

УДК 544.77.022.54

А.А. Батанова

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ УПРУГОСТИ КОЛЛОИДНЫХ КРИСТАЛЛОВ С ИЗОТРОПНЫМ НАЧАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ

*Батанова Анастасия Александровна, аспирант Ульяновского государственного технического университета, окончила факультет информационных систем и технологий УлГТУ. Имеет статьи в области моделирования свойств упругости коллоидных кристаллов. [e-mail: a.batanova73@mail.ru].*

### Аннотация

Сформулированы модельные предположения для описания коллоидных кристаллов с изотропным начальным напряжением. Рассмотрен подход к математическому моделированию однородной деформации исследуемых систем. Предложена методика определения упругих постоянных первого и второго порядков коллоидных кристаллов с изотропным начальным напряжением. Данная методика основана на определении численных зависимостей напряжения от деформации в ходе вычислительного эксперимента. На основании рассмотренной теории разработан алгоритм определения зависимостей напряжения от деформаций как функции плотности кристалла, определены параметры моделей и описана постановка вычислительного эксперимента. Предложенная методика может быть использована для проведения вычислительных экспериментов в широком диапазоне параметров моделей и единообразно применима ко всем трехмерным и двумерным коллоидным кристаллам с изотропным начальным напряжением, независимо от типа решетки.

Ключевые слова: коллоидный кристалл, математическое моделирование, однородная деформация, изотропное начальное напряжение, уравнение Пуассона-Больцмана, упругие постоянные.

doi: 10.35752/1991-2927-2019-4-58-90-96

## MATHEMATICAL MODELING OF THE ELASTIC PROPERTIES OF COLLOIDAL CRYSTALS WITH ISOTROPIC INITIAL STRESS

*Anastasia Aleksandrovna Batanova, Postgraduate Student of Ulyanovsk State Technical University; graduated from the Faculty of Information Systems and Technologies of UISTU; an author of articles in the field of modeling the elastic properties of colloidal crystals. e-mail: a.batanova73@mail.ru.*

### Abstract

The model assumptions are formulated to describe colloidal crystals with an isotropic initial stress. The approach to mathematical modeling of homogeneous deformation of the studied systems is considered. A method for determining the elastic constants of the first and second orders of colloidal crystals with an isotropic initial stress is proposed. The method is based on the determination of the numerical dependences of stress on deformation during a computational experiment. Based on the theory considered, an algorithm for determining the dependences of stress on strains as a function of crystal density is developed, model parameters are determined, and the design of a computational experiment is described. The proposed method can be used for computational experiments in a wide range of model parameters and is uniformly applicable to all three-dimensional and two-dimensional colloidal crystals with an isotropic initial stress, regardless of the type of lattice.

Key words: colloidal crystal, mathematical modeling, homogeneous deformation, isotropic initial stress, Poisson-Boltzmann equation, elastic constants.

## ВВЕДЕНИЕ

Коллоидные системы играют все возрастающую роль в связи с разработкой новых нанокompозитных [1] и смазочных материалов [2] при проектировании современных судовых систем очистки сточных вод [3], а также изучении автоматизации процесса коагуляции в природных водах [4], который зависит от природы коллоидных частиц и их электрического потенциала. Коллоидные кристаллы выделяются в особую группу коллоидных систем в силу пространственной упорядоченности частиц. Интерес к данным системам особенно вырос в последнее время в связи с исследованием процессов самосборки упорядоченных структур [5–7]. Технологические перспективы этих процессов чрезвычайно многообещающи, так как становится возможным переход к управляемой сборке трехмерных наноструктур с заданными свойствами.

Поскольку электрические взаимодействия в коллоидных системах играют важную роль, актуальной является разработка методов и средств математического моделирования электростатических взаимодействий в подобных системах, что позволит предсказывать образование тех или иных структур, их механические и электрические свойства.

