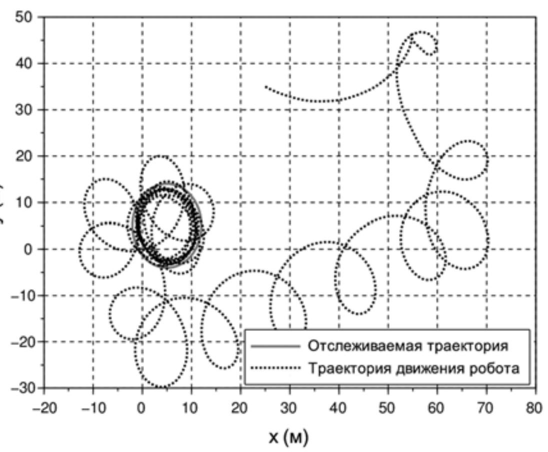

Рис. 2. Отслеживание заданной траектории робота при управлении (11)

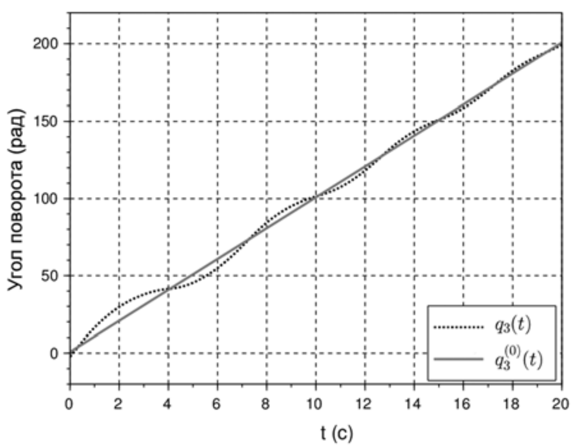

Рис. 3. Зависимость угла поворота платформы робота от времени при управлении (11)

Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – № 6. – С. 142–149.

7. Vazquez J.A., Velasco-Villa M. Path-tracking dynamic model based control of an omnidirectional mobile robot // Proceedings of the 17th World Congress IFAC, July 6–11, 2008. Seoul, Korea, 2008. pp. 5365–5370.

8. Huang H.C., Tsai C.C. Adaptive trajectory tracking and stabilization for omnidirectional mobile robot with dynamic effect and uncertainties // Proceedings of the 17th World Congress IFAC, July 6–11, 2008. Seoul, Korea, 2008. pp. 5383–5388.

9. Tsai C.C., Huang H.C., Wang T.Y. Simultaneous tracking and stabilization of an omnidirectional mobile robot in polar coordinates // Journal of the Chinese Institute of Engineers. 2009. Vol. 32, no. 4. pp. 569–575.

10. Kim H., Kim B.K. Minimum-energy trajectory planning and control on a Straight line with rotation for three-wheeled omni-directional mobile robots // 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, October 7–12, 2012. Vilamoura, Algrve, Portugal, 2012. pp. 3119–3124.

11. Yang Y.C., Cheng C.C. Robust adaptive trajectory control for an omnidirectional vehicle with parametric uncertainty // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 2013. Vol. 37, no. 3. pp. 405–413.

12. Singh A.M., Vista IV F.P., Chong K.T. Parametric uncertainties prone adaptive control method for omni directional vehicle // International Journal of Control and Automation. 2016. Vol. 9, no. 5. pp. 341–350.

13. Андреев А.С., Перегудова О.А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, вып. 6. – С. 965–976.

14. Перегудова О.А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. – Ульяновск : УлГУ, 2009. – 252 с.

15. Андреев А.С., Перегудова О.А. Об управлении движением колесного мобильного робота // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, вып. 4. – С. 451–462.

16. Андреев А.С., Перегудова О.А. Синтез робастных алгоритмов стабилизации программных движений мобильного робота с омни-колесами методом вектор-функций Ляпунова // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – Т. 16, № 12. – С. 813–821.

17. Balakrishna R., Ghosal A. Modeling of slip for wheeled mobile robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1995. Vol. 11, no. 1. pp. 126–132.

18. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R. Williams II, B.E. Carter, P. Gallina, G. Rosati // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. Vol. 18, no. 3. pp. 285–293.

19. Jin Y., Chen J., Li Z. Dynamic modeling, control and simulation with slip for an omnidirectional mobile microrobot // Intelligent Robotics and Applications: First International Conference, ICIRA 2008, October 15–17, 2008, Wuhan, China, Proceedings, 2008. Part I. pp. 911–920.

20. Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. – 2010. – Т. 74, вып. 4. – С. 610–619.

21. Liu Y., Williams II R.L., Zhu J. Integrated control and navigation for omni-directional mobile robot based on trajectory linearization // Proceedings of the 2007 American Control Conference, July 11–13, 2007. New York City, USA, 2007. pp. 2153–2158.

22. Velasco-Villa M., del-Muro-Cuellar B., Alvarez-Aguirre A. Smith-predictor compensator for a delayed omnidirectional mobile robot // Proceedings of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, July 27–29, 2007, Athens, Greece, 2007. pp. 1–6.

23. Treesatayapun C. A discrete-time stable controller for an omni-directional mobile robot based on an approximated model // Control Engineering Practice. 2011. Vol. 19, Iss. 2. pp. 194–203.

24. Santos J., Conceicao A.G.S., Santos T.L.M. Trajectory tracking of omni-directional mobile robots via predictive control plus a filtered Smith predictor // IFAC PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no.1. pp. 10250–10255.

25. Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 9. – С. 4–55.

26. Перегудова О.А., Кудашова Е.А. Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – № 1. – С. 118–120.

27. Andreev A.S., Peregudova O.A. Trajectory Tracking Problem for Omnidirectional Mobile Robot with Parameter Variations and Delayed Feedback // Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015. Barcelona, June 29–July 2, 2015. Barcelona School of Industrial Engineering, 2015. pp. 851–859.

28. Andreev A.S., Peregudova O.A. Tracking Control Problem for Wheeled Mobile Robot // Международная конференция по математической теории управления и механике : тез. докл., 3–7 июля 2015 г., г. Суздаль. – Суздаль, 2015. С. 155–156.

29. Андреев А.С., Кудашова Е.А. О моделировании структуры управления для колесного робота с омни-колесами // Автоматизация процессов управления. – 2015. – № 2 (40). – С. 114–121.

30. Стабилизация движения трехколесного робота : св-во о гос. регистр. программы для ЭВМ 2015615314 / Кудашова Е.А. – № 2015612544 ; заявл. 25.03.15 ; опубл. 15.05.15.

31. Кудашова Е.А., Филаткина Е.В. Моделирование управляемого движения трехколесного мобильного робота: описание программного продукта // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Математика и информационные технологии. – 2016. – Вып. 1 (8). – С. 43–48.

32. Qiu C., Cao Q. Modeling and analysis of the dynamics of an omni-directional mobile manipulators systems // J. Intell. Robot. Syst. 2008. Vol. 52, Iss. 1. pp. 101–120.

33. Adaptive hybrid control for omnidirectional mobile manipulators using neural-network / X.M. Tan, D. Zhao, J. Yi, D. Xu // 2008 American Control Conference, Westin Seattle Hotel, Seattle, June 11–13, 2008, Washington, USA, 2008. pp. 5174–5179.

34. System design and control of an omnidirectional mobile manipulator / C.C. Tsai, L.B. Jiang, T.Y. Wang, H.C. Huang, H.T. Fan // Proceedings of 2005 CACS Automatic Control Conference. Nov. 18–19, 2005. Tainan, Taiwan, 2005.

35. Kalman V. On modeling and control of omnidirectional wheels. PhD. Dissertation. Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2013.

36. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Dynamics and control of an omniwheel vehicle // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20, no. 2. pp. 153–172.

REFERENCES

1. Watanabe, K., Y. Shiraishi, S.G. Tzafestas, J. Tang, T. Fukuda. Feedback Control of an Omnidirectional Autonomous Platform for Mobile Service Robots. *Journal of Intelligent and Robotic systems,* 1998, vol. 22, pp. 315–330.

2. Liu, Y., X. Wu, J.J. Zhu, J. Lew. Omni-Directional Mobile Robot Controller Design by Trajectory Linearization. *Proceedings of the American Control Conference,* 2003, pp. 3423–3428.

3. Samani, H.A., A. Abdollahi, H. Ostadi, S.Z. Rad. Design and Development of a Comprehensive Omni Directional Soccer Player Robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems,* 2004, vol. 1, no. 3, pp. 191–200.