Одним из основных подходов к описанию электростатических взаимодействий в коллоидных системах является теория на основе нелинейного дифференциального уравнения Пуассона-Больцмана. Оно описывает электрический потенциал в рамках теории среднего поля и опирается на небольшое число хорошо определенных допущений и приближений.

## МОДЕЛИ КРИСТАЛЛА В СОСТОЯНИИ ОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Коллоидные кристаллы, исследуемые в данной работе, представляют собой систему пространственно упорядоченных электрически заряженных коллоидных частиц, погруженных в жидкий электролит. Построение моделей таких систем основывается на ряде допущений.

Все частицы в системе являются одинаковыми абсолютно твердыми диэлектрическими сферами. Они расположены упорядоченно так, что их центры находятся в узлах моноатомной решетки Бравэ [8]. Кристаллы рассматриваются в приближении статической решетки, тепловым движением частиц пренебрегается. Частицы электрически заряжены, при этом заряд находится только на поверхности частиц. Растворителем в электролите является среда с диэлектрической проницаемостью, существенно превышающей диэлектрическую проницаемость материала частиц, что типично для водных растворов. В области электролита электрический потенциал подчиняется уравнению Пуассона-Больцмана. Поскольку уравнение Пуассона-Больцмана пренебрегает корреляционными эффектами [9, 10], оно лучше всего описывает электрический потенциал в электролитах

с низкой валентностью. По этой причине модели строятся для бинарного, симметричного, одновалентного электролита (1:1 электролита).

Как показано в [11–15], при сделанных предположениях моделирование состояния однородной деформации кристалла сводится к соответствующим краевым задачам для уравнения Пуассона-Больцмана. Решением краевой задачи в конкретной конфигурации является распределение электрического потенциала в системе  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , что позволяет вычислить механическое напряжение, определяемое этим решением.

Тензор напряжения Максвелла  $\Pi_{ij}$ , ассоциированный с дифференциальным уравнением Пуассона-Больцмана, представляет собой тензор напряжения Максвелла, дополненный энтропийным членом, ответственным за избыточное, по отношению к объемному, осмотическое давление ионов. Для 1:1 электролита в безразмерной форме он имеет вид [16]:

$$\Pi = \nabla\varphi \otimes \nabla\varphi - \left( \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + ch\varphi - 1 \right) I. \quad (1)$$

Тензор механического напряжения  $T_{ij}$  определяется с помощью тензора напряжений Максвелла  $\Pi_{ij}$  следующим образом [17]:

$$T_{ik} = \frac{1}{V_c} \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_k^{(m)} \int_{S^{(m)}} \Pi_{ij} ds_j, \quad (2)$$

где  $V_c$  – объем элементарной ячейки;  $\Pi_{ij}$  – компоненты тензора Максвелла (1);  $S^{(m)}$  и  $S'^{(m)}$ ,  $m = 1, \dots, M$  – пары противоположащих граней ячейки;  $\mathbf{r}^{(m)}$  – векторы примитивных трансляций, разделяющие симметричные точки на гранях  $S^{(m)}$  и  $S'^{(m)}$ . Векторы  $\mathbf{r}^{(m)}$  направлены от  $S^{(m)}$  к  $S'^{(m)}$ . В (2) интегрирование осуществляется только по одной из каждой пары противоположащих граней. Ориентация  $S'^{(m)}$  определяется направлением их внешних нормалей. В (2) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Формула (2) позволяет вычислить тензор механического напряжения кристалла в произвольной конфигурации.

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ

Упругие постоянные первого и второго порядков могут быть найдены из зависимостей компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций. Процесс деформации строится как последовательность состояний деформации, моделируемых так, как описано в предыдущем разделе.

Представленный алгоритм применим к кристаллам с изотропным начальным напряжением. К ним относятся:

- 1) трехмерные кристаллы с простой кубической [11], объемноцентрированной кубической [12, 13] и границентрированной кубической решетками;
- 2) двумерные кристаллы с квадратной и гексагональной [14, 15] решетками.

Такие кристаллы представляют особый интерес как структуры, которые могут существовать длительное время в равновесии под действием внешнего изотропного давления, необходимого для устойчивости этого типа кристаллов.

Для кристаллов с изотропным начальным напряжением зависимость компонент тензора напряжения  $T_{ij}$  от компонент тензора бесконечно малых деформаций  $\varepsilon_{ij}$  имеет вид [18, 19]:

$$T_{ij} = B_{11}\delta_{ij} + B_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \dots, \quad (3)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $B_{11}$  – упругие постоянные первого порядка,  $B_{ijkl}$  – упругие постоянные второго порядка, а многоточием обозначены члены степеней выше первой по компонентам  $\varepsilon_{ij}$ .

В силу высокой симметрии кристаллы с изотропным начальным напряжением имеют только одну упругую постоянную первого порядка  $B_{11}$  и три упругие постоянные второго порядка  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{1212}$ .

В случае однородной деформации растяжения вдоль оси тензор бесконечно малых деформаций имеет единственную ненулевую компоненту  $\varepsilon_{11} \neq 0$ . В матричной форме тензор деформаций имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  – параметр деформации. Тогда из (3) следует, что

$$T_{11} = B_{11} + B_{1111}\varepsilon + \dots, \quad (5)$$

$$T_{22} = B_{11} + B_{1122}\varepsilon + \dots. \quad (6)$$

Полученные в вычислительном эксперименте зависимости (5) и (6) позволяют определить одну независимую упругую постоянную  $B_{11}$  и две независимые упругие постоянные  $B_{1111}$  и  $B_{1122}$ .

В случае однородной деформации сдвига в плоскости  $xu$  тензор бесконечно малых деформаций имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В этом случае уравнение (3) принимает вид:

$$T_{12} = 2B_{1212}\varepsilon + \dots. \quad (8)$$

Из зависимости (8) находится упругая постоянная  $B_{1212}$ .

Таким образом, в ходе вычислительного эксперимента подлежат определению три зависимости (5), (6), (8). Путем обработки полученных данных методом наименьших квадратов определяются коэффициенты аппроксимации, являющиеся линейными комбинациями упругих постоянных. Пусть получены три полиномиальные аппроксимации данных моделирования:

$$\begin{aligned} T_{11} &= a_0^{(11)} + a_1^{(11)}\varepsilon + a_2^{(11)}\varepsilon^2 + a_3^{(11)}\varepsilon^3 + \dots, \\ T_{22} &= a_0^{(22)} + a_1^{(22)}\varepsilon + a_2^{(22)}\varepsilon^2 + a_3^{(22)}\varepsilon^3 + \dots, \\ T_{12} &= a_0^{(12)} + a_1^{(12)}\varepsilon + a_2^{(12)}\varepsilon^2 + a_3^{(12)}\varepsilon^3 + \dots. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда из сопоставления (9) с (5), (6), (8) следует, что

$$\begin{aligned} B_{11} &= a_0^{(11)}, \\ B_{1111} &= a_1^{(11)}, \\ B_{1122} &= a_1^{(22)}, \\ B_{1212} &= \frac{1}{2}a_1^{(12)}. \end{aligned} \quad (10)$$

На основании проведенного исследования предлагается следующая методика определения упругих постоянных:

1. Подвергнуть кристалл однородной деформации растяжения вида (4) в некотором диапазоне значений параметра деформации  $\varepsilon$  и определить экспериментальные зависимости  $T_{11} = T_{11}(\varepsilon)$  и  $T_{22} = T_{22}(\varepsilon)$ .
2. Подвергнуть кристалл однородной деформации сдвига вида (7) в некотором диапазоне значений параметра деформации  $\varepsilon$  и определить экспериментальную зависимость  $T_{12} = T_{12}(\varepsilon)$ .
3. Построить полиномиальные аппроксимации зависимостей  $T_{11} = T_{11}(\varepsilon)$ ,  $T_{22} = T_{22}(\varepsilon)$  и  $T_{12} = T_{12}(\varepsilon)$ .
4. Определить коэффициенты аппроксимации.
5. По формулам (10) вычислить упругие постоянные через коэффициенты аппроксимации.