4. Zhang, Y., Cao Q., Miao S. Adaptive Inverse Control of an Omni-Directional Mobile Robot. *ICNC,* 2005, pp. 723–726.

5. Martynenko Iu.G. Upravlenie dvizheniem mobilnykh kolesnykh robotov [Motion Control of Mobile Wheeled Robots]. *Fundamentalnaia i prikladnaia matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2005, vol. 11, no. 8, pp. 29–80.

6. Martynenko Iu.G., Formalskii A.M. O dvizhenii mobilnogo robota s rolikonesushchimi kolesami [On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels]. *Izvestiia RAN. Teoriia i sistemy upravleniia* [Journal of Computer and Systems Sciences International], 2007, no. 6, pp. 142–149.

7. Vazquez J.A., Velasco-Villa M. Path-Tracking Dynamic Model Based Control of an Omnidirectional Mobile Robot. *Proceedings of the 17th World Congress IFAC, July 6–11*. Seoul, Korea, 2008, pp. 5365–5370.

8. Huang H.C., Tsai C.C. Adaptive Trajectory Tracking and Stabilization for Omnidirectional Mobile Robot with Dynamic Effect and Uncertainties. *Proceedings of the 17th World Congress IFAC, July 6–11.* Seoul, Korea, 2008, pp. 5383–5388.

9. Tsai C.C., Huang H.C., Wang T.Y. Simultaneous Tracking and Stabilization of an Omnidirectional Mobile Robot in Polar Coordinates. *Journal of the Chinese Institute of Engineers,* 2009, vol. 32, no. 4, pp. 569–575.

10. Kim H., Kim B.K. Minimum-Energy Trajectory Planning and Control on a Straight Line with Rotation for Three-Wheeled Omni-Directional Mobile Robots. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, October 7–12, 2012.* Vilamoura, Algrve, Portugal, 2012, pp. 3119–3124.

11. Yang Y.C., Cheng C.C. Robust Adaptive Trajectory Control for an Omnidirectional Vehicle with Parametric Uncertainty. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering,* 2013, vol. 37, no. 3, pp. 405–413.

12. Singh A.M., Vista IV F.P., Chong K.T. Parametric Uncertainties Prone Adaptive Control Method for Omni Directional Vehicle. *International Journal of Control and Automation,* 2016, vol. 9, no. 5, pp. 341–350.

13. Andreev A.S., Peregudova O.A. K metodu sravneniia v zadachakh ob asimptoticheskoi ustoichivosti [The Comparison Method in Asymptotic Stability Problems]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2006, vol. 70, iss. 6, pp. 965–976.

14. Peregudova O.A. *Metod sravneniia v zadachakh ustoichivosti i upravleniia dvizheniiami mekhanicheskikh sistem* [The Comparison Method in Problems on Stability and Control of Mechanical System Movements]. Ulyanovsk, UlSU Publ., 2009. 252 p.

15. Andreev A.S., Peregudova O.A. Ob upravlenii dvizheniem kolesnogo mobilnogo robota [The Motion Control of a Wheeled Mobile Robot]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2015, vol. 79, iss. 4, pp. 451–462.

16. Andreev A.S., Peregudova O.A. Sintez robastnykh algoritmov stabilizatsii programmnykh dvizhenii mobilnogo robota s omni-kolesami metodom vektor-funktsii Lyapunova [Synthesis of Robust Algorithms of Program Motion Stabilization for an Omni-Wheel Mobile Robot by the Method of Lyapunov Vector Functions]. *Mekhatronika, avtomatizatsiia, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2015, vol. 16, no. 12, pp. 813–821.

17. Balakrishna R., Ghosal A. Modeling of Slip for Wheeled Mobile Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* 1995, vol. 11, no. 1, pp. 126–132.

18. Williams, R., B.E. Carter, P. Gallina, G. Rosati. Dynamic Mmodel with Slip for Wheeled Omni-Directional Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, vol. 18, no. 3, pp. 285–293.

19. Jin Y., Chen J., Li Z. Dynamic Modeling, Control and Simulation with Slip for an Omnidirectional Mobile Microrobot. *Intelligent Robotics and Applications: First International Conference, ICIRA 2008, October 15–17, 2008, Wuhan, China, Proceedings*. 2008, Part I, pp. 911–920.

20. Martynenko Iu.G. Ustoichivost statsionarnykh dvizhenii mobilnogo robota s rolikonesushchimi kolesami i smeshchennym tsentrom mass [Stability of Steady Motions of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels and a Displaced Centre of Mass]. *PMM* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2010, vol. 74, iss. 4, pp. 610–619.