Достоинство представленной методики заключается в единстве подхода ко всем трехмерным и двумерным коллоидным кристаллам с изотропным начальным напряжением независимо от типа решетки.

#### АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ ОТ ДЕФОРМАЦИЙ И ПОСТАНОВКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

На основе представленной методики разработан алгоритм определения численных значений зависимостей напряжения от деформаций. При подготовке к проведению вычислительного эксперимента необходимо определить следующие факторы.

1. Тип кристаллической решетки. Представленный алгоритм применим для кристаллов с изотропным начальным напряжением. Тип решетки определяет номенклатуру границ и векторов примитивных трансляций, связывающих эти границы.
2. Геометрические и электрические параметры моделей. Рассматриваемые модельные кристаллы определяются тремя параметрами, представленными в таблице.
3. Количество и вид зависимостей, определяемых в ходе вычислительного эксперимента. Как показано в предыдущем разделе, для определения упругих

Параметры моделей		
Обозначение	Название	
Тип модели	С постоянным потенциалом на частице	С постоянной плотностью заряда на частице
<i>Тип параметров: Геометрические</i>		
$a$	Параметр решетки	
$R$	Радиус частицы	
<i>Тип параметров: Электрические</i>		
$\varphi_0$	Потенциал на частице	—
$\sigma_0$	—	Поверхностная плотность заряда на частице

постоянных первого и второго порядков кристаллов с изотропным начальным напряжением достаточно двух однородных деформаций: растяжения вдоль оси  $x$  и сдвига в плоскости  $xy$ . Исследования только этих деформаций оказывается достаточным для снятия трех типов зависимостей напряжения от деформации.

Предложенный алгоритм позволяет проводить исследования в широком диапазоне параметров моделей. В качестве примера в данной статье представлен алгоритм определения зависимостей напряжения от деформаций как функции плотности кристалла, т. е. рассмотрено изменение параметра решетки  $a$ , в то время как остальные параметры остаются неизменными. Блок-схема алгоритма по определению зависимостей напряжения от деформаций при изменении параметра решетки  $a$  представлена на рисунке 1.

Процедура нахождения зависимостей напряжения от деформации состоит в циклическом по параметру  $\varepsilon$  повторении следующих шагов:

1. Построение геометрической области, являющейся областью определения краевой задачи для уравнения Пуассона-Больцмана.

Геометрическая область в произвольной конфигурации представляет собой элементарную ячейку кристалла, в центре которой находится сферическая полость, отвечающая коллоидной частице.

Построение геометрической области как в исходной, так и в деформированной конфигурации осуществляется методом «снизу вверх», от вершин к граням и сплошным телам [20].

2. Численное решение краевой задачи для уравнения Пуассона-Больцмана на этой области.

При каждом шаге деформации  $\varepsilon$  решается краевая задача для уравнения Пуассона-Больцмана на этой области граничными условиями, соответствующими выбранной модели.

3. Вычисление компонент тензора напряжений.

Результатом решения краевой задачи является распределение электрического потенциала  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  модельной системы на данном шаге деформации. На основании полученных данных вычисляются компоненты тензора напряжений.

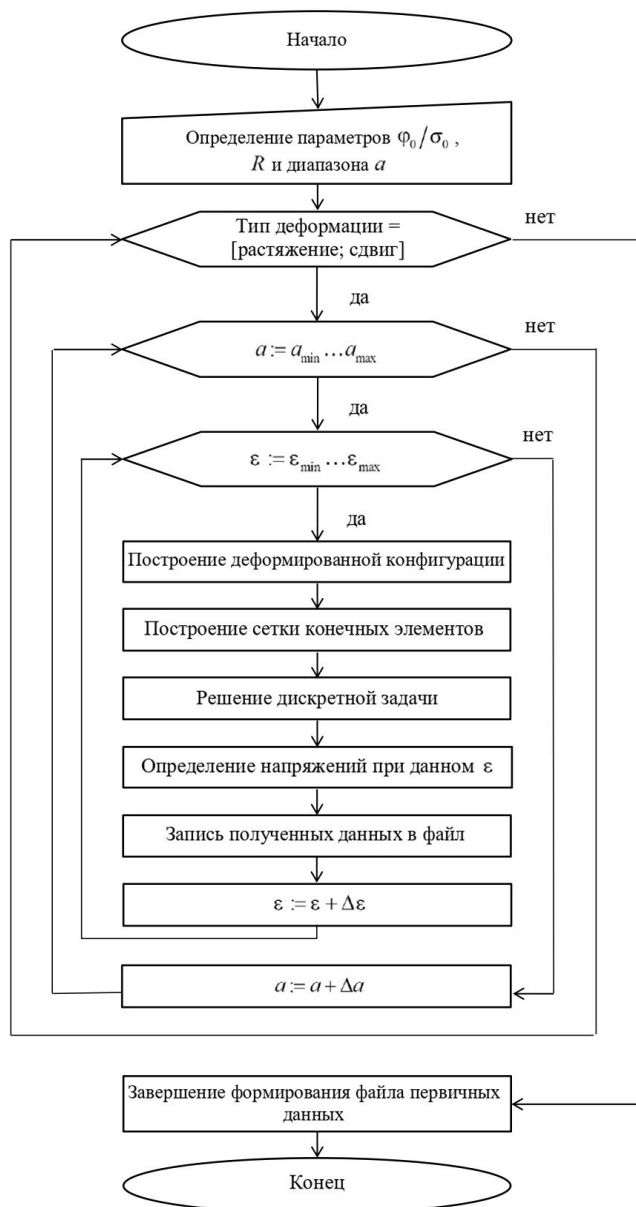
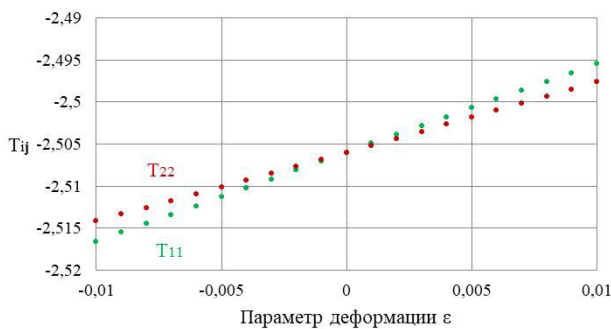
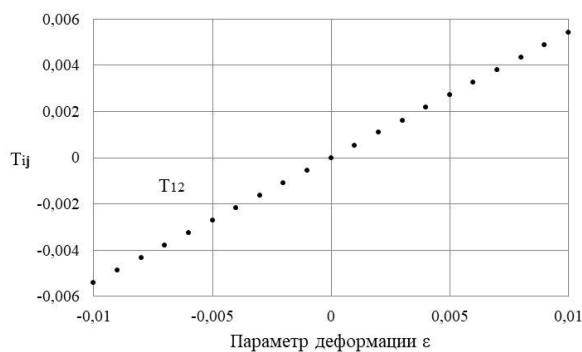


Рис. 1. Блок-схема алгоритма определения зависимостей напряжения от деформаций при изменении параметра решетки  $a$



а) деформация растяжения



б) деформация сдвига

Рис. 2. Пример результата вычислительного эксперимента [12] для компонент тензора напряжения как функции параметра деформации  $\varepsilon$ . Параметры модели: тип решетки — объемноцентрированная кубическая,  $\varphi_0 = 2,0$ ,  $R = 1,0$ ,  $\alpha = 2,4$