21. Liu Y., Williams II R.L., Zhu J. Integrated Control and Navigation for Omni-Directional Mobile Robot Based on Trajectory Linearization. *Proceedings of the 2007 American Control Conference, July 11–13, 2007.* New York City, USA, 2007, pp. 2153–2158.

22. Velasco-Villa M., del-Muro-Cuellar B., Alvarez-Aguirre A. Smith-Predictor Compensator for a Delayed Omnidirectional Mobile Robot. *Proceedings of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, July 27–29, 2007.* Athens, Greece, 2007, pp. 1–6.

23. Treesatayapun C. A Discrete-Time Stable Controller for an Omni-Directional Mobile Robot Based on an Approximated Model. *Control Engineering Practice*, 2011, vol. 19, iss. 2, pp. 194–203.

24. Santos J., Conceicao A.G.S., Santos T.L.M. Trajectory Tracking of Omni-Directional Mobile Robots via Predictive Control Plus a Filtered Smith Predictor. *IFAC PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 10250–10255.

25. Andreev A.S. Metod funktsionalov Lyapunova v zadache ob ustoichivosti funktsionalno-differentsialnykh uravnenii [The Lyapunov Functionals Method in Stability Problems for Functional Differential Equations]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2009, no. 9, pp. 4–55.

26. Peregudova O.A., Kudashova E.A. Metod vektornykh funktsii Lyapunova v zadache ob asimptoticheskoi ustoichivosti raznostnykh sistem [Method of Lyapunov Vector Functions in the Problem on Asymptotic Stability of Difference Systems]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzhia* [Scientific and Technical Volga Region Bulletin], 2015, no. 1, pp. 118–120.

27. Andreev A.S., Peregudova O.A. Trajectory Tracking Problem for Omnidirectional Mobile Robot with Parameter Variations and Delayed Feedback. *Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015. Barcelona, June 29–July 2, 2015.* Barcelona School of Industrial Engineering, 2015, pp. 851–859.

28. Andreev A.S., Peregudova O.A. Tracking Control Problem for Wheeled Mobile Robot. *Mezhdunarodnaia konferentsiia po matematicheskoi teorii upravleniia i mekhanike. Tez. dokl., 3–7 iiulia 2015* [International Conference on the Mathematical Theory of Control and Mechanics]. Suzdal, 2015, pp. 155–156.

29. Andreev A.S., Kudashova E.A. O modelirovanii struktury upravleniia dlya kolesnogo robota s omni-kolesami [On Modeling the Control Structure of the Omni-directional Mobile Robo]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2015, no. 2 (40), pp. 114–121.

30. Kudashova E.A. *Stabilizatsiia dvizheniia trekhkolesnogo robota*. State Registration Certificate of the Computer Program 2015615314. No. 2015612544. Data of filling: March 25, 2015. Data of publication: May 15, 2015.

31. Kudashova E.A., Filatkina E.V. Modelirovanie upravliaemogo dvizheniia trekhkolesnogo mobilnogo robota: opisanie programmnogo produkta [Simulation of the Controlled Movement of a Three-Wheeled Mobile Robot: Softwareproduct Description]. *Uchenye zapiski Ulyanovskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika i informatsionnye tekhnologii* [Proceedings of Ulyanovsk State University. Mathematics and Information Technology Series]. 2016, iss. 1 (8), pp. 43–48.

32. Qiu C., Cao Q. Modeling and Analysis of the Dynamics of an Omni-Directional Mobile Manipulators Systems. *J. Intell. Robot. Syst.*, 2008, vol. 52, iss. 1, pp. 101–120.

33. Tan, X.M., D. Zhao, J. Yi, D. Xu. Adaptive Hybrid Control for Omnidirectional Mobile Manipulators Using Neural-Network. *2008 American Control Conference, Westin Seattle Hotel, Seattle, June 11–13, 2008.* Washington, USA, 2008, pp. 5174–5179.

34. C.C. Tsai, L.B. Jiang, T.Y. Wang, H.C. Huang, H.T. Fan. System Design and Control of an Omnidirectional Mobile Manipulator. *Proceedings of 2005 CACS Automatic Control Conference. Nov. 18–19, 2005.* Tainan, Taiwan, 2005.

35. Kalman V. *On Modeling and Control of Omnidirectional Wheels. PhD. Dissertation.* Budapest, Budapest University of Technology and Economics, 2013.

36. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Dynamics and Control of an Omniwheel Vehicle. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 153–172.