Примеры зависимостей напряжения от деформации для кристалла с объемноцентрированной кубической кристаллической решеткой показаны на рисунке 2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена методика определения упругих постоянных коллоидных кристаллов с изотропным начальным напряжением в рамках сделанных предположений, основанная на определении зависимостей напряжения от деформаций в прямом вычислительном эксперименте. Показано, что для снятия трех типов зависимостей напряжения от деформации достаточно проведения однородных деформаций двух типов: растяжения и сдвига.

На основании рассмотренной теории разработан алгоритм определения зависимостей напряжения от деформаций и проведена постановка вычислительного эксперимента. Определены параметры, необходимые для его проведения: тип кристаллической решетки, геометрические и электрические параметры, количество и вид зависимостей, определяемых в ходе вычислительного эксперимента.

Представлена блок-схема алгоритма определения зависимостей напряжения от деформаций как функции плотности кристалла, описана процедура нахождения численных зависимостей напряжения от деформации в циклическом по параметру  $\varepsilon$  повторении шагов.

Данная методика может быть использована для проведения вычислительных экспериментов в широком диапазоне параметров моделей и единообразно применима ко всем трехмерным и двумерным коллоидным кристаллам с изотропным начальным напряжением независимо от типа решетки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиговский О.Л., Кудрявцев П.Г. Жидкое стекло и водные растворы силикатов, как перспективная основа технологических процессов получения новых наноконпозиционных материалов // Инженерный вест-

ник Дона. – 2014. – Т. 29, № 2. – URL : <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2014/2448> (дата обращения: 11.12.2019).

2. Особенности трибологического поведения высокодисперсных металлосодержащих смазочных суспензий / С.А. Беляев, О.А. Кургузова, М.Ю. Байбарацкая, Н.Г. Макаренко // Наука и военная безопасность. – 2016. – № 2 (5). – С. 115–121.

3. Курников А.С., Мизгирев Д.С. Вопросы проектирования современных судовых систем очистки сточных вод // Журнал университета водных коммуникаций. – 2012. – № 1. – С. 154–164.

4. Зуев К.И. Автоматизация систем водоснабжения и водоотведения : учеб. пособие / Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир : ВлГУ, 2016. – 224 с.

5. Structural diversity in binary nanoparticle superlattices / E.V. Shevchenko, D.V. Talapin, N.A. Kotov., S. O'Brien, C.B. Murray // Nature. 2006. Vol. 439 (7072). pp. 55–59.

6. Frenkel D. Plenty of room at the top // Nature. 2006. Vol. 5. pp. 85–86.

7. Лебедев-Степанов П.В. Введение в самоорганизацию и самосборку ансамблей наночастиц. – М., 2015. – 304 с.

8. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела : в 2-х т. – М. : Мир, 1979. – Т. 1. – 400 с.; Т. 2. – 423 с.

9. Belloni L. Colloidal interactions // Journal of Physics: Condensed Matter 12. Nov. 2000. Vol. 12. pp. 549–583.

10. Долинный А.И. Двойной электрический слой между сферическими частицами. Эффект размера ионов // Коллоидный журнал. – 2018. – Т. 80, № 6. – С. 663–673.

11. Elastic Properties of Charge Stabilized Colloidal Crystals with Simple Cubic Lattice / P. Dyshlovenko, A. Batanova, E. Gladkova et al // Materials Science Forum. Mar. 2016. Vol. 845. pp. 178–181.

12. Batanova A.A., Dyshlovenko P.E. Elastic constants of colloidal crystals with body-centered cubic lattice and



constant potential on the particles // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 201. pp. 543–548.

13. Batanova, A.A., Dyshlovenko P.E. Elastic properties of charge-stabilized colloidal crystals with static body-centered cubic lattice // *Journal of Physics: Conference Series*. Jan. 2018. Vol. 955. – URL : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/955/1/012011> (дата обращения: 11.12.2019).

14. Dyshlovenko P.E. Two-dimensional colloidal crystal in nonlinear Poisson-Boltzmann model // *Colloid Journal*. Feb. 2007. Vol. 69. pp. 13–19.

15. Elastic properties of static charge-stabilized colloidal crystal with two-dimensional hexagonal lattice / Y.V. Alexandrov, A.A. Batanova, E.V. Gladkova, P.E. Dyshlovenko, A.N. Nagatkin, A.F. Nizametdinov // *Journal of Physics: Conference Series*. Feb. 2016. Vol. 681. – URL : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/681/1/012044> (дата обращения: 11.12.2019).

16. Computation of Electrostatic Forces on Solvated Molecules Using the Poisson-Boltzmann Equation / M.K. Gilson, M.E. Davis, B.A. Luty, J.A. McCammo // *J. Phys. Chem.* 1993. Vol. 97 (14). pp. 3591–3600.

17. Dyshlovenko P.E. Osmotic stress tensor in charge stabilized colloidal crystals // *Colloid Journal*. 2010. Vol. 72 (5). pp. 627–632.

18. Barron T.H.K., Klein M.L. Second-order elastic constants of a solid under stress // *Proc. Phys. Soc.* 1965. Vol. 85. pp. 523–532.

19. Wallace D.C. Lattice Dynamics and Elasticity of Stressed Crystals // *Rev. Mod. Phys.* 1965. Vol. 37. pp. 57–68.

20. Батанова А.А. Построение элементарной ячейки коллоидного кристалла в состоянии произвольной однородной деформации // *Вузовская наука в современных условиях* : сб. мат. 50-й науч.-техн. конф., г. Ульяновск, 25–30 янв. 2016 г. – Ульяновск : УЛГТУ, 2016. – Ч. 2. – С. 155–158.

#### REFERENCES

1. Figovskii O.L., Kudriavtsev P.G. Zhidkoe steklo i vodnye rastvory silikatov, kak perspektivnaia osnova tekhnologicheskikh protsessov polucheniia novykh nanokompozitsionnykh materialov [Liquid Glass and Aqueous Solutions of Silicates, as a Promising Basis for Technological Processes of New Nanocomposite Materials]. *Inzhenernyi vestnik Dona* [Engineering Journal of Don], 2014, vol. 29, no. 2. Available at: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2448> (accessed: 11.12.2019).

2. Beliaev S.A., Kurguzova O.A., Baibaratskaia M.Iu., Makarenko N.G. Osobennosti tribologicheskogo povedeniia vysokodispersnykh metallosoderzhashchikh smazochnykh suspenzii [Tribological Behavior Features of High Dispersity Metallic Lubricant Suspensions]. *Nauka i voennaia bezopasnost* [Science and Military Security], 2016, no. 2 (5), pp. 115–121.

3. Kurnikov A.S., Mizgirev D.S. Voprosy proektirovaniia sovremennykh sudovykh sistem ochildki stochnykh vod

[Problems of Designing of Modern Ship Systems for Waste Water Purification]. *Zhurnal universiteta vodnykh kommunikatsii* [Journal of University of Maritime and Inland Shipping], 2012, no. 1, pp. 154–164.

4. Zuev K.I. *Avtomatizatsiia sistem vodosnabzheniia i vodootvedeniia. Ucheb. posobie. Vladim. gos. un-t im. A.G. i N.G. Stoletovykh* [Automation of Water Supply and Water Disposal Systems. Tutorial. Vladimir State University n.a. Alexander and Nikolay Stoletovs]. Vladimir, VISU Publ., 2016. 224 p.

5. Shevchenko E.V., Talapin D.V., Kotov N.A., S. O'Brien, C.B. Murray. Structural Diversity in Binary Nanoparticle Superlattices. *Nature*, 2006, vol. 439 (7072), pp. 55–59.

6. Frenkel D. Plenty of Room at the Ttop. *Nature*, 2006, vol. 5, pp. 85–86.

7. Lebedev-Stepanov P.V. *Vvedenie v samoorganizatsiiu i samosborku ansamblei nanochastits* [Introduction Self-Organization and Self-Assembly of Nanoparticle Assemblage]. Moscow, 2015. 304 p.

8. Ashcroft N., Mermin N. *Fizika tverdogo tela. v 2-kh t.* [Solid-State Physics in two volumes]. Moscow, Mir Publ., 1979. vol. 1, 400 p.; vol. 2, 423 p.

9. Belloni L. Colloidal Interactions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 12. Nov. 2000, vol. 12, pp. 549–583.

10. Dolinnyi A.I. Dvoinoi elektricheskii sloi mezhdu sfericheskimi chastitsami. Effekt razmera ionov [Double Electric Layer among Spherical Particles. Ion Size Effect]. *Kolloidnyi zhurnal* [Colloid Journal], 2018, vol. 80, no. 6, pp. 663–673.

11. Dyshlovenko P., Batanova A., Gladkova E. et al. Elastic Properties of Charge Stabilized Colloidal Crystals with Simple Cubic Lattice. *Materials Science Forum*. Mar. 2016, vol. 845, pp. 178–181.

12. Batanova A.A., Dyshlovenko P.E. Elastic Constants of Colloidal Crystals with Body-Centered Cubic Lattice and Constant Potential on the Particles. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 201, pp. 543–548.

13. Batanova, A.A., Dyshlovenko P.E. Elastic Properties of Charge-Stabilized Colloidal Crystals with Static Body-Centered Cubic Lattice. *Journal of Physics: Conference Series*. Jan. 2018, vol. 955. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/955/1/012011> (accessed: 11.12.2019).

14. Dyshlovenko P.E. Two-Dimensional Colloidal Crystal in Nonlinear Poisson-Boltzmann Model. *Colloid Journal*, Feb. 2007, vol. 69, pp. 13–19.

15. Alexandrov Y.V., Batanova A.A., Gladkova E.V., Dyshlovenko P.E., Nagatkin A.N., Nizametdinov A.F. Elastic Properties of Static Charge-Stabilized Colloidal Crystal with Two-Dimensional Hexagonal Lattice. *Journal of Physics: Conference Series*. Feb. 2016, vol. 681. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/681/1/012044> (accessed: 11.12.2019).

16. Gilson M.K., Davis M.E., Luty B.A., McCammo J.A. Computation of Electrostatic Forces on Solvated Molecules Using the Poisson-Boltzmann Equation. *J. Phys. Chem.*, 1993, vol. 97 (14), pp. 3591–3600.

17. Dyshlovenko P.E. Osmotic Stress Tensor in Charge Stabilized Colloidal Crystals. *Colloid Journal*, 2010, vol. 72 (5), pp. 627–632.

18. Barron T.H.K., Klein M.L. Second-Order Elastic Constants of a Solid Under Stress. *Proc. Phys. Soc.*, 1965, vol. 85, pp. 523–532.

19. Wallace D.C. Lattice Dynamics and Elasticity of Stressed Crystals. *Rev. Mod. Phys.*, 1965, vol. 37, pp. 57–68.

20. Batanova A.A. Postroenie elementarnoi iacheiki kolloidnogo kristalla v sostoianii proizvolnoi odnorodnoi deformatsii [Building a Unit Cell of a Colloidal Crystal in the State of Random Homogeneous Deformation]. *Vuzovskaia nauka v sovremennykh usloviakh. Sb. mat. 50-i nauch.-tekhn. konf.* [Proc. of 50th Sci.-tech. Conf. Academic Science in Modern Conditions]. Ulyanovsk, UISTU Publ., 2016, part 2, pp. 155–158.